ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №1, 2017 Механика

УДК 539.3

О ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Саркисян Н.С., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропная пластинка, смешанные условия, внутренняя задача, геометрическая нелинейность.
Key words: asymptotic method, anisotropic plate, mixed conditions, interior problem, geometrically nonlinear.
Բանալի բառեր: ասիմպտոտիկ մեթոդ, անիզոտրոպ սալեր, խառը պայմաններ, ներքին խնդիր, երկրաչափորեն ոչ գծային:

Սարգսյան Ն.Ս., Խաչատրյան Ա.Մ.
Երկշերտ անիզոտրոպ սալի երկչափ հավասարումների մասին շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ սալի հաշվարկման համար: Սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների թենզորի համապատասխան բաղադրիչների արժեքները, մյուսի վրա՝ առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, իսկ շերտերի միջև՝ լրիվ կոնտակտի պայմաններ:

Sarkisyan N.S., Khachatryan A.M.
On two-dimentional equations two-layer anisotropic plate, with full contact between the layers

Asimptotic method is applied and two dimention differential equations with partial derivatives from geometrically nonlinear equations of three demention problem of elastisity theory for two-layer anisotropic plate are received. In the one surface of plate are given values of tensor of stress and in the other surface- mixed conditions of elasticity theory. Between the layers full contacts conditions are given. Full stress state of plate is formed as sum of main(internal) and boundary stress states.

Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоёв заданы условия полного контакта. Полное напряжённое состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряжённых состояний [1].

Введение. Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [2,3]. Впоследствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [3-4]. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена в [5]. Вопрос определения НДС слоистой анизотропной пластинки, когда на её верхней и нижней лицевых плоскостях заданы значения соответствующих компонентов тензора напряжений, рассмотрена в [8]. Решения задач определения НДС анизотропных слоистых пластин, на одной лицевой стороне которой заданы компоненты вектора перемещения, а на другой – условия первой, второй или смешанной задач теории упругости, изложены в [9]. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной и многослойной анизотропной термоупругой пластинки в линейной постановке приведены в [10,11]. В работе [12] асимптотическим методом построено решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для однослойной анизотропной термоупругой пластинки в нелинейной постановке. В работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче слоистой пластинки, когда на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости.

1. Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим тонкую двухслойную пластинку $\Omega = \{(x, y, z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, \ -h_2 \le z \le h_1\}$, где a – длина, b – ширина, составленную из однородных анизотропных материалов. Слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя и $k = 1,2$. Общая толщина полосы – $2h$. Плоскость отсчёта Oxy совпадает с плоскостью раздела слоёв, которая параллельна лицевым плоскостям пластинки. Условия на верхней $z = h_1$ и на нижней $z = -h_2$ лицевых плоскостях задаются формулами:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^{+}(x,y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^{+}(x,y),\ \sigma_z = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_z^{+}(x,y), \quad z = h_1 \\
&w = \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^{-}(x,y),\ \sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^{-}(x,y),\ \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^{-}(x,y), \quad z = -h_2
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

На плоскости раздела $z = 0$ заданы условия полного контакта

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)},\ \ \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)},\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} \\
&u^{(1)} = u^{(2)},\ v^{(1)} = v^{(2)},\ \ w^{(1)} = w^{(2)}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях полного контакта слоёв (1.2) и условиях на боковой поверхности пластинки. Краевые условия на торцах $x = 0, a$ и $y = 0, b$ пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трёхмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости [3,6,7]:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{yz}\right] +
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_z\right] = 0
$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_x+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_{xy}+\frac{\partial v}{\partial z}\sigma_{xz}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_{xy}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_y+\frac{\partial v}{\partial z}\sigma_{yz}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_{xz}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_{yz}+\frac{\partial v}{\partial z}\sigma_z\right]=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{xy}+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_{xz}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{xy}+\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_y+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_{yz}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{yz}+\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_{xz}+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_z\right]=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{13}\sigma_z+ \tag{1.3}$$
$$+a_{14}\sigma_{yz}+a_{15}\sigma_{xz}+a_{16}\sigma_{xy}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{23}\sigma_z+$$
$$+a_{24}\sigma_{yz}+a_{25}\sigma_{xz}+a_{26}\sigma_{xy}$$
$$\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]=a_{13}\sigma_x+a_{23}\sigma_y+a_{33}\sigma_z+$$
$$+a_{34}\sigma_{yz}+a_{35}\sigma_{xz}+a_{36}\sigma_{xy}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}=a_{14}\sigma_x+a_{24}\sigma_y+a_{34}\sigma_z+$$
$$+a_{44}\sigma_{yz}+a_{45}\sigma_{xz}+a_{46}\sigma_{xy}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}=a_{15}\sigma_x+a_{25}\sigma_y+a_{35}\sigma_z+$$
$$+a_{36}\sigma_{yz}+a_{46}\sigma_{xz}+a_{56}\sigma_{xy}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{36}\sigma_z+$$
$$+a_{46}\sigma_{yz}+a_{56}\sigma_{xz}+a_{66}\sigma_{xy}$$

