

УДК 539.3

**О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ПЛАСТИН
И ОБОЛОЧЕК***

Агаловян Л.А.

Ключевые слова: пластина, вынужденные колебания, резонанс, асимптотическое решение, пограничный слой.

Key words: plate, forced vibrations, resonance, asymptotic solution, boundary layer.

Քանալի բառեր` սալ, ստիպողական տատանումներ, ռեզոնանս, սահմանային լուծում, սահմանային շերտ.

Աղալովյան Լ.Ա.

Սալերի և թաղանթների տարածական դինամիկ խնդիրների մասին

Ուսումնասիրված են օրթոտրոպ սալերի հարմոնիկ ստիպողական տատանումները: Որոշված են երեք դասի տարածական դինամիկ խնդիրների սահմանային լուծումները: Արտածված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Նշված են այն դեպքերը, երբ արտաքին Ֆներքին խնդրի լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ, կառուցված է սահմանային շերտի լուծումը: Ցույց է տրված, որ բոլոր բնորոշիչ մեծությունները, մասնավորապես նորմալ տեղափոխությունը, խստագույնս կախված են ուղղաձիգ կոորդինատից: Այդ հանգամանքը կասկածի տակ է դնում դասական տեսության վարկածների կիրառելիությունը դինամիկ խնդրում, քանի որ վարկածների, ընդունմամբ աղավաղվում է տատանման պրոցեսի բնույթն ըստ ուղղաձիգ կոորդինատի:

Aghalovyan L.A.

On Space dynamic problems of plates and shells

Forced harmonic vibrations of orthotropic plates are investigated. Asymptotic solutions of space dynamic three classes of problems are found. Cases, when the solution of the outer (inner) problem becomes mathematically exact, are noted, the solution of the boundary layer is built. It is denoted that all the values, particularly, the normal displacement, strictly depend on the transverse coordinate, which casts doubt on the applicability of the hypotheses of classical theory of plates in dynamic problems, as by the hypotheses acceptance the character of the vibration process on the transverse coordinate distorts.

Исследованы вынужденные гармонические колебания ортотропных пластин. Найдены асимптотические решения пространственных динамических трёх классов задач. Указаны случаи, когда решение внешней (внутренней) задачи становится математически точным, построено решение пограничного слоя. Показано, что все величины, в частности, нормальное перемещение, строго зависят от поперечной координаты, что ставит под сомнение применимость гипотез классической теории пластин в динамических задачах, ибо принятием гипотез искажается характер колебательного процесса по поперечной координате.

Введение. Уравнения теории упругости для тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки), написанные в безразмерных координатах, являются сингулярно возмущёнными малым геометрическим параметром. Для решения подобных

* Пленарный доклад автора на Международной школе-конференции молодых учёных. Механика –2016, 3–7 октября 2016,

Цахкадзор, Армения

уравнений и систем эффективным оказался асимптотический метод. Решение складывается из решений внутренней (внешней) задачи и задачи пограничного слоя [1-3].

$$I = I^{out} + I_b \quad (1)$$

Классическая теория пластин и оболочек Кирхгофа-Лява и уточнённые теории Рейсснера, Амбарцумяна С., типа Тимошенко рассматривают лишь один класс задач (хотя и очень широкий), когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений. Если на лицевых поверхностях заданы условия второй или смешанной краевых задач теории упругости, доказано, что для решения подобных задач гипотезы классической и уточнённых теорий не применимы [3]. Видимо, по этой причине долгое время эти задачи не были решены. Асимптотический метод позволил решить и этот класс задач [3]. Решение внутренней (внешней, по терминологии в европейских и американских изданиях) задачи (I^{out}) представляется в виде специфического ряда по малому геометрическому параметру $\varepsilon = h/l$, где h – полутолщина, l – характерный тангенциальный размер тонкого тела:

$$I^{out} = \varepsilon^{q_I+s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \quad (2)$$

где q_I – интенсивность соответствующей искомой величины, N – число приближений. Значения q_I устанавливаются таким образом, чтобы после подстановки (2) в преобразованные вследствие перехода к безразмерным координатам и перемещениям уравнения и соотношения теории упругости получить непротиворечивую систему для определения $I^{(s)}$. Отыскание непротиворечивых значений q_I – наиболее трудный момент при использовании асимптотического метода.

В случае первой краевой задачи теории упругости для анизотропных пластин установлено [3]:

$$q_I = -2 \text{ для } \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, U, V \quad (3)$$

$$q_I = -1 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}; \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{zz}, \quad q_I = -3 \text{ для } W.$$

В случае второй и смешанной краевых задач для балок и пластин установлено [3,4]:

$$q_I = -1 \text{ для всех } \sigma_{ij}, \quad q_I = 0 \text{ для } u, v, w. \quad (4)$$

Асимптотика (2), (3); (2), (4) остаётся в силе и для слоистых балок и пластин. Соответствующие краевые задачи решены в [3,5].

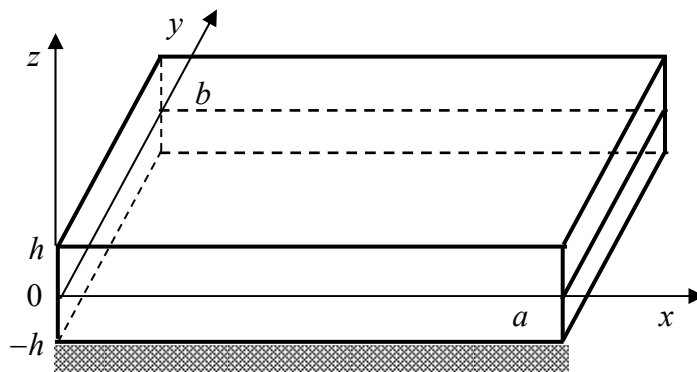
Решение для пограничного слоя строится вблизи торцевых сечений тонкого тела, оно, как правило, экспоненциально убывает при удалении от торцов во внутрь тела.

При решении динамических задач тонких тел, как обычно, в уравнения классической теории формально добавляются упрощённые принятием гипотез инерционные слагаемые. Вследствие этого ниже, на основе решения соответствующей пространственной динамической задачи убедимся, что искажается характер колебательного процесса по поперечной координате.

