ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 70, №1, 2017 Механика

УДК 539.3

МАТРИЦА ЖЁСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

Жамакочян К.А., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, пластинка, изгиб, функционал потенциальной энергии системы, метод конечных элементов
Key words: micropolar, elastic, plate, bend, potential energy functional of the system, finite element method
Բանալի բառեր: միկրոպոլյար, առաձգական, սալ, ծռում, համակարգի պոտենցիալ էներգիայի ֆունկցիոնալ, վերջավոր էլեմենտների մեթոդ

Ժամակոչյան Ք. Ա., Սարգսյան Ս. Հ.
Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալի վերջավոր էլեմենտի կոշտության մատրիցը

Աշխատանքը նվիրված է միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի ծռման դեֆորմացիայի ստատիկական եզրային խնդիրների հաշվարկման վերջավոր էլեմենտների մեթոդի կիրարկման հիմքերի մշակմանը: Տեղափոխությունների, ազատ պտույտների և համակարգի լրիվ պոտենցիալ էներգիայի ֆունկցիոնալի կիրառման հիման վրա մշակվել են չորսանկյունակային վերջավոր էլեմենտներ: Միկրոպոլյար բարակ սալերի կիրառական տեսությանը համապատասխան Լագրանժի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ որոշվում են վերջավոր էլեմենտի կոշտության բնութագրիչները, որի հիման վրա էլ կառուցվում է խնդրի կոշտության մատրիցը, իրականացվում է հանրահաշվական գծային հավասարումների համակարգի ձևավորման գործընթացը: Դիտարկվում է միկրոպոլյար քառակուսի սալի ծռման կոնկրետ խնդիրը, երբ սալը գտնվում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին նորմալ ուժային ազդեցության տակ, իսկ սալի եզրերը հոդակապորեն ամրակցված են: Ստացված թվային արդյունքները համեմատվում են տեսական ճանապարհով ստացված արդյունքների հետ: Թվային արդյունքների անալիզի հիման վրա հաստատվում են միկրոպոլյար նյութի արդյունավետ հատկությունները ամրության և կոշտության իմաստներով՝ համամատած համապատասխան դասական նյութի հետ:

Zhamakochyan K.A., Sargsyan S. H.
Stiffness matrix of the finite element of micropolar elastic thin plate

The present paper is dedicated to the development of the foundations of the application of the finite element method to calculate the boundary value problems of statics of micropolar bending deformation of thin elastic plates. On the basis of application of laws of displacements, free rotations and functional of the total potential energy of the system, effective quadrangular finite elements are developed. With the help of the corresponding Lagrange variation principle of the applied theory of micropolar plates stiffness characteristics of finite element are determined and on the basis of the constructed stiffness matrix procedure of forming the resolving system of linear algebraic equations is performed. Concrete problem of bending of square micropolar elastic plate under a uniformly distributed power load is considered, when the edges of the plate are hinged-supported. The numerical results are compared with the results obtained on the basis of the theoretical study of the problem. The analysis of numerical results sets effective properties of the micropolar material from the point of view of stiffness and strength of the plate compared with the classic material.

Работа посвящена разработке основ применения метода конечных элементов для расчёта краевых задач статики изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин. На основе применения законов перемещений, свободных поворотов и функционала полной потенциальной энергии системы, разработаны эффективные четырёхугольные конечные элементы. С помощью соответствующего вариационного принципа Лагранжа прикладной теории микрополярных пластин определяются жёсткостные характеристики конечного элемента и, на основе построенной матрицы жёсткости, выполняется процедура формирования разрешающей системы алгебраических линейных уравнений. Рассматривается конкретная задача изгиба квадратной микрополярной упругой пластинки под действием равномерно распределённой силовой нормальной нагрузки, когда края пластинки шарнирно-опёрты. Полученные численные результаты сравниваются с результатами, полученными на основе теоретического исследования задачи. Анализ численных результатов устанавливает эффективные свойства микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим с точки зрения жёсткости и прочности пластинки.

Введение. В настоящей работе рассмотрена статическая задача изгиба микрополярной упругой тонкой прямоугольной пластины. Конечно–элементное решение базируется на математической теории микрополярных пластин и оболочек работ [1-3]. Основополагающие матрицы теории метода конечных элементов (МКЭ) получены вариационным способом. Выражение полной потенциальной энергии конечного элемента микрополярной пластины минимизируется по компонентам узловых кинематических параметров, среди которых – углы свободного вращения и поперечные сдвиги. Матрица жёсткости четырёхузлового прямоугольного элемента и вектор эквивалентных узловых сил и моментов имеют 72 порядка. Они предназначены для применения в численных расчётах микрополярных пластин, загруженных разными видами распределённых или сосредоточенных внешних сил и моментов, а также при различных граничных условиях.

Метод конечных элементов решения задач изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок, как статического, так и динамического характера, разработан в работах [4,5].

Отметим, что МКЭ в плоской и пространственной задачах микрополярной теории упругости развиты в работах [6-9]. МКЭ в классической теории изгибной деформации упругих тонких пластин с учётом поперечных сдвигов разработан в работах [10,11].

1. Энергетический функционал для изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин. Вывод разрешающих уравнений расчёта микрополярных упругих тонких пластин с помощью МКЭ вариационным методом предполагает формирование энергетического функционала, под которым подразумевается выражение полной потенциальной энергии Π системы. Это выражение состоит из суммы потенциальной энергии деформации W микрополярной пластинки и потенциала внешних сил и моментов $(-A)$ [3]:

$$\Pi = W - A. \tag{1}$$

В этом выражении

$$W = \frac{1}{2}\iint\limits_{(s)}\big(N_{13}\Gamma_{13} + N_{23}\Gamma_{23} + N_{31}\Gamma_{31} + N_{32}\Gamma_{32} + M_{11}K_{11} + M_{21}K_{21} + M_{22}K_{22} + M_{12}K_{12} +$$

$$L_{11}k_{11} + L_{22}k_{22} + L_{33}k_{33} + L_{21}k_{21} + L_{12}k_{12} + \Lambda_{13}l_{13} + \Lambda_{23}l_{23}\big)ds, \tag{2}$$

где $N_{31}, N_{32}, N_{13}, N_{23}$ – усилия; $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ – моменты (изгибающие и крутящие) от силовых напряжений; $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}, L_{33}$ – моменты (изгибающие и крутящие) от моментных напряжений; $\Lambda_{13}, \Lambda_{23}$ – гипермоменты от моментных напряжений; $\Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$ – сдвиговые деформации. $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}$ – изгибные-крутильные деформации, связанные с силовыми напряжениями; $k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}, k_{33}$ – изгибные-крутильные деформации, связанные с моментными напряжениями; l_{13}, l_{23} – гипер-изгибно-крутильные деформации; A – работа внешних сил и моментов.