В уравнениях (1.3) перейдём к безразмерным переменным $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\varsigma = z/h$ и безразмерным перемещениям

$U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный тангенциальный размер пластинки $(h << l)$.

Выбор асимптотики и вывод двухмерных уражнений. Решение внутренней задачи ищется в виде [9-12]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \tag{1.4}$$

где $Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений, s – номер приближения, k – номер слоя, S – количество приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}$:

$$q_k = 3 \quad \text{для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}, \tag{1.5}$$

$$q_k = 4 \quad \text{для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}.$$

Эта асимптотика, по сути, не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [9-11]. В нелинейной задаче, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.4) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра [12]. Поэтому, было принято $q = q_0 + 4$, где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости.

Асимптотике (1.4), (1.5) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.4) в преобразованные введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости анизотропного тела (1.3), с учётом (1.5), получим систему для определения $Q^{(s)}$:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_1^{*(k,s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_2^{*(k,s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k,s)}}{\partial \varsigma} + \sigma_3^{*(k,s)} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} + U_\xi^{(k,s-3)} + V_\xi^{(k,s-3)} + W_\xi^{(k,s-1)} = a_{11}\sigma_x^{(k,s)} + a_{12}\sigma_y^{(k,s)} + a_{13}\sigma_z^{(k,s-2)} +$$

$$+ a_{14}\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{15}\sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\eta}+U_{\eta}^{(k,s-3)}+V_{\eta}^{(k,s-3)}+W_{\eta}^{(k,s-1)}=a_{12}\sigma_x^{(k,s)}+a_{22}\sigma_y^{(k,s)}+a_{23}\sigma_z^{(k,s-2)}+$$
$$+a_{24}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_{25}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(k,s)} \qquad (1.6)$$
$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\varsigma}+U_{\varsigma}^{(k,s-3)}+V_{\varsigma}^{(k,s-3)}+W_{\varsigma}^{(k,s-1)}=a_{13}\sigma_x^{(k,s-2)}+a_{23}\sigma_y^{(k,s-2)}$$
$$+a_{33}\sigma_z^{(k,s-4)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(k,s-3)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(k,s-3)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(k,s-2)}$$
$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\varsigma}+U_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}+V_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}+W_{\eta\varsigma}^{(k,s-4)}=a_{14}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{24}\sigma_y^{(k,s-1)}+$$
$$+a_{34}\sigma_z^{(k,s-3)}+a_{44}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{54}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+a_{64}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$
$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial\varsigma}+U_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}+V_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}+W_{\xi\varsigma}^{(k,s-4)}=a_{15}\sigma_x^{(k,s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(k,s-1)}+$$
$$+a_{35}\sigma_z^{(k,s-3)}+a_{45}\sigma_{yz}^{(k,s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(k,s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$
$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\xi}+U_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+V_{\xi\eta}^{(k,s-3)}+W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}=a_{16}\sigma_x^{(k,s)}+a_{26}\sigma_y^{(k,s)}+$$
$$+a_{36}\sigma_z^{(k,s-2)}+a_{46}\sigma_{yz}^{(k,s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(k,s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