1. Вынужденные колебания анизотропных пластин. Пусть пластина занимает область $D = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, \min(a, b) = l, h \ll l\}$ (фиг.1). Рассмотрим установившиеся колебания пластины, вызванные гармонически

изменяющимися во времени внешними воздействиями. Для приложений наибольший интерес представляют следующие классы вынужденных колебаний:

а) колебания, вызванные вектором перемещения, приложенным к лицевой поверхности $z = -h$ пластины



Фиг.1

$$u(x, y, -h) = u^-(x, y) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w), \quad (5)$$

а поверхность $z = h$ свободна

$$\sigma_{xz}(x, y, h) = \sigma_{yz}(x, y, h) = \sigma_{zz}(x, y, h) = 0, \quad (6)$$

или жёстко закреплена

$$u(x, y, h) = v(x, y, h) = w(x, y, h) = 0; \quad (7)$$

б) колебания пластины, закреплённой с абсолютно жёстким плоским основанием

$$u(x, y, -h) = v(x, y, -h) = w(x, y, -h) = 0, \quad (8)$$

а при $z = h$ заданы соответствующие компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{jz}(x, y, h) = \sigma_{jz}^+(x, y) \exp(i\Omega t), \quad j = x, y, z \quad (9)$$

или вектор перемещения

$$u(x, y, h) = u^+(x, y) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w); \quad (10)$$

в) вынужденные колебания пластин, вызванные приложенными к лицевым поверхностям пластины нормальными и тангенциальными нагрузками (первая краевая задача теории упругости)

$$\sigma_{jz}(x, y, \pm h) = \pm \sigma_{jz}^\pm(x, y) \exp(i\Omega t), \quad j = x, y, z, \quad (11)$$

где $\sigma_{jz}^\pm, u^\pm, v^\pm, w^\pm$ – заданные функции, Ω – частота внешнего вынуждающего воздействия.

Требуется найти решение уравнений трёхмерной задачи теории упругости, которые для ортотропных пластин имеют вид:

уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (j = x, y, z; u, v, w), \quad (12)$$

соотношения упругости (обобщённый закон Гука)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{13} \sigma_{zz}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12} \sigma_{xx} + a_{22} \sigma_{yy} + a_{23} \sigma_{zz}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= a_{13} \sigma_{xx} + a_{23} \sigma_{yy} + a_{33} \sigma_{zz}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{66} \sigma_{xy}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55} \sigma_{xz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44} \sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (13)$$

Это решение должно удовлетворять одной из групп граничных условий (5)–(11) и условиям на боковой поверхности пластины, которые пока не конкретизируем. При асимптотическом подходе решение внешней (внутренней) задачи однозначно определяется в результате удовлетворения каждого из вариантов условий а), б), в). Следовательно, пограничный слой будет устранять возникающую невязку при удовлетворении условиям на боковой поверхности (торцах).

Поскольку динамический процесс считается установившимся, решение систем уравнений (12), (13) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) &= \sigma_{jk}(x, y, z) \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z; j, k = 1, 2, 3 \\ u(x, y, z, t) &= \bar{u}(x, y, z) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив (14) в уравнения (12), (13) и перейдя к безразмерным координатам и перемещениям

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \quad U = \bar{u}/l, \quad V = \bar{v}/l, \quad W = \bar{z}/h, \quad (15)$$

получим сингулярно-возмущённую малым параметром ε систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 W &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{33}, \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{23} \sigma_{33}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{11} + a_{23} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{33}, \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{13}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= a_{44} \sigma_{23}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} = a_{66} \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$, ρ – плотность. Решение системы (16) имеет вид (1). С самого начала процесс является динамическим, это будет означать, что в исходном приближении разложения (2) должны присутствовать инерционные слагаемые. Мы

получим непротиворечивую систему для последовательного определения всех искомым величин внешней (внутренней) задачи, если разложение (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^{out} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j, k = 1, 2, 3; \quad s = \overline{0, N} \\ (U^{out}, V^{out}, W^{out}) &= \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}). \end{aligned} \quad (17)$$

Представление (17) соответствует случаю, когда присутствующая в (16) $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$ – порядка единицы. При $\Omega_*^2 = 0(\varepsilon)$ процесс будет квазистатическим.

При $\Omega_*^2 = 0(\varepsilon^{-1})$ и выше будет иметь место высокочастотное состояние, которое может быть опять описано системой (16), если $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$, заменить на $\Omega_*^2 = \rho h l \Omega^2$, а при $\Omega_*^2 = 0(\varepsilon^{-2})$ – на $\Omega_*^2 = \rho l^2 \Omega^2$. Подставив (17) в (16) и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения $\sigma_{jk}^{(s)}, U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 U^{(s)} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 V^{(s)} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 W^{(s)} &= 0, \quad \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_{11}^{(s)} + a_{12} \sigma_{22}^{(s)} + a_{13} \sigma_{33}^{(s)}, \\ \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{11}^{(s)} + a_{22} \sigma_{22}^{(s)} + a_{23} \sigma_{33}^{(s)}, \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_{11}^{(s)} + a_{23} \sigma_{22}^{(s)} + a_{33} \sigma_{33}^{(s)}, \\ \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{55} \sigma_{13}^{(s)}, \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{23}^{(s)}, \\ \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{66} \sigma_{12}^{(s)}, \quad Q^{(m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из системы (18) все напряжения можно выразить через перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{11}^{(s)} = -A_{23} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{22}^{(s)} &= -A_{13} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{33}^{(s)} &= A_{11} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / \Delta, \quad A_{22} = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) / \Delta, \quad A_{33} = (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) / \Delta, \\ A_{13} &= (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) / \Delta, \quad A_{23} = (a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) / \Delta, \end{aligned} \quad (20)$$

$$A_{12} = (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}) / \Delta, \quad \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2.$$

Подставив значения $\sigma_{13}^{(3)}, \sigma_{23}^{(3)}, \sigma_{33}^{(3)}$ в первые три уравнения (18), для определения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \Omega_*^2 U^{(s)} = R_u^{(s)}, \quad R_u^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \Omega_*^2 V^{(s)} = R_v^{(s)}, \quad R_v^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44} \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad (22)$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Omega_*^2 W^{(s)} = R_w^{(s)}, \quad (23)$$

$$R_w^{(s)} = A_{23} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right).$$