Усреднённые усилия, моменты и гипермоменты, деформации, изгиб–кручения связаны физическими соотношениями упругости [1]:

$$N_{13}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}],\ \ N_{23}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{23}+(\mu-\alpha)\Gamma_{32}],$$
$$N_{31}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13}],\ \ N_{32}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{32}+(\mu-\alpha)\Gamma_{23}],$$
$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11}+\nu K_{22}),\ M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22}+\nu K_{11}),$$
$$M_{12}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{12}+(\mu-\alpha)K_{21}\right],\ M_{21}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{21}+(\mu-\alpha)K_{12}\right],$$
$$L_{11}=2h\left[(2\gamma+\beta)k_{11}+\beta(k_{22}+k_{33})\right],\quad L_{22}=2h\left[(2\gamma+\beta)k_{22}+\beta(k_{11}+k_{33})\right],$$
$$L_{33}=2h\left[(2\gamma+\beta)k_{33}+\beta(k_{11}+k_{22})\right],$$
$$L_{12}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}],\ \ L_{21}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}],$$
$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}\right],\ \ \Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}\right], \tag{3}$$
где $\mathrm{E},\nu,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – упругие константы микрополярного материала пластинки $\mu=\dfrac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)}$.

Запишем также геометрические соотношения в микрополярной теории упругих пластин [1]:
$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\ K_{22}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\ K_{12}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\iota,\ K_{21}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\iota,$$
$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Omega_2,\Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,\Gamma_{23}=\frac{\partial w}{\partial x_2}-\Omega_1,\Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1,$$
$$k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1},k_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2},k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},k_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2},l_{13}=\frac{\partial\iota}{\partial x_1},l_{23}=\frac{\partial\iota}{\partial x_2},k_{33}=\iota, \tag{4}$$
где w – прогиб пластинки; ψ_1,ψ_2 – углы поворота нормального к срединной поверхности линейного элемента вокруг осей x_1,x_2; Ω_1,Ω_2 – свободные повороты указанного нормального элемента вокруг соответствующих осей; ι – интенсивность поворота указанного нормального элемента вокруг оси, перпендикулярной к срединной плоскости пластинки.

Работа внешних сил и моментов для микрополярной пластины, нагруженной по верхней лицевой плоскости распределёнными усилиями и моментами, определяется интегралом [3]:
$$A=\iint\limits_{(S)}\left[\left(hp_1\psi_1+hp_2\psi_2+p_3w\right)+\left(m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+\iota hm_3\right)\right]ds+$$
$$+\int\limits_{l_1}\left[\left(M_{11}\psi_1+M_{12}\psi_2+wN_{13}\right)+\left(L_{11}\Omega_1+L_{12}\Omega_2+\iota\Lambda_{13}\right)\right]dl+$$
$$+\int\limits_{l_2}\left[\left(M_{21}\psi_1+M_{22}\psi_2+wN_{23}\right)+\left(L_{21}\Omega_1+L_{22}\Omega_2+\iota\Lambda_{23}\right)\right]dl. \tag{5}$$

Таким образом, выражение полной потенциальной энергии микрополярной пластины имеет вид (1), в котором потенциальная энергия деформации задаётся интегралом (2), а потенциал внешних сил и моментов – интегралом (5) с обратным знаком. В дальнейших выводах сосредоточим внимание на функционале потенциальной энергии деформации (2). Представим его в виде функционала Лагранжа. Для этого, внутренние усилия и моменты в (2) заменим согласно физическим соотношениям упругости (3) микрополярного тела, в которых учтём геометрические соотношения (4). В результате этих преобразований получим:

$$W = \int_0^a \int_0^b W_0 dxdy, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} W_0 = {} & \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{11}^2 + K_{22}^2\right] + \frac{2h^3 E\nu}{3(1-\nu^2)} K_{11}K_{22} + \frac{h^3}{3}(\mu+\alpha)\left[K_{21}^2 + K_{12}^2\right] + \frac{2h^3}{3}(\mu-\alpha)K_{12}K_{21} + \\ & + h(\mu+\alpha)\left[\Gamma_{31}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{23}^2\right] + 2h(\mu-\alpha)\left[\Gamma_{13}\Gamma_{31} + \Gamma_{23}\Gamma_{32}\right] + h\left(2\gamma+\beta\right)\left[k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^3\right] + \\ & + 2h\beta\left[k_{11}k_{22} + k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33}\right] + h\left(\gamma+\varepsilon\right)\left[k_{21}^2 + k_{12}^2\right] + \\ & + 2h\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{12}k_{21} + \frac{h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(l_{13}^2 + l_{23}^2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

В итоге имеем функционал полной потенциальной энергии пластины в виде выражения (1), слагаемыми правой части которого выступают потенциальная энергия деформации (6), (7) и потенциал внешних сил и моментов (5). С помощью этого выражения получим основополагающие матрицы теории МКЭ для микрополярных упругих пластин.

2. Матрица жёсткости конечного элемента микрополярной пластинки. Рассмотрим прямоугольный четырёхузловой конечный элемент микрополярной пластины. Выберем в качестве основных следующие кинематические параметры: перемещение точки срединной плоскости w; углы поворота нормального к срединной плоскости элемента– ψ_1, ψ_2 в плоскостях x_1x_3 и x_2x_3; углы свободного поворота нормального к срединной плоскости элемента– Ω_1, Ω_2 и интенсивность поворота – ι этого элемента вокруг оси x_3. Примем для этих параметров следующие распределения по прямоугольной области срединной плоскости элемента:

$$w(x_1,x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 +$$
$$\alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3,$$

$$\psi_1(x_1,x_2) = \alpha_{13} + \alpha_{14} x_1 + \alpha_{15} x_2 + \alpha_{16} x_1^2 + \alpha_{17} x_2^2 + \alpha_{18} x_1 x_2 + \alpha_{19} x_1^2 x_2 + \alpha_{20} x_1 x_2^2 +$$
$$+ \alpha_{21} x_1^3 + \alpha_{22} x_2^3 + \alpha_{23} x_1^3 x_2 + \alpha_{24} x_1 x_2^3,$$

$$\psi_2(x_1,x_2) = \alpha_{25} + \alpha_{26} x_1 + \alpha_{27} x_2 + \alpha_{28} x_1^2 + \alpha_{29} x_2^2 + \alpha_{30} x_1 x_2 + \alpha_{31} x_1^2 x_2 + \alpha_{32} x_1 x_2^2 +$$
$$+ \alpha_{33} x_1^3 + \alpha_{34} x_2^3 + \alpha_{35} x_1^3 x_2 + \alpha_{36} x_1 x_2^3,$$

$$\Omega_1(x_1,x_2) = \alpha_{37} + \alpha_{38} x_1 + \alpha_{39} x_2 + \alpha_{40} x_1^2 + \alpha_{41} x_2^2 + \alpha_{42} x_1 x_2 + \alpha_{43} x_1^2 x_2 + \alpha_{44} x_1 x_2^2 +$$
$$+ \alpha_{45} x_1^3 + \alpha_{46} x_2^3 + \alpha_{47} x_1^3 x_2 + \alpha_{48} x_1 x_2^3,$$

$$\Omega_2(x_1,x_2)=\alpha_{49}+\alpha_{50}x_1+\alpha_{51}x_2+\alpha_{52}x_1^{\;2}+\alpha_{53}x_2^{\;2}+\alpha_{54}x_1x_2+\alpha_{55}x_1^{\;2}x_2+\alpha_{56}x_1x_2^{\;2}+$$
$$+\alpha_{57}x_1^{\;3}+\alpha_{58}x_2^{\;3}+\alpha_{59}x_1^{\;3}x_2+\alpha_{60}x_1x_2^{\;3},$$
$$\iota(x_1,x_2)=\alpha_{61}+\alpha_{62}x_1+\alpha_{63}x_2+\alpha_{64}x_1^{\;2}+\alpha_{65}x_2^{\;2}+\alpha_{66}x_1x_2+\alpha_{67}x_1^{\;2}x_2+\alpha_{68}x_1x_2^{\;2}+$$
$$\alpha_{69}x_1^{\;3}+\alpha_{70}x_2^{\;3}+\alpha_{71}x_1^{\;3}x_2+\alpha_{72}x_1x_2^{\;3}. \tag{8}$$