где

$$\sigma_1^{*(k,s)}=\sigma_{11}^{(k,s-3)}+\sigma_{12}^{(k,s-2)},\ \sigma_2^{*(k,s)}=\sigma_{22}^{(k,s-3)}+\sigma_{21}^{(k,s-2)},\ \sigma_3^{*(k,s)}=\sigma_{33}^{(k,s-4)}+\sigma_{13}^{(k,s-2)}$$
$$\sigma_{11}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\left[\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial\varsigma}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\sigma_y^{(k,s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial\varsigma}\right)+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\varsigma}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-i)}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi^2}\sigma_x^{(k,s-i)}+ \qquad (1.7)$$
$$\left.+\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\eta^2}\sigma_y^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi\partial\eta}\sigma_{xy}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\xi\partial\varsigma}\sigma_{xz}^{(k,s-i)}+2\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\eta\partial\varsigma}\sigma_{yz}^{(k,s-i)}\right]$$
$$\sigma_{12}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial^2U^{(k,i)}}{\partial\varsigma^2}\sigma_z^{(k,s-i)}+\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\varsigma}\frac{\partial\sigma_z^{(k,s-i)}}{\partial\varsigma}\right]\quad (1,2,3;\mathrm{U,V,W};\xi,\eta,\varsigma)$$

$$U_{\xi}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\xi},\quad U_{\xi\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta}\quad (U,V,W)$$

$$U_{\eta}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\eta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad U_{\zeta\eta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\eta},\quad (U,V,W)$$

$$U_{\zeta}^{(k,s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta},\quad U_{\xi\zeta}^{(k,s)}=\sum_{i=0}^{s}\frac{\partial U^{(k,i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(k,s-i)}}{\partial\zeta}\quad (U,V,W).$$

Решив систему (1.6), получим:

$$\sigma_z^{(k,s)}=\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_z^{*(k,s)},\ U^{(k,s)}=u^{(k,s)}+u^{*(k,s)},\ (U,V,W),$$

$$\sigma_x^{(k,s)}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\xi}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\eta}+B_{16}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\xi}\right)+a_3^{(k)}\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_x^{*(k,s)},$$

$$(x,y;1,2;a,b)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)}=B_{16}^{(k)}\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\xi}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\eta}+B_{66}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial\xi}\right)+c_3^{(k)}\sigma_{z0}^{(k,s)}+\sigma_{xy}^{*(k,s)},\quad(1.8)$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)}=-\left[L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)u^{(k,s)}+L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)v^{(k,s)}\right]\zeta-\left(a_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial\xi}+c_3^{(k)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial\eta}\right)+\sigma_{xz0}^{(k,s)}+\sigma_{xz}^{*(k,s)},$$

$$(x,y;1,2;a,b)$$

где дифференциальные операторы $L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)$ определяются по формулам

$$L_{11}\left(B_{ij}^{(k)}\right)=B_{11}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2B_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{66}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},\ (1,2;\xi,\eta)$$

$$L_{12}\left(B_{ij}^{(k)}\right)=B_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(B_{12}^{(k)}+B_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{26}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\quad(1.9)$$

а коэффициенты $B_{ij}^{(k)},a_i^{(k)},b_i^{(k)},c_i^{(k)}$ – по известным формулам [3,5,8].

$\sigma_{xz0}^{(k,s)},\sigma_{yz0}^{(k,s)},\sigma_{z0}^{(k,s)},u_0^{(k,s)},v_0^{(k,s)},w_0^{(k,s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1) и (1.2).

Величины со звездочками, входящие в формулы (1.8), как обычно, известны для каждого приближения s, поскольку выражаются через предыдущие приближения. Сюда же входят члены, обусловленные геометрической нелинейностью поставленной задачи. Эти величины определяются по формулам:

$$\sigma_z^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k,s-2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(k,s-2)}}{\partial\eta} + \sigma_3^{*(k,)}\right)d\zeta,$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{15}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}\sigma_z^{(k,s-1)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} -$$

$$-\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi} - U_{\xi\zeta}^{(k,s-3)} - V_{\xi\zeta}^{(k,s-3)} - W_{\xi\zeta}^{(k,s-3)}\Big)d\zeta$$

$$v^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{14}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{34}\sigma_z^{(k,s-1)} + a_{44}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{45}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{46}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} -$$

$$-\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta} - U_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} - V_{\eta\zeta}^{(k,s-3)} - W_{\eta\zeta}^{(k,s-3)}\Big)d\zeta$$

$$w^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{13}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{33}\sigma_z^{(k,s-1)} + a_{34}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{35}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} -$$