Решения уравнений (21)–(23) имеют вид:

$$U^{(s)} = U_0^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (U, V, W), \quad (24)$$

где первое слагаемое – решение однородного уравнения, второе слагаемое – частное решение неоднородного уравнения. Решениями однородных уравнений являются:

$$\begin{aligned} U_0^{(s)} &= C_1^{(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1 \zeta + C_2^{(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1 \zeta, \quad \gamma_1 = \Omega_* \sqrt{a_{55}}, \\ V_0^{(s)} &= C_3^{(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_2 \zeta + C_4^{(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_2 \zeta, \quad \gamma_2 = \Omega_* \sqrt{a_{44}}, \\ W_0^{(s)} &= C_5^{(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_3 \zeta + C_6^{(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_3 \zeta, \quad \gamma_3 = \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Имея значения перемещений (24), (25), по формулам (19) определяются напряжения. Затем удовлетворяется каждая группа граничных условий (5)–(11) и однозначно определяются неизвестные функции $C_j^{(s)}(\xi, \eta)$ и окончательное решение. Приведём решения задач, соответствующие граничным условиям (5), (6); (5), (7), которые, в частности, моделируют сейсмические воздействия на основания сооружений. Используя формулы (14), (17), (19), (24), (25) и удовлетворив условиям (5), (6), получим решение:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\gamma_1} \left(u^{-(s)} - U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \cos \gamma_1 (1 - \zeta) - \\
&\quad - \frac{a_{55}}{\gamma_1} \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \sin \gamma_1 (1 + \zeta) + U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), (u, v; a_{55}, a_{44}; 1, 2), \\
W^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\gamma_3} \left(w^{-(s)} - W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \cos \gamma_3 (1 - \zeta) - \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_3 A_{11}} \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \sin \gamma_3 (1 + \zeta) + W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
u^{-(0)} &= u^- / l, u^{(s)} = 0, s \neq 0, (u, v, w), \\
\sigma_{13\tau}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_\tau^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), (1, 2; u, v; a_{55}, a_{44}; \xi, \eta).
\end{aligned} \tag{26}$$

Граничным условиям (5), (7) соответствует решение

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_1} \left(\left(u^{-(s)} - U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin \gamma_1 (1 - \zeta) - \right. \\
&\quad \left. - U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, 1) \sin \gamma_1 (1 + \zeta) + U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \right), (u, v; a_{55}, a_{44}; \gamma_1 \gamma_2), \\
W^{(s)} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_3} \left(\left(w^{-(s)} - W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin \gamma_3 (1 - \zeta) - \right. \\
&\quad \left. - W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin \gamma_3 (1 + \zeta) + W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \right), \\
u^{-(0)} &= u^- / l, u^{-(s)} = 0, s \neq 0, (u, v, w).
\end{aligned} \tag{27}$$

Имея значения перемещений, напряжения будут определены по формулам (19). Решение (26) будет конечным, если

$$\cos 2\gamma_1 \neq 0, \cos 2\gamma_2 \neq 0, \cos 2\gamma_3 \neq 0. \tag{28}$$

При нарушении какого-либо из условий (28) будет возникать резонанс, значения частот, при которых в (28) выполняется равенство нулю, совпадают с главными значениями частот собственных колебаний. Например, условию $\cos 2\gamma_1 = 0$ соответствуют следующие значения резонансных частот:

$$\Omega_n = (2n + 1) \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}, n \in N. \tag{29}$$

В случае решения (27) резонанс возникнет, если будет выполнено хотя бы одно из условий:

$$\sin 2\gamma_1 = 0, \sin 2\gamma_2 = 0, \sin 2\gamma_3 = 0. \tag{30}$$

Учитывая, что $a_{55} = 1/G_{13}$, $a_{44} = 1/G_{23}$, $R_u^{(0)} = R_v^{(0)} = R_w^{(0)} = 0$, согласно формулам (26) и (27), в пластинке будут возникать два типа сдвиговых и продольное колебания, которые при $s = 0$ будут независимыми, т.е. один тип колебаний не будет влиять на другой. При $s > 0$ колебания будут зависимыми и один тип колебаний будет вызывать колебания противоположного типа. Отметим также, что если входящие в граничные условия (5), (9)–(11) функции являются алгебраическими многочленами от тангенциальных координат x, y , то итерационный процесс обрывается на определенном приближении, в результате чего получается математически точное решение во внешней (внутренней) задаче (решение для пространственного слоя). Это решение, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя.

Граничным условиям (8), (9) соответствует решение:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\gamma_1} \left(\frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*} \left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin \gamma_1 (1 + \zeta) - \right. \\
&\quad \left. -U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \cos \gamma_1 (1 - \zeta) \right) + U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{13}^{(s)} &= \frac{\gamma_1}{a_{55}} \left(\frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*} \left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \right) \cos \gamma_1 (1 + \zeta) - \\
&\quad -U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin \gamma_1 (1 - \zeta) \frac{1}{\cos 2\gamma_1} + \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), (u, v; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2; x, y; 1, 2), \\
W^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\gamma_3} \left(\frac{1}{\Omega_* \sqrt{A_{11}}} \left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin \gamma_3 (1 + \zeta) - \right. \\
&\quad \left. -W_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \cos \gamma_3 (1 - \zeta) \right) + W_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{33}^{(s)} &= \frac{\gamma_3 A_{11}}{\cos 2\gamma_3} \left(\frac{1}{\Omega_* \sqrt{A_{11}}} \left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \cos \gamma_3 (1 + \zeta) - \right. \\
&\quad \left. -W_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin \gamma_3 (1 - \zeta) \right) + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{31}$$

При условиях (8), (10) имеем:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_1} \left(\left(u^{+(s)} - U_{\tau}^{+(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin (1 + \zeta) \gamma_1 - \right. \\
&\quad \left. -U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin (1 - \zeta) \gamma_1 \right) + U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{32}$$

$$u^{+(0)} = u^+ / l, \quad u^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v, w).$$

Решение для $V^{(s)}, W^{(s)}$ можно получить от (32) циклической перестановкой $(U, V, W; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; u^+, v^+, w^+)$. Аналогичным образом выводятся условия возникновения резонанса.