Основные кинематические параметры запишем в виде вектора:

$$\boldsymbol{\delta}=\left\{\mathbf{w},\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x_1}},\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x_2}},\boldsymbol{\psi}_1,\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_1}{\partial\mathbf{x_1}},\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_1}{\partial\mathbf{x_2}},\boldsymbol{\psi}_2,\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_2}{\partial\mathbf{x_1}},\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_2}{\partial\mathbf{x_2}},\boldsymbol{\Omega}_1,\right.$$
$$\left.\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_1}{\partial\mathbf{x_1}},\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_1}{\partial\mathbf{x_2}},\boldsymbol{\Omega}_2,\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_2}{\partial\mathbf{x_1}},\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_2}{\partial\mathbf{x_2}},\boldsymbol{\iota},\frac{\partial\boldsymbol{\iota}}{\partial\mathbf{x_1}},\frac{\partial\boldsymbol{\iota}}{\partial\mathbf{x_2}}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

тогда систему уравнений (8) можем представить в матричном виде:

$$\boldsymbol{\delta}=\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор постоянных в формулах (8):

$$\boldsymbol{\alpha}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,...,\boldsymbol{\alpha}_i,...\boldsymbol{\alpha}_{72}\}^{\mathrm{T}},$$

$\mathbf{S}$ – матрица размерностью 18×72, которую в данном случае удобно представить в блочном виде:

$$\mathbf{S}=[\mathbf{S_1},\mathbf{S_2},\mathbf{S_3},\mathbf{S_4}].$$

Здесь $\mathbf{S_1},\mathbf{S_2},\mathbf{S_3},\mathbf{S_4}$ – подматрицы размером 18×18 со структурой с компонентами:

$$\mathbf{S}_1=\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3 & x_2^3 & x_1^3x_2 & x_1x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2x_2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 0 & 3x_2^2 & x_1^3 & 3x_1x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$
S_2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3 & x_2^3 & x_1^3x_2 & x_1x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2x_1x_2 & x_2^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2x_2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_1^2 & 2x_1x_2 & 0 & 3x_2^2 & x_1^3 & 3x_1x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3 & x_2^3 & x_1^3x_2 & x_1x_2^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2x_2 & x_2^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 0 & 3x_2^2 & x_1^3 & 3x_1x_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
S_3 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3 & x_2^3 & x_1^3x_2 & x_1x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2x_2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 0 & 3x_2^2 & x_1^3 & 3x_1x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^2 & \mathbf{x}_1^3 & \mathbf{x}_2^3 & \mathbf{x}_1^3\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^3 &0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2^2 & 3\mathbf{x}_1^2 & 0 & 3\mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2^3 &0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\mathbf{x}_1^2 & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 0 & 3\mathbf{x}_2^2 & \mathbf{x}_1^3 & 3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^2 &0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&\mathbf{x}_1&\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_1^2&\mathbf{x}_2^2&\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^2&\mathbf{x}_1^3&\mathbf{x}_2^3&\mathbf{x}_1^3\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^3\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&2\mathbf{x}_1&0&\mathbf{x}_2&2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_2^2&3\mathbf{x}_1^2&0&3\mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_2^3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&2\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_1&\mathbf{x}_1^2&2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2&0&3\mathbf{x}_2^2&\mathbf{x}_1^3&3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^2
\end{pmatrix}.
$$

Вектор узловых кинематических параметров $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}$ однозначно определяет напряжённо-деформированное состояние (НДС) внутри конкретного элемента. В случае четырёхузлового элемента пластины, в общем виде, этот вектор имеет следующее представление:

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e} = \{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3, \boldsymbol{\delta}_4\}^\mathbf{T}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i}$ $(i = 1,2,3,4)$ – вектор неизвестных i -го узла,

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{i} = \left\{ \mathbf{w}_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_\mathbf{i}, \boldsymbol{\psi}_{1\mathbf{i}}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_\mathbf{i}, \boldsymbol{\psi}_{2\mathbf{i}}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_\mathbf{i}, \right.$$

$$\left. \boldsymbol{\Omega}_{1\mathbf{i}}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_\mathbf{i}, \boldsymbol{\Omega}_{2\mathbf{i}}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_2}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_{\mathbf{i}.}, \boldsymbol{\iota}_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\iota}}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_\mathbf{i}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\iota}}{\partial \mathbf{x}_2}\right)_\mathbf{i} \right\}. \tag{12}$$

Выразим вектор основных кинематических переменных (9) в произвольной точке внутри конечного элемента пластины через вектор узловых параметров. Для этого следует записать значения функций (8) для узловых точек. Размеры прямоугольного элемента пластины обозначим a (размер вдоль оси x_1) и b (размер вдаль оси x_2) и сформируем векторы $\boldsymbol{\delta}_k \, (k = 1,2,3,4)$ (9) для четырёх точек с координатами $(0,0),(a,0),(a,b)$ и $(0,b)$. В едином матричном соотношении это будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e} = \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}, \tag{13}$$

где $\mathbf{T}$ – квадратная матрица размером 72×72, сформированная из матрицы $\mathbf{S}$ при тех значениях x_1 и x_2, которые соответствуют узловым точкам:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}) \end{bmatrix}.$$

Подставим вектор $\boldsymbol{\alpha}$, определённый из (13) в (10) и, после этого, получим соотношения для основных кинематических функций, выраженных через узловые неизвестные:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{e}}, \qquad (14)$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1}$$

Здесь матрица $\mathbf{P}$ размерностью 18×72 имеет следующую блочную структуру:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4],$$

где $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ – подматрицы размером 18×18 со структурой и компонентами:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix}
p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{64} & p_{65} & p_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{77} & p_{78} & p_{79} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{87} & p_{88} & p_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{97} & p_{98} & p_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{10,10} & p_{10,11} & p_{10,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{11,10} & p_{11,11} & p_{11,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{12,10} & p_{12,11} & p_{12,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{13,13} & p_{13,14} & p_{13,15} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14,13} & p_{14,14} & p_{14,15} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{15,13} & p_{15,14} & p_{15,15} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{16,16} & p_{16,17} & p_{16,18} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{17,16} & p_{17,17} & p_{17,18} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{18,16} & p_{18,17} & p_{18,18}
\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix}
p_{1,19} & p_{1,20} & p_{1,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{2,19} & p_{2,20} & p_{2,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{3,19} & p_{3,20} & p_{3,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{4,22} & p_{4,23} & p_{4,24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{5,22} & p_{5,23} & p_{5,24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{6,22} & p_{6,23} & p_{6,24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{7,25} & p_{7,26} & p_{7,27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{8,25} & p_{8,26} & p_{8,27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{9,25} & p_{9,26} & p_{9,27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{10,28} & p_{10,29} & p_{10,30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{11,28} & p_{11,29} & p_{11,30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{12,28} & p_{12,29} & p_{12,30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{13,31} & p_{13,32} & p_{13,33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14,31} & p_{14,32} & p_{14,33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{15,31} & p_{15,32} & p_{15,33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{16,34} & p_{16,35} & p_{16,36} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{17,34} & p_{17,35} & p_{17,36} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{18,34} & p_{18,35} & p_{18,36}
\end{pmatrix}$$