$$-U_{\zeta}^{(s-2)} - V_{\zeta}^{(s-2)} - W_{\zeta}^{(s-2)}\Big)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = B_{11}\varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{12}\varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{16}\omega^{*(k,s)} + a_3\sigma_z^{*(k,s)} + a_4\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_5\sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_y^{*(k,s)} = B_{12}\varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{26}\omega^{*(k,s)} + b_3\sigma_z^{*(k,s)} + b_4\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + b_5\sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = B_{16}\varepsilon_1^{*(k,s)} + B_{26}\varepsilon_2^{*(k,s)} + B_{66}\omega^{*(k,s)} + c_3\sigma_z^{*(k,s)} + c_4\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + c_5\sigma_{xz}^{(k,s-1)},$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(k,s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{*(k,s)}}{\partial\eta} + \sigma_1^{*(k,s)}\right)d\zeta,\ \ (1,2;\ x,y;\ \xi,\eta) \qquad (1.10)$$

$$\varepsilon_1^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\xi} + U_{\xi}^{(k,s-3)} + V_{\xi}^{(k,s-3)} + W_{\xi}^{(k,s-3)},$$

$$\varepsilon_2^{*(k,s)} = \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\eta} + U_{\eta}^{(k,s-3)} + V_{\eta}^{(k,s-3)} + W_{\eta}^{(k,s-3)},$$

$$\omega^{*(k,s)} = \frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\xi} + U_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + V_{\xi\eta}^{(k,s-3)} + W_{\xi\eta}^{(k,s-3)}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-k)} \equiv 0$, если $s < k$.

Удовлетворив условиям полного контакта (1.2), получим:

$$w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)},\ u^{(1,s)} = u^{(2,s)} = u^{(s)},\ v^{(1,s)} = v^{(2,s)} = v^{(s)}$$
$$\sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)},\ \sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)},\ \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} \tag{1.11}$$

С учётом (1.11), удовлетворив поверхностным условиям (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(s)}, v^{(s)}$:

$$L_{11}\left(C_{ij}\right)u^{(s)} + L_{12}\left(C_{ij}\right)v^{(s)} = p_1^{(s)},$$
$$L_{12}\left(C_{ij}\right)u^{(s)} + L_{22}\left(C_{ij}\right)v^{(s)} = p_2^{(s)}. \tag{1.12}$$

Обобщённые нагрузки $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ определяются по формулам

$$p_1^{(s)} = -\left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{-(s)}\right) - \left(\sigma_{xz}^{*(1,s)}\left(\xi,\eta,\varsigma_1\right) - \sigma_{xz}^{*(2,s)}\left(\xi,\eta,\varsigma_2\right)\right),$$
$$p_2^{(s)} = -\left(\sigma_{yz}^{+(s)} - \sigma_{yz}^{-(s)}\right) - \left(\sigma_{yz}^{*(1,s)}\left(\xi,\eta,\varsigma_1\right) - \sigma_{yz}^{*(2,s)}\left(\xi,\eta,\varsigma_2\right)\right). \tag{1.13}$$

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}$, $w^{(s)}$ определяются по формулам

$$w^{(s)} = w^{-(s)} - w^{*(2,s)}\left(\xi,\eta,\varsigma_2\right), \quad \sigma_{z0}^{(k,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}\left(\xi,\eta,\varsigma_1\right),$$
$$\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz}^{+(s)}\left(\xi,\eta\right) + \left(L_{11}\left(C_{ij}\right)u^{(s)} + L_{12}\left(C_{ij}\right)v^{(s)}\right)\zeta_1 - \sigma_{xz}^{*(1,s)}\left(\xi,\eta,\varsigma_1\right)\ \left(x, y;\, 1, 2\right),$$

где

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)}, \sigma_{yz}^{\pm(0)}, \sigma_z^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^{\pm}, \sigma_{yz}^{\pm}, \sigma_z^{\pm};\ w^{-(0)} = w^{-};\ w^{-(s)}, \sigma_{xz}^{\pm(s)}, \sigma_{yz}^{\pm(s)}, \sigma_z^{\pm(s)} = 0,\ s > 0,$$
$$\varsigma_1 = h_1/h,\ \varsigma_2 = -h_2/h,\ h = \left(h_1 + h_2\right)/2.$$

Операторы $L_{ij}\left(C_{ij}^{(k)}\right)$ определяются по формулам

$$L_{11}\left(C_{ij}^{(k)}\right) = C_{11}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2C_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{66}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \quad \left(1,2; x,y; \xi,\eta\right),$$
$$L_{12}\left(C_{ij}^{(k)}\right) = C_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left(C_{12}^{(k)} + C_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{26}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}. \tag{1.14}$$

Жёсткости определяются следующим образом:

$$C_{ij}^{(k)} = \left(-1\right)^{k+1}\varsigma_k B_{ij}^{(k)}, C_{ij} = C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)}, \tag{1.15}$$

Легко убедиться, что при $s = 0$ система уравнений (1.13), как в той же задаче для однослойной пластинки [11,12], совпадает с уравнениями обобщённой плоской задачи, когда имеется плоскость упругой симметрии [2]. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрической нелинейностью уравнений теории упругости. Вклад последующих приближений будет существенным особенно для материалов, обладающих сильной анизотропией и в том случае, когда внешние нагрузки имеют большую изменяемость.