Удовлетворив граничным условиям (11), получим решение:

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= -\frac{a_{55}}{\gamma_1 \sin 2\gamma_1} \left(\left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \cos(1+\zeta)\gamma_1 + \right. \\
&+ \left. \left(\sigma_{xz}^{-(s)} + \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \cos(1-\zeta)\gamma_1 \right) + U_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{13}^{(s)} &= -\frac{1}{\sin 2\gamma_1} \left(\left(\sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin(1+\zeta)\gamma_1 - \right. \\
&- \left. \left(\sigma_{xz}^{-(s)} + \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin(1-\zeta)\gamma_1 \right) + \sigma_{13\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{xz}^{\pm(0)} &= \varepsilon \sigma_{xz}^{\pm}, \quad \sigma_{xz}^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (x, y, z), \\
&(u, v; a_{55}, a_{44}; xz, yz; 13, 23; \gamma_1, \gamma_2), \\
W^{(s)} &= -\frac{1}{A_{11}\gamma_3 \sin 2\gamma_3} \left(\left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \cos(1+\zeta)\gamma_3 + \right. \\
&+ \left. \left(\sigma_{zz}^{-(s)} + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \cos(1-\zeta)\gamma_3 \right) + W_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
\sigma_{33}^{(s)} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_3} \left(\left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1) \right) \sin(1+\zeta)\gamma_3 - \right. \\
&- \left. \left(\sigma_{zz}^{-(s)} + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin(1-\zeta)\gamma_3 \right) + \sigma_{33}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) - \\
&- \left(\sigma_{zz}^{-(s)} + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \right) \sin(1-\zeta)\gamma_3 + \sigma_{33}^{-(s)}(\xi, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{33}$$

Окончательное решение для этого случая определится по формулам (14), (17), (33). Резонанс возникнет, если выполнится хоть одно из условий: $\sin 2\gamma_1 = 0$, $\sin 2\gamma_2 = 0$, $\sin 2\gamma_3 = 0$. Соответствующие значения частот совпадают с главными значениями частот собственных колебаний. Как известно, в классической теории пластин и оболочек на основе гипотез Кирхгофа-Лява перемещение W не зависит от поперечной координаты ζ , решение же (33) указывает, что все величины существенно зависят от этой координаты. Это означает, что в динамических задачах гипотезы классической теории строго не применимы. Принципиально отличается также асимптотика (3) классической теории от асимптотики (17) в динамических задачах пластин и оболочек, что означает, что динамический процесс может резко изменить характер напряжённо-деформированного состояния. Формальное добавление к классическим уравнениям статики инерционных слагаемых не может обеспечить описание истинного динамического состояния пластины или оболочки.

2. Математически точные решения во внешней задаче. Если входящие в граничные условия (5), (9)–(11) функции $\sigma_{jz}^{\pm}, u^{\pm}, V^{\pm}, W^{\pm}$ являются алгебраическими многочленами от тангенциальных координат ξ, η , итерационный процесс обрывается после конечного числа шагов, зависящего от степени многочлена. В результате получается математически точное решение во внешней (внутренней) задаче (решение для пространственного слоя). Приведём эти решения для некоторых вариантов граничных условий. Если через Q обозначить любое из напряжений и перемещений, согласно формулам (14), (15), (17), решение можно записать в виде:

$$Q(x, y, z, t) = \tilde{Q}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\Omega t). \quad (34)$$

Если в задаче (5), (6) $u^-, v^-, w^- = \text{const}$, итерационный процесс обрывается на исходном приближении и согласно формулам (19), (26), (34) имеем точное решение:

$$\tilde{u} = \frac{u^-}{\cos 2\gamma_1} \cos(1-\zeta)\gamma_1, \quad \tilde{\sigma}_{xz} = \frac{1}{a_{55}} \frac{u^-}{h} \frac{\gamma_1}{\cos 2\gamma_1} \sin(1-\zeta)\gamma_1, \\ (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2) \quad (35)$$

$$\tilde{W} = \frac{W^-}{\cos 2\gamma_3} \cos(1-\zeta)\gamma_3, \quad \tilde{\sigma}_{zz} = A_{11} \frac{W^-}{h} \frac{\gamma_3}{\cos 2\gamma_3} \sin(1-\zeta)\gamma_3,$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = -A_{23} \frac{W^-}{h} \frac{\gamma_3}{\cos 2\gamma_3} \sin(1-\zeta)\gamma_3, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = -A_{13} \frac{W^-}{h} \frac{\gamma_3}{\cos 2\gamma_3} \sin(1-\zeta)\gamma_3,$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = 0.$$

Граничным условиям (5), (7) при $u^-, v^-, w^- = \text{const}$ соответствует математически точное решение:

$$\tilde{u} = \frac{u^-}{\sin 2\gamma_1} \sin(1-\zeta)\gamma_1, \quad \tilde{\sigma}_{xz} = -\frac{1}{a_{55}} \frac{u^-}{h} \frac{\gamma_1}{\sin 2\gamma_1} \cos(1-\zeta)\gamma_1, \\ (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2)$$

$$\tilde{w} = \frac{w^-}{\sin 2\gamma_3} \sin(1-\zeta)\gamma_3, \quad \tilde{\sigma}_{zz} = -A_{11} \frac{w^-}{h} \frac{\gamma_3}{\sin 2\gamma_3} \cos(1-\zeta)\gamma_3; \quad (36)$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = A_{23} \frac{w^-}{h} \frac{\gamma_3}{\sin 2\gamma_3} \cos(1-\zeta)\gamma_3, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = A_{13} \frac{w^-}{h} \frac{\gamma_3}{\sin 2\gamma_3} \cos(1-\zeta)\gamma_3,$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = 0.$$

В случае граничных условий (8), (9) итерационный процесс при $\sigma_{jz}^+ = \text{const}$ обрывается на исходном приближении и получаем точное решение:

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= \frac{ha_{55}\sigma_{xz}^+}{\gamma_1 \cos 2\gamma_1} \sin \gamma_1 (1+\zeta), \quad \tilde{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}^+}{\cos 2\gamma_1} \cos \gamma_1 (1+\zeta), \\
&\quad (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2) \\
\tilde{w} &= \frac{h\sigma_{zz}^+}{A_{11}\gamma_3 \cos 2\gamma_3} \sin \gamma_3 (1+\zeta), \quad \tilde{\sigma}_{zz} = \frac{\sigma_{zz}^+}{\cos 2\gamma_3} \cos \gamma_3 (1+\zeta), \\
\tilde{\sigma}_{xx} &= -\frac{A_{23}}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = -\frac{A_{13}}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0.
\end{aligned} \tag{37}$$

Особый интерес представляет получение математически точных решений, соответствующих граничным условиям (11) первой краевой задачи теории упругости, хотя бы потому, что нахождение соответствующего решения в статической задаче связано с преодолением значительных математических трудностей. Используя формулы (14), (17), (19), (33), (34), при $\sigma_{j\gamma}^\pm = \text{const}$ получим точное решение (итерация опять обрывается на исходном приближении).