$$
\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix}
p_{1,37} & p_{1,38} & p_{1,39} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{2,37} & p_{2,38} & p_{2,39} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{3,37} & p_{3,38} & p_{3,39} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{4,40} & p_{4,41} & p_{4,42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{5,40} & p_{5,41} & p_{5,42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{6,40} & p_{6,41} & p_{6,42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{7,43} & p_{7,44} & p_{7,45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{8,43} & p_{8,44} & p_{8,45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{9,43} & p_{9,44} & p_{9,45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{10,46} & p_{10,47} & p_{10,48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{11,46} & p_{11,47} & p_{11,48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{12,46} & p_{12,47} & p_{12,48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{13,49} & p_{13,50} & p_{13,51} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14,49} & p_{14,50} & p_{14,51} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{15,49} & p_{15,50} & p_{15,51} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{16,52} & p_{16,53} & p_{16,54} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{17,52} & p_{17,53} & p_{17,54} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{18,52} & p_{18,53} & p_{18,54}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix}
p_{1,55} & p_{1,56} & p_{1,57} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{2,55} & p_{2,56} & p_{2,57} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{3,55} & p_{3,56} & p_{3,57} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{4,58} & p_{4,59} & p_{4,60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{5,58} & p_{5,59} & p_{5,60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{6,58} & p_{6,59} & p_{6,60} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{7,61} & p_{7,62} & p_{7,63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{8,61} & p_{8,62} & p_{8,63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{9,61} & p_{9,62} & p_{9,63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{10,64} & p_{10,65} & p_{10,66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{11,64} & p_{11,65} & p_{11,66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{12,64} & p_{12,65} & p_{12,66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{13,67} & p_{13,68} & p_{13,69} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14,67} & p_{14,68} & p_{14,69} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{15,67} & p_{15,68} & p_{15,69} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{16,70} & p_{16,71} & p_{16,72} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{17,70} & p_{17,71} & p_{17,72} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{18,70} & p_{18,71} & p_{18,72}
\end{pmatrix},
$$

где

$$
p_{11} = p_{44} = p_{77} = p_{10,10} = p_{13,13} = p_{16,16} = 1 - \frac{3}{a^2} x_1^{\,2} + \frac{2}{a^3} x_1^{\,3} - \frac{x_1 x_2}{ab} + \frac{3 x_1^{\,2} x_2}{a^2 b} -
$$

$$
- \frac{2 x_1^{\,3} x_2}{a^3 b} - \frac{3 x_2^{\,2}}{b^2} + \frac{3 x_1 x_2^{\,2}}{ab^2} + \frac{2 x_2^{\,3}}{b^3} - \frac{2 x_1 x_2^{\,3}}{ab^3},
$$

$$
p_{12} = p_{45} = p_{78} = p_{10,11} = p_{13,14} = p_{16,17} = x_1 - \frac{2}{a} x_1^{\,2} + \frac{1}{a^2} x_1^{\,3} - \frac{x_1 x_2}{b} + \frac{2 x_1^{\,2} x_2}{ab} - \frac{x_1^{\,3} x_2}{a^2 b},
$$

$$
p_{13} = p_{46} = p_{79} = p_{10,12} = p_{13,15} = p_{16,18} = x_2 - \frac{x_1 x_2}{a} - \frac{2}{b} x_2^{\,2} + \frac{2 x_1 x_2^{\,2}}{ab} + \frac{x_2^{\,3}}{b^2} - \frac{x_1 x_2^{\,3}}{ab^2},
$$

$$p_{1,19}=p_{4,22}=p_{7,25}=p_{10,28}=p_{13,31}=p_{16,34}=\frac{3}{a^2}x_1^{\,2}-\frac{2}{a^3}x_1^{\,3}+\frac{x_1x_2}{ab}-\frac{3x_1^{\,2}x_2}{a^2b}+$$
$$+\frac{2x_1^{\,3}x_2}{a^3b}-\frac{3x_1x_2^{\,2}}{ab^2}+\frac{2x_1x_2^{\,3}}{ab^3},$$
$$p_{1,20}=p_{4,23}=p_{7,26}=p_{10,29}=p_{13,32}=p_{16,35}=-\frac{x_1^{\,2}}{a}+\frac{x_1^{\,3}}{a^2}+\frac{x_1^{\,2}x_2}{ab}-\frac{x_1^{\,3}x_2}{a^2b},$$
$$p_{1,21}=p_{4,24}=p_{7,27}=p_{10,30}=p_{13,33}=p_{16,36}=\frac{x_1x_2}{a}-\frac{2x_1x_2^{\,2}}{ab}+\frac{x_1x_2^{\,3}}{ab^2},$$
$$p_{1,37}=p_{4,40}=p_{7,43}=p_{10,46}=p_{13,49}=p_{16,52}=-\frac{x_1x_2}{ab}+\frac{3x_1^{\,2}x_2}{a^2b}-\frac{2x_1^{\,3}x_2}{a^3b}+\frac{3x_1x_2^{\,2}}{ab^2}-\frac{2x_1x_2^{\,3}}{ab^3},$$
$$p_{1,38}=p_{4,41}=p_{7,44}=p_{10,47}=p_{13,50}=p_{16,53}=-\frac{x_1^{\,2}x_2}{ab}+\frac{x_1^{\,3}x_2}{a^2b},$$
$$p_{1,39}=p_{4,42}=p_{7,45}=p_{10,48}=p_{13,51}=p_{16,54}=-\frac{x_1x_2^{\,2}}{ab}+\frac{x_1x_2^{\,3}}{ab^2},$$
$$p_{1,55}=p_{4,58}=p_{7,61}=p_{10,64}=p_{13,67}=p_{16,70}=\frac{x_1x_2}{ab}-\frac{3x_1^{\,2}x_2}{a^2b}+\frac{2x_1^{\,3}x_2}{a^3b}+\frac{3x_2^{\,2}}{b^2}-$$
$$-\frac{3x_1x_2^{\,2}}{ab^2}-\frac{3x_2^{\,3}}{b^3}+\frac{2x_1x_2^{\,3}}{ab^3},$$
$$p_{1,56}=p_{4,59}=p_{7,62}=p_{10,65}=p_{13,68}=p_{16,71}=\frac{x_1x_2}{b}-\frac{2x_1^{\,2}x_2}{ab}+\frac{x_1^{\,3}x_2}{a^2b},$$
$$p_{1,57}=p_{4,60}=p_{7,63}=p_{10,66}=p_{13,69}=p_{16,72}=-\frac{x_2^{\,2}}{b}+\frac{x_1x_2^{\,2}}{ab}+\frac{x_2^{\,3}}{b^2}-\frac{x_1x_2^{\,3}}{ab^2},$$
$$p_{21}=p_{54}=p_{87}=p_{11,10}=p_{14,13}=p_{17,16}=-\frac{6x_1}{a^2}+\frac{6x_1^{\,2}}{a^3}-\frac{x_2}{ab}+\frac{6x_1x_2}{a^2b}-\frac{6x_1^{\,2}x_2}{a^3b}+$$
$$+\frac{3x_2^{\,2}}{ab^2}-\frac{2x_2^{\,3}}{ab^3},$$
$$p_{22}=p_{55}=p_{88}=p_{11,11}=p_{14,14}=p_{17,17}=1-\frac{4x_1}{a}+\frac{3x_1^2}{a^2}-\frac{x_2}{b}+\frac{4x_1x_2}{ab}-\frac{3x_1^2x_2}{a^2b},$$
$$p_{23}=p_{56}=p_{89}=p_{11,12}=p_{14,15}=p_{17,18}=-\frac{x_2}{a}+\frac{2x_2^{\,2}}{ab}-\frac{x_2^3}{ab^2},$$
$$p_{2,19}=p_{5,22}=p_{8,25}=p_{11,28}=p_{14,31}=p_{17,34}=\frac{6x_1}{a^2}-\frac{6x_1^{\,2}}{a^3}+\frac{x_2}{ab}-\frac{6x_1x_2}{a^2b}+\frac{6x_1^{\,2}x_2}{a^3b}-$$
$$-\frac{3x_2^{\,2}}{ab^2}+\frac{2x_2^{\,3}}{ab^3},$$
$$p_{2,20}=p_{5,23}=p_{8,26}=p_{11,29}=p_{14,32}=p_{17,35}=-\frac{2x_1}{a}+\frac{3x_1^2}{a^2}+\frac{2x_1x_2}{ab}-\frac{3x_1^2x_2}{a^2b},$$
$$p_{2,21}=p_{5,24}=p_{8,27}=p_{11,30}=p_{14,33}=p_{17,36}=\frac{x_2}{a}-\frac{2x_2^{\,2}}{ab}+\frac{x_2^3}{ab^2},$$
$$p_{2,37}=p_{5,40}=p_{8,43}=p_{11,46}=p_{14,49}=p_{17,52}=-\frac{x_2}{ab}+\frac{6x_1x_2}{a^2b}-\frac{6x_1^{\,2}x_2}{a^3b}+\frac{3x_2^{\,2}}{ab^2}-\frac{2x_2^{\,3}}{ab^3},$$