Система уравнений (1.12) можно свести к решению одного уравнения четвёртого порядка. Для этого применим к обеим частям первого уравнения оператор L_{22}, а ко второму – $\left(-L_{12}\right)$ и сложим, в результате получим уравнение

$$\left(L_{11}L_{22}-L_{12}^{2}\right)u^{(s)}=L_{22}p_{1}^{(s)}-L_{12}p_{2}^{(s)}. \qquad (1.16)$$

Отметим, что мы здесь рассмотрели лишь внутреннюю задачу. Вопрос о пограничном слое и его взаимодействии с решением внутренней задачи можно осуществить указанным в [1,5] способом.

Заключение. В работе найдена асимптотика и из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчёта двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. Построено решение внутренней задачи и показано, что для точного удовлетворения торцевым условиям необходимо иметь также решение типа пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С. 668-686. Goldenveizer A.L. The construction of the plate bending approximate theory by the metod asymptotic integration of the equations of elasticity theory // J. Appl. Math. Mech. 1962. T.26. Issue 4, pp 668-686 (in Russian).
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с. Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. M.: Gostekhizdat. 1957. 463p. (in Russian).
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. M.:Nauka, 1987. 360p.(in Russian).
4. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. //ПМ. 1972. Т.8. Вып.6. С.3-17. 4. Grigolyuk E.I., Kogan F.A. The present state of the theory of multilayer shells. //PM. 1972. Vol.8. Issue 6, pp. 3-17 (in Russian).
5. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с. Aghalovian L.A. Asimptotic theory of anisotropic plates and shels. M.: Nauka. 1977. 414p. (in Russian).
6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948. 211с. Novozhilov V.V. The foundations of non-linear theory of elasticity. L.-M. OGIZ, 1948. 211p. (in Russian).
7. Черных К.Ф., Литвененкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988. Chernykh K.F., Litvenenkova Z.N. The theory of large elastic deformations. L .: Publishing. LSU, 1988. (in Russian).
8. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряжённо-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида// Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т.49. №3. С.10-22. Aghalovian L.A., Baghdasaryan Yu.M., Khachatryan A.M. On determination of stress-stran state of sandwich-type plates with general anisotropy. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1996. Vol. 49. Issue 3, pp. 10-22 (in Russian).

9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2005. 468с. Aghalovian L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-volue problems of asimptotic layered beams, plates and shells. Erevan. 2005. 468p. (in Russian).
10. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С. 3-11. Aghalovian L.A., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed tree dimetion interior problem for anisotropic thermoelastic plate. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 1993. Vol. 59. Issue 3-4, pp. 3-11 (in Russian).
11. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной слоистой пластинки. //Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 08-12 октября, 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. С.229-233. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of mixed tree dimetion interior problem for anisotropic plate. //Proceedings of International Conferens «Topical Problems of Continiuum Mechanics». Tsaghkadzor, Armenia. October 08-12, 2012. Vol.2 pp. 229-233 (in Russian).
12. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение трёхмерной внутренней задачи анизотропной термоупругой пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости//. Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С. 42-49. Khachatryan A.M., Tovmasyan A.B. Asimptotic solution of tree dimetion interior problem of anisotropic termoelasticity plate on basis of geometrical non-linear theory of elasticity. //Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2010. Vol. 66. Issue 1, pp. 42-49 (in Russian).

Сведения об авторах:

Хачатрян Александр Мовсесович –д. ф.-м. н., проф. каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5.
Тел.: (+37497) 20-19-49, (+37499) 21-19-49. **E-mail:** alexkhach49@yandex.ru

Саргсян Нарине Суреновна – преподаватель каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 21-00-78. **E-mail:** narine_sargsyan_2012@mail.ru

Поступила 04.08.2016