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= -\frac{a_{55}h}{\gamma_1 \sin 2\gamma_1} (\sigma_{xz}^+ \cos(1+\zeta)\gamma_1 + \sigma_{xz}^- \cos(1-\zeta)\gamma_1), \\
\tilde{\sigma}_{xz} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_1} (\sigma_{xz}^+ \sin(1+\zeta)\gamma_1 - \sigma_{xz}^- \sin(1-\zeta)\gamma_1), \\
&\quad (u, v; x, y; a_{55}, a_{44}; \gamma_1, \gamma_2) \\
\tilde{w} &= -\frac{1}{A_{11}} \frac{h}{\gamma_3 \sin 2\gamma_3} (\sigma_{zz}^+ \cos(1+\zeta)\gamma_3 + \sigma_{zz}^- \cos(1-\zeta)\gamma_3), \\
\tilde{\sigma}_{zz} &= \frac{1}{\sin 2\gamma_3} (\sigma_{zz}^+ \sin(1+\zeta)\gamma_3 - \sigma_{zz}^- \sin(1-\zeta)\gamma_3), \\
\tilde{\sigma}_{xx} &= -\frac{A_{23}}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = -\frac{A_{13}}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Используя общие решения (26), (27), (31)–(33), несложно выписывать точные решения, соответствующие внешним полиномиальным нагрузениям различных степеней. Из выведенных выше формул следует, что в пластинке возникают два типа сдвиговых и продольное колебаний, которые в исходном приближении независимы, в последующих же приближениях они зависимы и один тип колебаний порождает колебания другого типа.

Приведённые математически точные решения показывают, что в динамических задачах пластин поперечное нормальное перемещение w явно зависит от поперечной координаты ζ , откуда следует, что необходимо проявить определённую осторожность в использовании классической теории пластин в динамических задачах.

3. Пограничный слой в пластинах. Решение внешней (внутренней) задачи полностью определилось после удовлетворения граничным условиям на лицевых

поверхностях пластины. Это решение вообще не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластины. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя. Изложим процедуру построения этого решения вблизи боковой поверхности $x = 0$. Вводится новая замена переменной $\gamma = \xi/\varepsilon$ в уравнения (16) и всем искомым величинам приписывается индекс « b » (от слова boundary). Соответствующее решение вновь полученной системы должно быстро убывать при удалении от боковой поверхности $x = 0$ ($\gamma = 0$) во внутрь пластины.

Это решение отыскивается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{jke} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jke}^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda\gamma), \quad j, k = 1, 2, 3; s = \overline{0, N}, \\ (U_e, V_e, W_e) &= \varepsilon^s (U_e^{(s)}(\eta, \zeta), V_e^{(s)}(\eta, \zeta), W_e^{(s)}(\eta, \zeta)) \exp(-\lambda\gamma), \end{aligned} \quad (39)$$

где λ – неизвестное пока число, которое характеризует скорость убывания величин пограничного слоя, $\text{Re } \lambda > 0$. Подставив (39) в вышеуказанную преобразованную систему, получим:

$$\begin{aligned} -\lambda \sigma_{11e}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{12e}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13e}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 U_e^{(s)} &= 0, \quad -\lambda \sigma_{12e}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{22e}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23e}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 V_e^{(s)} = 0, \\ -\lambda \sigma_{13e}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{23e}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33e}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 W_e^{(s)} &= 0, \quad -\lambda U_b^{(s)} = a_{11} \sigma_{11b}^{(s)} + a_{12} \sigma_{22b}^{(s)} + a_{13} \sigma_{33b}^{(s)}, \\ \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11b}^{(s)} + a_{22} \sigma_{22b}^{(s)} + a_{23} \sigma_{33b}^{(s)}, \quad \frac{\partial W_e^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{11b}^{(s)} + a_{23} \sigma_{22b}^{(s)} + a_{33} \sigma_{33b}^{(s)}, \quad (40) \\ -\lambda V_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{66} \sigma_{12b}^{(s)}, \quad -\lambda W_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{55} \sigma_{13e}^{(s)}, \\ \frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{44} \sigma_{23b}^{(s)}. \end{aligned}$$

Из системы (40) напряжения можно выразить через компоненты вектора перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_{12b}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left(-\lambda V_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{13b}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left(-\lambda W_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{23e}^{(s)} &= \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad Q^{(m)} \equiv 0 \quad \text{при} \quad m < 0, \\ \sigma_{11b}^{(s)} &= -\lambda A_{22} U_b^{(s)} - A_{23} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{22b}^{(s)} &= \lambda A_{12} U_b^{(s)} - A_{13} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{33} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{33b}^{(s)} = \lambda A_{23} U_b^{(s)} + A_{11} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{13} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad (41)$$

где A_{ik} определяются по формулам (20). Подставив значения $\sigma_{12b}^{(s)}, \sigma_{23b}^{(s)}$ во второе уравнение (40), для определения $V_b^{(s)}$ получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 V_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{a_{44}}{a_{66}} \lambda^2 + a_{44} \Omega_*^2 \right) V_b^{(s)} = f_{vb}^{(s)}, \quad (42)$$

$$f_{vb}^{(s)} = \frac{a_{44}}{a_{66}} \lambda \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - a_{44} \frac{\partial \sigma_{22b}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 W_b^{(s-1)}}{\partial \zeta \partial \eta}.$$

Подставив же значения $\sigma_{11e}^{(s)}, \sigma_{13e}^{(s)}, \sigma_{33e}^{(s)}$ в первое и третье уравнения (40), для определения $U_b^{(s)}, W_b^{(s)}$ получим систему:

$$\frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\lambda^2 A_{22} + \Omega_*^2) U_b^{(s)} + \lambda (A_{23} a_{55} - 1) \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} = f_{ub}^{(s)},$$

$$A_{11} a_{55} \frac{\partial^2 W_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2) W_b^{(s)} + \lambda (A_{23} a_{55} - 1) \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} = f_{wb}^{(s)}, \quad (43)$$

где несложно выписать выражения $f_{ub}^{(s)}, f_{wb}^{(s)}$, в частности, $f_{ub}^{(0)} = f_{wb}^{(0)} = f_{vb}^{(0)} \equiv 0$.