$$p_{2,38} = p_{5,41} = p_{8,44} = p_{11,47} = p_{14,50} = p_{17,53} = -\frac{2x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1^2x_2}{a^2b},$$

$$p_{2,39} = p_{5,42} = p_{8,45} = p_{11,48} = p_{14,51} = p_{17,54} = -\frac{x_2^{\,2}}{ab} + \frac{x_2^{\,3}}{ab^2},$$

$$p_{2,55} = p_{5,58} = p_{8,61} = p_{11,64} = p_{14,67} = p_{17,70} = \frac{x_2}{ab} - \frac{6x_1x_2}{a^2b} + \frac{6x_1^{\,2}x_2}{a^3b} - \frac{3x_2^{\,2}}{ab^2} + \frac{2x_2^{\,3}}{ab^3},$$

$$p_{2,56} = p_{5,59} = p_{8,62} = p_{11,65} = p_{14,68} = p_{17,71} = \frac{x_2}{b} - \frac{4x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1^2x_2}{a^2b},$$

$$p_{2,57} = p_{5,60} = p_{8,63} = p_{11,66} = p_{14,69} = p_{17,72} = \frac{x_2^{\,2}}{ab} - \frac{x_2^{\,3}}{ab^2},$$

$$p_{31} = p_{64} = p_{97} = p_{12,10} = p_{15,13} = p_{18,16} = -\frac{x_1}{ab} + \frac{3x_1^{\,2}}{a^2b} - \frac{2x_1^{\,3}}{a^3b} - \frac{6x_2}{b^2} + \frac{6x_1x_2}{ab^2} + \frac{6x_2}{b^3} - \frac{6x_1x_2^{\,2}}{ab^3},$$

$$p_{32} = p_{65} = p_{98} = p_{12,11} = p_{15,14} = p_{18,17} = -\frac{x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{ab} - \frac{x_1^3}{a^2b},$$

$$p_{33} = p_{66} = p_{99} = p_{12,12} = p_{15,15} = p_{18,18} = 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{4x_2}{b} + \frac{4x_1x_2}{ab} + \frac{3x_2^{\,2}}{b^2} - \frac{3x_1x_2^{\,2}}{ab^2},$$

$$p_{3,19} = p_{6,22} = p_{9,25} = p_{12,28} = p_{15,31} = p_{18,34} = \frac{x_1}{ab} - \frac{3x_1^{\,2}}{a^2b} + \frac{2x_1^{\,3}}{a^3b} - \frac{6x_1x_2}{ab^2} + \frac{6x_1x_2^{\,2}}{ab^3},$$

$$p_{3,20} = p_{6,23} = p_{9,26} = p_{12,29} = p_{15,32} = p_{18,35} = \frac{x_1^2}{ab} - \frac{x_1^3}{a^2b},$$

$$p_{3,21} = p_{6,24} = p_{9,27} = p_{12,30} = p_{15,33} = p_{18,36} = \frac{x_1}{a} - \frac{4x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1x_2^{\,2}}{ab^2},$$

$$p_{3,37} = p_{6,40} = p_{9,43} = p_{12,46} = p_{15,49} = p_{18,52} = -\frac{x_1}{ab} + \frac{3x_1^{\,2}}{a^2b} - \frac{2x_1^{\,3}}{a^3b} + \frac{6x_1x_2}{ab^2} - \frac{6x_1x_2^{\,2}}{ab^3},$$

$$p_{3,38} = p_{6,41} = p_{9,44} = p_{12,47} = p_{15,50} = p_{18,53} = -\frac{x_1^{\,2}}{ab} + \frac{x_1^3}{a^2b},$$

$$p_{3,39} = p_{6,42} = p_{9,45} = p_{12,48} = p_{15,51} = p_{18,54} = -\frac{2x_1x_2}{ab} + \frac{3x_1x_2^{\,2}}{ab^2},$$

$$p_{3,55} = p_{6,58} = p_{9,61} = p_{12,64} = p_{15,67} = p_{18,70} = \frac{x_1}{ab} - \frac{3x_1^{\,2}}{a^2b} + \frac{2x_1^{\,3}}{a^3b} + \frac{6x_2}{b^2} - \frac{6x_1x_2}{ab^2} -$$

$$-\frac{6x_2}{b^3} + \frac{6x_1x_2^{\,2}}{ab^3},$$

$$p_{3,56} = p_{6,59} = p_{9,62} = p_{12,65} = p_{15,68} = p_{18,71} = \frac{x_1}{b} - \frac{2x_1^2}{ab} + \frac{x_1^3}{a^2b},$$

$$p_{3,57} = p_{6,60} = p_{9,63} = p_{12,66} = p_{15,69} = p_{18,72} = -\frac{2x_2}{b} + \frac{2x_1x_2}{ab} + \frac{3x_2^{\,2}}{b^2} - \frac{3x_1x_2^{\,2}}{ab^2}.$$

С учётом (14) запишем соотношения для основных кинематических переменных:

$$w = p_{11} w_1 + p_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_1 + p_{13}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_1 + p_{1,19} w_2 + p_{1,20}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_2 + p_{1,21}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{1,37} w_3 + p_{1,38}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_3 + p_{1,39}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_3 + p_{1,55} w_4 + p_{1,56}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_4 + p_{1,57}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = p_{21} w_1 + p_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_1 + p_{23}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_1 + p_{2,19} w_2 + p_{2,20}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_2 + p_{2,21}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{2,37} w_3 + p_{2,38}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_3 + p_{2,39}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_3 + p_{2,55} w_4 + p_{2,56}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_4 + p_{2,57}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = p_{31} w_1 + p_{32}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_1 + p_{33}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_1 + p_{3,19} w_2 + p_{3,20}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_2 + p_{3,21}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{3,37} w_3 + p_{3,38}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_3 + p_{3,39}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_3 + p_{3,55} w_4 + p_{3,56}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_4 + p_{3,57}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\Psi_1 = p_{44}\Psi_{11} + p_{45}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{46}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{4,22}\Psi_{12} + p_{4,23}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_2 + p_{4,24}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{4,40}\Psi_{13} + p_{4,41}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{4,42}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{4,58}\Psi_{14} + p_{4,59}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{4,60}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = p_{54}\Psi_{11} + p_{55}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{56}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{5,22}\Psi_{12} + p_{5,23}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_2 + p_{5,24}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{5,40}\Psi_{13} + p_{5,41}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{5,42}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{5,58}\Psi_{14} + p_{5,59}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{5,60}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} = p_{64}\Psi_{11} + p_{65}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{66}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{6,22}\Psi_{12} + p_{6,23}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_2 + p_{6,24}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{6,40}\Psi_{13} + p_{6,41}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{6,42}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{6,58}\Psi_{14} + p_{6,59}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{6,60}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\Psi_2 = p_{77}\Psi_{21} + p_{78}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_1 + p_{79}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_1 + p_{7,25}\Psi_{22} + p_{7,26}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_2 + p_{7,27}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{7,43}\Psi_{23} + p_{7,44}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_3 + p_{7,45}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_3 + p_{7,61}\Psi_{24} + p_{7,62}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_4 + p_{7,63}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} = p_{87}\Psi_{21} + p_{88}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_1 + p_{89}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_1 + p_{8,25}\Psi_{22} + p_{8,26}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_2 + p_{8,27}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{8,43}\Psi_{23} + p_{8,44}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_3 + p_{8,45}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_3 + p_{8,61}\Psi_{24} + p_{8,62}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\right)_4 + p_{8,63}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = p_{97}\psi_{21} + p_{98}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right)_1 + p_{99}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right)_1 + p_{9,25}\psi_{22} + p_{9,26}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right)_2 + p_{9,27}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{9,43}\psi_{23} + p_{9,44}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right)_3 + p_{9,45}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right)_3 + p_{9,61}\psi_{24} + p_{9,62}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right)_4 + p_{9,63}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\Omega_1 = p_{10,10}\Omega_{11} + p_{10,11}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{10,12}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{10,28}\Omega_{12} + p_{10,29}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_2 + p_{10,30}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_2 +$$

$$+ p_{10,46}\Omega_{13} + p_{10,47}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{10,48}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{10,64}\Omega_{14} + p_{10,65}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{10,66}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} = p_{11,10}\Omega_{11} + p_{11,11}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{11,12}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{11,28}\Omega_{12} + p_{11,29}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_2 +$$

$$+ p_{11,30}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_2 + p_{11,46}\Omega_{13} + p_{11,47}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{11,48}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{11,64}\Omega_{14} +$$

$$+ p_{11,65}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{11,66}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} = p_{12,10}\Omega_{11} + p_{12,11}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_1 + p_{12,12}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_1 + p_{12,28}\Omega_{12} + p_{12,29}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_2 +$$

$$+ p_{12,30}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_2 + p_{12,46}\Omega_{13} + p_{12,47}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_3 + p_{12,48}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_3 + p_{12,64}\Omega_{14} +$$

$$+ p_{12,65}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right)_4 + p_{12,66}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\Omega_2 = p_{13,13}\Omega_{21} + p_{13,14}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)_1 + p_{13,15}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)_1 + p_{13,31}\Omega_{22} + p_{13,32}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)_2 +$$

$$+ p_{13,33}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)_2 + p_{13,49}\Omega_{23} + p_{13,50}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)_3 + p_{13,51}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)_3 + p_{13,67}\Omega_{24} +$$

$$+ p_{13,68}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)_4 + p_{13,69}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = p_{14,13}\Omega_{21} + p_{14,14}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)_1 + p_{14,15}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)_1 + p_{14,31}\Omega_{22} + p_{14,32}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)_2 +$$

$$+ p_{14,33}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)_2 + p_{14,49}\Omega_{23} + p_{14,50}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)_3 + p_{14,51}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)_3 + p_{14,67}\Omega_{24} +$$

$$+ p_{14,68}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}\right)_4 + p_{14,69}\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}=p_{15,13}\Omega_{21}+p_{15,14}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\right)_1+p_{15,15}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right)_1+p_{15,31}\Omega_{22}+p_{15,32}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\right)_2+$$

$$+p_{15,33}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right)_2+p_{15,49}\Omega_{23}+p_{15,50}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\right)_3+p_{15,51}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right)_3+p_{15,67}\Omega_{24}+$$

$$+p_{15,68}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\right)_4+p_{15,69}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\iota=p_{16,16}\iota_1+p_{16,17}\left(\frac{\partial\iota_1}{\partial x_1}\right)_1+p_{16,18}\left(\frac{\partial\iota_1}{\partial x_2}\right)_1+p_{16,34}\iota_2+p_{16,35}\left(\frac{\partial\iota_2}{\partial x_1}\right)_2+p_{16,36}\left(\frac{\partial\iota_2}{\partial x_2}\right)_2+$$

$$+p_{16,52}\iota_3+p_{16,53}\left(\frac{\partial\iota_3}{\partial x_1}\right)_3+p_{16,54}\left(\frac{\partial\iota_3}{\partial x_2}\right)_3+p_{16,70}\iota_4+p_{16,71}\left(\frac{\partial\iota_4}{\partial x_1}\right)_4+p_{16,72}\left(\frac{\partial\iota_4}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial\iota}{\partial x_1}=p_{17,16}\iota_1+p_{17,17}\left(\frac{\partial\iota_1}{\partial x_1}\right)_1+p_{17,18}\left(\frac{\partial\iota_1}{\partial x_2}\right)_1+p_{17,34}\iota_2+p_{17,35}\left(\frac{\partial\iota_2}{\partial x_1}\right)_2+p_{17,36}\left(\frac{\partial\iota_2}{\partial x_2}\right)_2+$$

$$+p_{17,52}\iota_3+p_{17,53}\left(\frac{\partial\iota_3}{\partial x_1}\right)_3+p_{17,54}\left(\frac{\partial\iota_3}{\partial x_2}\right)_3+p_{17,70}\iota_4+p_{17,71}\left(\frac{\partial\iota_4}{\partial x_1}\right)_4+p_{17,72}\left(\frac{\partial\iota_4}{\partial x_2}\right)_4,$$

$$\frac{\partial\iota}{\partial x_2}=p_{18,16}\iota_1+p_{18,17}\left(\frac{\partial\iota_1}{\partial x_1}\right)_1+p_{18,18}\left(\frac{\partial\iota_1}{\partial x_2}\right)_1+p_{18,34}\iota_2+p_{18,35}\left(\frac{\partial\iota_2}{\partial x_1}\right)_2+p_{18,36}\left(\frac{\partial\iota_2}{\partial x_2}\right)_2+$$

$$+p_{18,52}\iota_3+p_{18,53}\left(\frac{\partial\iota_3}{\partial x_1}\right)_3+p_{18,54}\left(\frac{\partial\iota_3}{\partial x_2}\right)_3+p_{18,70}\iota_4+p_{18,71}\left(\frac{\partial\iota_4}{\partial x_1}\right)_4+p_{18,72}\left(\frac{\partial\iota_4}{\partial x_2}\right)_4. \qquad (15)$$

Подставим разложения (15) в выражение для W_0, а затем полученный результат проинтегрируем по формуле (6).