Из системы (43) $W_b^{(s)}$ можно выразить через $U_b^{(s)}$, а для определения $U_b^{(s)}$ получается уравнение

$$\frac{\partial^4 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^4} + B_{11} \frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + B_{22} U_b^{(s)} = \Psi_u^{(s)}, \quad (44)$$

где

$$B_{11} = \frac{\lambda^2}{A_{11}} \left(a_{55} (A_{11} A_{22} - A_{23}^2) + 2 A_{23} \right) + \frac{\Omega_*^2}{A_{11}} (1 + A_{11} a_{55}),$$

$$B_{22} = \frac{1}{A_{11}} (\lambda^2 A_{22} + \Omega_*^2) (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2), \quad (45)$$

$$\Psi_u^{(s)} = \frac{1}{A_{11} a_{55}} (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2) f_{ub}^{(s)} - \frac{1}{A_{11} a_{55}} \frac{\partial f_{uwb}^{(s)}}{\partial \zeta}.$$

Решение уравнения (44):

$$U_b^{(s)} = A_1^{(s)} \Psi_1 + A_2^{(s)} \Psi_2 + A_3^{(s)} \Psi_3 + A_4^{(s)} \Psi_4 + U_{tb}^{(s)}, \quad (46)$$

где $U_{tb}^{(s)}$ – частное решение уравнения (44), а

$$\Psi_1 = \operatorname{ch}k_1\zeta, \Psi_2 = \operatorname{sh}k_1\zeta, \Psi_3 = \operatorname{ch}k_2\zeta, \Psi_4 = \operatorname{sh}k_2\zeta$$

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-B_{11} \pm \sqrt{B_{11}^2 - 4B_{22}}\right)}. \quad (47)$$

Определив $U_b^{(s)}$, по формулам

$$W_b^{(s)} = C_1 \left(A_{11} a_{55} \frac{\partial^3 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^3} + C_2 \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} + f_{uwb}^{(s)} \right), \quad (48)$$

$$C_1 = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + a_{55}\Omega_*^2)(A_{23}a_{55} - 1)},$$

$$C_2 = A_{11}a_{55}^2(\lambda^2 A_{22} + \Omega_*^2) - \lambda^2(A_{23}a_{55} - 1)^2$$

определится $W_b^{(s)}$. Решением уравнения (42) является

$$V_b^{(s)} = B_1^{(s)} \sin m\zeta + B_2^{(s)} \cos m\zeta + V_{tb}^{(s)}(\eta, \zeta)$$

$$m = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda^2 + \Omega_*^2 a_{44}}. \quad (49)$$

Имея значения $U_b^{(s)}, V_b^{(s)}, W_b^{(s)}$, напряжения определяются по формулам (41).

Поскольку решение внешней задачи удовлетворяет условиям неоднородных краевых задач (5)–(11), решение пограничного слоя должно удовлетворять соответствующим нулевым условиям:

$$\text{а) } U_b(0, \eta, -1) = 0, V_b(0, \eta, -1) = 0, W_b(0, \eta, -1) = 0, \sigma_{j3b}(0, \eta, 1) = 0, \quad (50)$$

$$\text{б) } U_b(0, \eta, \pm 1) = 0, V_b(0, \eta, \pm 1) = 0, W_b(0, \eta, \pm 1) = 0, \quad (51)$$

$$\text{в) } \sigma_{j3b}(0, \eta, \pm 1) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (52)$$

При $s = 0$ правые части уравнений (42), (43) равны нулю и $V_b^{(0)}$ не зависит от $U^{(0)}, W^{(0)}$, и наоборот. Вычислив $V_b^{(0)}, \sigma_{23b}^{(0)}$ и удовлетворив условиям (50) относительно V_b и σ_{23b} , получим однородную алгебраическую систему, которая будет иметь ненулевое решение, если её определитель равен нулю. Из соответствующего трансцендентного уравнения $\cos 2m = 0$ определяется λ_n с $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{16} - \Omega_*^2 a_{44}}, \quad n \in N \quad (53)$$

и решение антиплоского погранслоя

$$V_{\epsilon}^{(0)} = V_{\epsilon n}^{(0)} \exp(-\lambda_n \gamma), \quad V_{\epsilon n}^{(0)} = B_2^{(0)}(\eta)(\operatorname{tg} m \sin m\zeta + \cos m\zeta), \quad (54)$$

где $B_2^{(0)}(\eta)$ должна быть определена при удовлетворении условиям на боковой поверхности $\gamma = 0$, т.е. при сопряжении решений внешней (внутренней) задачи и задачи пограничного слоя. По формулам (41), (46), (48), определив $U_b^{(0)}, W_b^{(0)}, \sigma_{13}^{(0)}, \sigma_{33}^{(0)}$ и удовлетворив остальным условиям (50) и соответствующим условиям (51), (52), для каждого случая получим своё трансцендентное уравнение для λ_n . Приведём его для условий (52):

$$\begin{aligned} (C_3 - C_4) \operatorname{sh}(k_1 + k_2) \pm (C_3 + C_4) \operatorname{sh}(k_1 - k_2) &= 0, \\ C_3 &= (\lambda C_1 A_{11} a_{55} k_1^2 + C_1 C_2 - 1) (\lambda A_{23} + C_1 A_{11}^2 a_{55} k_2^4 + C_1 C_2 A_{11} k_2^2) k_1, \\ C_4 &= (\lambda C_1 A_{11} a_{55} k_2^2 + C_1 C_2 - 1) (\lambda A_{23} + C_1 A_{11}^2 a_{55} k_1^4 + C_1 C_2 A_{11} k_1^2) k_2. \end{aligned} \quad (55)$$