В итоге функционал потенциальной энергии деформации (6) для одного конечного элемента пластины превратится в функцию, зависящую от узловых кинематических переменных:

$$W=W\left\{w_i,\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_i,\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_i,\psi_{1i},\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right)_i,\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)_i,\psi_{2i},\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)_i,\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)_i,\right.$$

$$\left.\Omega_{1i},\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}\right)_i,\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right)_i,\Omega_{2i},\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\right)_i,\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right)_{i.},\iota_i,\left(\frac{\partial\iota}{\partial x_1}\right)_i,\left(\frac{\partial\iota}{\partial x_2}\right)_i\right\},\quad i=1,2,3,4. \qquad (16)$$

В случае изгиба пластины, например, равномерно-распределённой по верхней плоскости нормальной нагрузкой, работа внешних сил, приходящихся на один конечный элемент, будет представлен интегралом:

$$A=p_3\int_0^a\int_0^b w\,dx\,dy.$$

Подставим сюда выражение для функции перемещений и поворотов из (15). В результате, после интегрирования работа внешних сил предстанет функцией, зависящей от узловых значений прогиба и углов изгиба обоих направлений (по осям x_1 и x_2):

$$A = A\left(w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_i \right), i = 1,2,3,4. \tag{17}$$

Теперь, требуя условия стационарности полной потенциальной энергии конечного элемента пластины, которая представляет собой сумму выражений (16) и (17), по компонентам вектора узловых кинематических параметров (11), (12), получим систему алгебраических уравнений равновесия:

$$\mathbf{K_e \delta_e = F_e},$$

где $\mathbf{K_e}$ – матрица жёсткости конечного элемента пластины; $\mathbf{F_e}$ – вектор эквивалентных узловых сил.

В общем случае матрица жёсткости конечного элемента пластины $\mathbf{K_e}$ размерностью 72×72 имеет полное заполнение, т.е. в ней мало нулевых элементов. В рамках данной работы нет технической возможности привести выражения для всех компонентов матрицы жёсткости элемента пластины, даже с учётом симметричности её структуры. Поэтому, как принято, представим соотношения для компонентов главной диагонали для элементов матрицы жёсткости конечного квадратного элемента:

$$k_{11} = k_{19,19} = k_{37,37} = k_{55,55} = \frac{184}{105} h(\alpha + \mu),$$

$$k_{22} = k_{33} = k_{20,20} = k_{21,21} = k_{38,38} = k_{39,39} = k_{56,56} = k_{57,57} = \frac{34}{315} a^2 h(\alpha + \mu),$$

$$k_{44} = k_{77} = k_{22,22} = k_{25,25} = k_{40,40} = k_{43,43} = k_{58,58} = k_{61,61} =$$

$$= \frac{h\left(1727a^2(\alpha + \mu) + 1840h^2\left(\alpha + \mu - \frac{E}{\nu^2 - 1}\right)\right)}{6300},$$

$$k_{55} = k_{99} = k_{23,23} = k_{27,27} = k_{41,41} = k_{45,45} = k_{59,59} = k_{63,63} =$$

$$= \frac{2}{945} a^2 h\left(3(a^2 + h^2)(\alpha + \mu) - \frac{14h^2 E}{\nu^2 - 1}\right),$$

$$k_{66} = k_{88} = k_{24,24} = k_{26,26} = k_{42,42} = k_{44,44} = k_{60,60} = k_{62,62} =$$

$$= \frac{2}{945} a^2 h\left(3a^2(\alpha + \mu) + h^2\left(14(\alpha + \mu) - \frac{3E}{\nu^2 - 1}\right)\right),$$

$$k_{10,10} = k_{13,13} = k_{28,28} = k_{31,31} = k_{46,46} = k_{49,49} = k_{64,64} = k_{67,67} =$$

$$= \frac{h\left(1727a^2\alpha + 1380(\beta + 3\gamma + \varepsilon)\right)}{1575},$$

$$k_{11,11} = k_{15,15} = k_{29,29} = k_{33,33} = k_{47,47} = k_{51,51} = k_{65,65} = k_{69,69} =$$

$$= \frac{2}{315} a^2 h(4a^2\alpha + 14\beta + 31\gamma + 3\varepsilon),$$

$$k_{12,12}=k_{14,14}=k_{30,30}=k_{32,32}=k_{48,48}=k_{50,50}=k_{66,66}=k_{68,68}=$$
$$=\frac{2}{315}a^2h(4a^2\alpha+3\beta+20\gamma+14\varepsilon),$$
$$k_{16,16}=k_{34,34}=k_{52,52}=k_{70,70}=\frac{h(44160h^2\gamma\varepsilon+1727a^2(4h^2\alpha+3\beta+6\gamma)(\gamma+\varepsilon))}{18900(\gamma+\varepsilon)},$$
$$k_{17,17}=k_{18,18}=k_{35,35}=k_{36,36}=k_{53,53}=k_{54,54}=k_{71,71}=k_{72,72}=$$
$$=\frac{2a^2h(68h^2\gamma\varepsilon+a^2(4h^2\alpha+3\beta+6\gamma)(\gamma+\varepsilon))}{945(\gamma+\varepsilon)}.$$

Здесь, для сравнения, необходимо также привести аппроксимацию распределения основных кинематических по прямоугольнику базовой плоскости элементов полиномами в случае классической модели пластинки с учётом поперечных сдвигов [11]:

$$\begin{gathered}
w(x_1,x_2)=\alpha_1+\alpha_2x_1+\alpha_3x_2+\alpha_4x_1^2+\alpha_5x_2^2+\alpha_6x_1x_2+\alpha_7x_1^2x_2+\alpha_8x_1x_2^2+\alpha_9x_1^3+\\
+\alpha_{10}x_2^3+\alpha_{11}x_1^3x_2+\alpha_{12}x_1x_2^3,\\
\psi_1(x_1,x_2)=\alpha_{13}+\alpha_{14}x_1+\alpha_{15}x_2+\alpha_{16}x_1^2+\alpha_{17}x_2^2+\alpha_{18}x_1x_2+\alpha_{19}x_1^2x_2+\alpha_{20}x_1x_2^2+\\
+\alpha_{21}x_1^3+\alpha_{22}x_2^3+\alpha_{23}x_1^3x_2+\alpha_{24}x_1x_2^3,\\
\psi_2(x_1,x_2)=\alpha_{25}+\alpha_{26}x_1+\alpha_{27}x_2+\alpha_{28}x_1^2+\alpha_{29}x_2^2+\alpha_{30}x_1x_2+\alpha_{31}x_1^2x_2+\alpha_{32}x_1x_2^2+\\
+\alpha_{33}x_1^3+\alpha_{34}x_2^3+\alpha_{35}x_1^3x_2+\alpha_{36}x_1x_2^3.
\end{gathered}\tag{18}$$

3. Модельный расчёт микрополярных пластин. В качестве примера рассмотрим микрополярную изотропную квадратную пластину, которая опёрта по всем четырём сторонам и изгибается нормальной нагрузкой $p_3=\mathrm{const}$, (в этом случае $p_1=0, p_2=0, p_3\neq 0, m_1=0, m_2=0, m_3=0$). Для граничных условий шарнирного опирания имеем [1]:

$$\begin{gathered}
w=0,\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}=0,\ \Omega_1=0, \psi_2=0, \frac{\partial\iota}{\partial x_1}=0\ \text{ при } x_1=0; a.\\
w=0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}=0,\ \Omega_2=0, \psi_1=0, \frac{\partial\iota}{\partial x_2}=0\ \text{ при } x_2=0; a.
\end{gathered}\tag{19}$$

Функционал (1) для этого случая будет иметь вид:

$$\Pi=\iint\limits_{(S)}[W-(p_3w)]ds.$$

Сначала рассмотрим четвёртую часть пластинки. Вычислим сосредоточенные узловые силы и моменты, эквивалентные равномерно распределённой нагрузке $p_3=\mathrm{const}$:

$$\{\mathbf{P}\}^{\mathrm{T}}=\left\{\frac{\mathbf{p_3a^2}}{\mathbf{4}},\underbrace{\mathbf{0,\ldots 0}}_{\mathbf{71\,раз}}\right\}.$$

После построения матрицы жёсткости $[\mathbf{K}]$ составим систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую рассматриваемой задаче:

$$[\mathbf{K}]\cdot\{\boldsymbol{\delta}\}=\{\mathbf{P}\}.$$

Для повышения точности решений понятно, что необходимо разбивать пластинку на несколько конечных элементов. Рассмотрим случаи, когда пластинка разбита на четыре, на шестнадцать и на тридцатьшесть конечных элементов. Результат вычислений (максимальный прогиб) приведём для случая, когда физические постоянные микрополярного упругого материала имеют значения [12]:

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}=4370\frac{кг}{см^2},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=1093\frac{кг}{см^2},\quad \alpha=46\frac{кг}{см^2},\quad \gamma=2.4кг,$$

$\varepsilon=2.4кг$, $\beta=120кг$, $q=0.5\cdot10^{-3}\dfrac{кг}{см^2}$, а геометрические размеры пластинки такие: $a=b=10см, h=0.1см$ (для сравнения приведём также результат по классической теории упругой тонкой пластинки (18) при её изгибе с учётом поперечных сдвигов).

В случае, когда пластинка разбита на четыре конечные элементы:

1) $w_{\max}^{мик}=0{,}0052см,\ w_{\max}^{кл}=0{,}0073см.$

В случае, когда пластинка разбита на шестнадцать конечныхэлементов:

2) $w_{\max}^{мик}=0{,}0059см,\ w_{\max}^{кл}=0{,}0081см.$

В случае, когда пластинка разбита на тридцать шесть конечны элементов:

3) $w_{\max}^{мик}=0{,}0061см,\ w_{\max}^{кл}=0{,}0085см.$

Теоретические решения обеих задач, которые получены с применением метода разделения переменных, дают следующие численные значения:

4) $w_{\max}^{мик}=0{,}0061см,\ w_{\max}^{кл}=0{,}0085см.$

Здесь, в процессе вычислений легко убедиться в численной сходимости расчётов, а также, что микрополярность материала (по сравнению с классическим материалом) продемонстрирует высокие жёсткостные и прочностные свойства (аналогичные численные результаты получаются и для максимальных нормальных силовых напряжений).

4. Заключение

Таким образом, в данной работе выведены матрица жёсткости и вектор эквивалентных внешних усилий узловых сил и моментов, предназначенных для проведения конечно-элементного расчёта микрополярных упругих тонких пластин. Рассматривается пример применения разработанного метода МКЭ до получения конкретных численных результатов. Проведён анализ численных результатов, на основе которого установлены эффективные свойства микрополярного материала пластинки по сравнению с классическим материалом с точки зрения её жёсткости и прочности.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик.// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып.2. С.148-156. *Sargsyan S.H.* Mathematical model of micropolar elastic thin plate and peculiarities of their strength and stiffness characteristics// Journal of Applied Mechanics and Technical physics. 2012. V.53. № 2. P.148-156.

2. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells//Physical Mezomechanics. 2011. V.14. № 1. P.55-66.
3. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells//International Journal of Mechanics. 2014.Vol.8. P.93–100.
4. Sargsyan S.H., Zhamakochyan K.A. Finite Element Method for Solving Boundary Value Problems of Bending of Micropolar Elastic Thin Bars//Proceedings of the XLII Summer School-Conference Advenced Problems in Mechanics. St.-Petersburg, Russia. June 30-July 5, 2014. P.427-434.
5. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в динамических задачах микрополярных упругих тонких балок //Труды XVII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону 14-17 октября 2014. Т.1. С.186-190. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. Finite element method in dynamic problems of micropolar elastic thin bars//Proceedings of the XVII^th international conference of Modern problems of continuum mechanics. Rostov-on-Don. 14-17 October 2014. V.1. P.186-190.
6. Nakamura S., Benedict R.L., Lakes R.S. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. //Intern. J. Eng. Sci, 1984. V.22. № 3. P. 319-330.
7. Nakamura S., Lakes R.S. Finite element analysis of stress concentration around a blunt crack in a Cosserat elastic solid. // Comput. Methods in Appl. Mech. And Eng. 1988. V.66. №3. P.257-266.
8. Корепанов В.В., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости// Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. №2. С.63–70. Korepanov V.V., Matveenko V.P. and Shardakov I.N. Numerical study of two-dimensional problems of nonsymmetric elasticity //Journal of RAS. Mechanics of Solids. 2008. №2. P.63–70.
9. Корепанов В.В. Численное обоснование экспериментов по обнаружению эффектов моментного поведения материалов//Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(4). С.1536–1538. Korepanov V.V. Numerical verification of the experiments on detection of couple-stress effects in the behavior of materials//Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. 2011. № 4(4). P.1536–1538.
10. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига. «Знание». 1988. 285с. Rickards R.B. Finite element method in the theory of shells and plates. Riga. «Znanie». 1988. 285 p.
11. Нестеров В.А. Модельный расчёт пластины, податливой при трансверсальном сдвиге //Механика композитных материалов. 2011. Т.47. №3. С.399–418. Nesterov V.A. Stiffness matrix of the finite element of a plate compliant in transverse shear//Mechanics of composite materials. 2011. V.47. № 3. P.399–418.
12. Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continuum//Continuum models for materials with micro-structure/ed. H. Muhhaus. 1995. P.1–22.

Сведение об авторах:

Жамакочян Кнарик Араратовна- аспирант Гюмрийского госпединститута им.М.Налбандяна. **Тел:** (093)873294.
E-mail: knarikzhamakochyan@mail.ru.

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН РА, д.ф.-м.н, проф., зав. каф. Высшей математики Гюмрийского госпединститута им.М.Налбандяна.
Тел.: (093) 15 16 98. **E-mail:** slusin@yaoo.com

Поступила в редакцию 01.09.2016