Как правило, уравнения (55) имеют комплексно-сопряжённые корни. Первому уравнению (55) соответствует плоский симметричный погранслоем (растяжение–сжатие) и решение (46) принимает вид ($A_2^{(0)} = A_4^{(0)} = 0, A_3^{(0)}$ выражается через $A_1^{(0)}$):

$$\begin{aligned} U_e^{(0)} &= A_1^{(0)}(\eta) \left(\Psi_1 + b_1 \frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2} \Psi_3 \right), \\ b_1 &= - \frac{(\lambda C_1 A_{11} a_{55} k_1^2 + C_1 C_2 - 1) k_1}{(\lambda C_1 A_{11} a_{55} k_2^2 + C_1 C_2 - 1) k_2}, \end{aligned} \quad (56)$$

второму уравнению (55) соответствует кососимметричный (изгиб) динамический погранслоем ($A_1^{(0)} = A_3^{(0)} = 0, A_4^{(0)}$ выражается через $A_2^{(0)}$)

$$U_b^{(0)} = A_2^{(0)}(\eta) \left(\Psi_2 + b_1 \frac{\operatorname{ch} k_1}{\operatorname{ch} k_2} \Psi_4 \right). \quad (57)$$

Несложно выписать трансцендентные уравнения и соответствующие решения для остальных условий (50)-(52). Таким образом, в пластине возникают антиплоский и плоский динамические пограничные слои, величины которых при удалении от боковой поверхности убывают экспоненциально и с различными скоростями. Для антиплоского погранслоя λ_n вещественные, а для плоского погранслоя комплексно-сопряжённые, вещественная часть которых ($\operatorname{Re} \lambda_n > 0$), характеризует скорость убывания ($\exp(-\operatorname{Re} \lambda_n \gamma)$) величин. При $s = 0$ эти решения независимы, а при $s > 0$ они зависимы и каждому погранслою сопутствует противоположный погранслоем, но с амплитудой на порядок меньше предыдущей. В силу этого, в практических приложениях можно ограничиться исходным приближением. В общем же случае будем иметь два типа решений: $\overset{p}{Q}^{(s)}$ и $\overset{a}{Q}^{(s)}$, соответствующие значениям λ_n для плоского (λ_{pn}) и антиплоского (λ_{an}) пограничных слоёв. Является очевидным, что

$$\sigma_{12b}^{(0)} = \sigma_{23b}^{(0)} = V_b^p = 0; \sigma_{11b}^{(0)} = \sigma_{22b}^{(0)} = \sigma_{13b}^{(0)} = \sigma_{33b}^{(0)} = 0, \quad U_b^{(0)} = W_b^{(0)} = 0. \quad (58)$$

Учитывая, что корни λ_p трансцендентных уравнений плоского погранслоя комплексно-сопряженные, соответствующее решение будет вещественным. Например, принимая в (56)

$$A_1^{(0)} = \frac{1}{2} \left(A_{1n}^{(0)} - iA_{2n}^{(0)} \right), \quad \tilde{U}_{bn} = u_{bn} \exp(-\lambda_{pn} \gamma), \quad (59)$$

где u_{bn} – коэффициент при $A_1^{(0)}$ в (56), решение плоского погранслоя запишется в виде:

$$U_{bn}^{(0)} = A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{U}_{bn} + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{U}_{bn}, \quad (U, W), \quad (60)$$

$$\sigma_{jkn}^{(0)} = A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{\sigma}_{jkn} + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{\sigma}_{jkn}, \quad \tilde{\sigma}_{jkn} = \sigma_{jkn} \exp(-\lambda_{pn} \gamma), \quad j, k = 1, 3.$$

Отметим также, что для пограничного слоя решается однородная линейная система с однородными (нулевыми) граничными условиями. Следовательно, решение будет определено с точностью постоянного множителя, которую можно представить в виде ε^μ или ε^χ . В силу этого, общее асимптотическое решение (I) будет иметь вид:

$$I = I^{out} + \varepsilon^\mu \tilde{Q} + \varepsilon^\chi \tilde{Q}. \quad (61)$$

4. Сопряжение решений внешней задачи и задачи пограничного слоя. Мы показали выше, что решение внешней (внутренней) задачи полностью определяется через данные на лицевых поверхностях пластины. Однако, это решение, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности. Покажем, что решение (61) позволяет устранять возникающую неувязку.

Пусть боковая поверхность пластинки $x = 0$ свободна

($\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ при $x = 0$). Согласно (17), (61), эти условия запишутся в виде:

$$\varepsilon^{-1+s} \sigma_{11}^{(s)}(\xi=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\mu+s} \sigma_{11b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\chi+s} \sigma_{11b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) = 0, \quad (62)$$

$$\varepsilon^{-1+s} \sigma_{13}^{(s)}(\xi=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\mu+s} \sigma_{13b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\chi+s} \sigma_{13b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) = 0,$$

$$\varepsilon^{-1+s} \sigma_{12}^{(s)}(\xi=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\mu+s} \sigma_{12b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) + \varepsilon^{-1+\chi+s} \sigma_{12b}^{(s)}(\gamma=0, \eta, \zeta) = 0. \quad (63)$$

Учитывая, что величины внешней (внутренней) задачи уже известны, имея в виду (58), мы получим непротиворечивые условия для определения неизвестных функций решений плоского и антиплоского погранслоев, если $\mu = \chi = 0$. Для плоского погранслоя из (62) следует:

$$\sigma_{11b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -\sigma_{11b}^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - \sigma_{11b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta), \quad (64)$$

$$\sigma_{13b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -\sigma_{13b}^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - \sigma_{13b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta),$$

а для антиплоского погранслоя из (63) следует условие

$$\sigma_{12b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -\sigma_{12b}^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - \sigma_{12b}^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta). \quad (65)$$

Согласно (60), условия (64) при $s = 0$ записываются в виде

$$A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{\sigma}_{11bn}^{(0)}(0, \eta, \zeta) + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{\sigma}_{11bn}^{(0)}(0, \eta, \zeta) = -\sigma_{11}^{(0)}(0, \eta, \zeta), \quad (66)$$

$$A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{\sigma}_{13bn}^{(0)}(0, \eta, \zeta) + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{\sigma}_{13bn}^{(0)}(0, \eta, \zeta) = -\sigma_{13}^{(0)}(\xi = 0, \eta, \zeta),$$

в (66) в каждом уравнении по немоу индексу «n» происходит суммирование от единицы до N-выбранных для вычислительных процедур λ_n . Систему (66) можно решить различными методами, например, методом коллокаций, Фурье, наименьших квадратов. При $s > 0$ меняются лишь правые части условий (66). Из условия (65), используя (41), (49), методом Фурье определяется антиплоский погранслоем. Если на боковой поверхности заданы иные условия, например, $u = v = w = 0$ или $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, w = 0$ при $x = 0$, процедура остаётся неизменной.

Покажем это для условий жёсткого защемления

$$u = v = w = 0 \text{ при } x = 0. \quad (67)$$

Для определения величин пограничного слоя получим непротиворечивые условия, если в формуле (61) $\mu = 0, \chi = 0$. В результате, для определения величин плоского пограничного слоя будем иметь условия:

$$U_b^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -U^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - U_b^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta), \quad (68)$$

$$W_b^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -W^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - W_b^{(s)}(\gamma = 0, \eta, \zeta).$$

Согласно формулам (58), (60), условия (68) при $s = 0$ примут вид:

$$A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{U}_{bn}(\gamma = 0, \eta, \zeta) + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{U}_{bn}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -U^{(0)}(\xi = 0, \eta, \zeta), \quad n = \overline{0, N},$$

$$A_{1n}^{(0)} \operatorname{Re} \tilde{W}_{bn}(\gamma = 0, \eta, \zeta) + A_{2n}^{(0)} I_m \tilde{W}_{bn}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -W^{(0)}(\xi = 0, \eta, \zeta), \quad (69)$$

откуда одним из вышеуказанных методов определяются $A_{1n}^{(0)}, A_{2n}^{(0)}$ и окончательное решение при $s = 0$. При $s \geq 1$ меняются лишь правые части условий (69). Условие, соответствующее $v = 0$, записывается в виде

$$V_b^{(s)a}(\gamma = 0, \eta, \zeta) = -V^{(s)}(\xi = 0, \eta, \zeta) - V_b^{(s)p}(\gamma = 0, \eta, \zeta). \quad (70)$$

Используя формулы (49), (58) из условия (70), методом Фурье определяется неизвестная функция от η -решения антиплоского погранслоя. Здесь, используя (49), заранее должно быть удовлетворено соответствующее из условий (50)–(52).

Изложенным методом решения пространственных динамических задач пластин можно решить динамические задачи для слоистых пластин [6], пластин с общей анизотропией [7], а также оболочек [8.9].

Заключение. Для ортотропных пластин найдены асимптотические решения пространственных динамических задач трёх классов. Выведены условия возникновения резонанса. Установлены случаи, когда решение внешней (внутренней) задачи становится математически точным. Построено решение для пограничного слоя и сопряжено с решением внешней (внутренней) задачи. Показано, что все расчётные величины, в частности, нормальное перемещение, строго зависят от поперечной координаты, что ставит под сомнение применимость гипотез классической теории пластин в динамических задачах. Принятием гипотез искажается характер колебательного процесса по поперечной координате и ими следует воспользоваться с большой осторожностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
Nayfeh, A.H. Perturbation Methods. 1973. John Wiley and Sons.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругости тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510 с.
Goldenevizer, A.L. Theory of Elastic Thin Shells. Nauka, Moscow, 1976, p.510. (in Russian)
3. Aghalovyan L.A. Asimptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London: World Scientific Publ. 2015. 376p. (Русск. изд. М.: Наука-Физматлит, 1997).
4. Агаломян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела //Межвуз. сб.: Механика. Изд.ЕГУ. 1982. Вып.2.С.7–12.
Aghalovyan L.A. (1982) On the structure of solution of a class of plane problems if anisotropic elastic solids. Mezhvuz. Sb.YSU, Mechanics 2, pp.7-12. (in Russian)
5. Агаломян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468 с.
Aghalovyan L.A., Gevorgyan, R.S. Nonclassical boundary-value problems of anisotropic layered beams, plates and shells. Yerevan, Publishing house of NAS RA.2005. p. 468. (in Russian)

6. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.
Aghalovyan L.A., Hovhannisyan R.Zh. On the Character of Forced Vibrations of the Three-layered orthotropic Plates in the Mixed–Boundary Problem. Reports of NAS of Armenia. 2006. Vol.106. №4, pp.186-192. (in Russian)
7. Агаловян М.Л. Асимптотика решения пространственной динамической задачи для анизотропных пластин. //Докады XX Межд. конф. по теории оболочек и пластин «Механика оболочек и пластин». Нижний Новгород. Изд. Нижегородского госуниверситета, 2002. С.78–82.
Aghalovyan M.L. The asymptotics of dynamic space problem solution for anisotropic Plates. Reports of XX International Conference by theory of Shells and Plates: «Mechanics of Shells and Plates». Nizhny Novgorod.Publ. NSU.2002, pp.78-82. (in Russian)
8. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. К определению решений одного класса динамических пространственных задач математической теории упругости для ортотропных оболочек. //Учёные записки АГПУ им. Х. Абовяна. 2012. №2 (17). С.29–42.
Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. About defining solutions of a class of dynamic space problems of mathematical theory of elasticity for orthotropic shells. Scientific news. ASPV after Kh.Abovyan. 2012. №2 (17), pp.29-42. (in Russian)
9. Агаловян Л.А., Ghulghazaryan L.G. Non-classical boundary-value problems of the forced vibrations of orthotropic shells. //International sciences journal of Applied Mechanics. Springer. Vol.45, №8. 2009, pp. 888-903.

Сведения об авторе:

Агаловян Ленсер Абгарович, академик НАН Армении,
зав.отделом Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2,

Тел.: (+37410) 52-58-35. **E-mail:** aghal@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 09.11.2016