

УДК 532.613.5

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ СЖАТИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ  
СТРУКТУРЕ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ**  
**Оганян Г.Г., Саакян С.Л.**

**Ключевые слова:** жидкость, пузырёк, снарядный режим, периодическая структура.  
**Առանցքային բառեր.** Գազահեղուկ խառնուրդ, ալիք, խցաններ փակ ջրանցքում:  
**Keywords:** gas-fluid mixture, wave, corks in closed channel.

**Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.**

**Պարբերական կառուցվածքով երկֆազ խառնուրդում սեղմման ալիքի տարածումը**

Հետազոտված է գազահեղուկ խառնուրդով լցված փակ ջրանցքում ճնշման ալիքի վարքը: Ջրանցքում կարող են առաջանալ տարբեր գազապարունակությամբ պարբերաբար կրկնվող խցաններ: Դուրս է բերված դիսպերսիոն հավասարումը, որը բնութագրում է երկու խցաններից կազմված բջիջում Բլոխ-Ֆլոկեի ալիքային թվի կախվածությունը խցաններում այլ ալիքային թվերից: Ջրաօդային խառնուրդի համար թվային հաշվարկների միջոցով որոշված են գրգռող հաճախությունների ոչ թափանցելության արժեքները, որոնց դեպքում ալիք չի տարածվում:

**Oganyan G.G., Sahakyan S.L.**

**The propagation of pressure wave in two-component mixture flow with periodically structure**

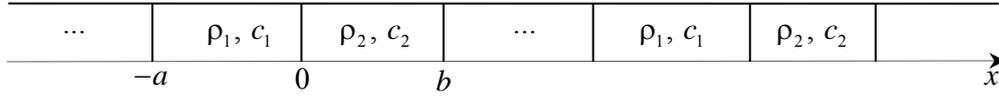
The behavior of the pressure wave in a closed channel with a gas-liquid mixture is investigated. In the channel can be implemented corks with the different gas content. The structure of the slug flow is quasiperiodic. The transcendental dispersion equation is derived. The cell Bloch number dependence on a local wave numbers in the corks is derived. As illustration the water-air mixture is considered. Closing value of frequencies decreasing with increasing gas in corks, increasing with initial pressure magnification decreasing with increase of bubble sizes for high and ultrahigh forcing frequencies and are not changed for a low frequencies. As well as they decreasing when we take into account the dispersion effects in mixtures.

Рассмотрена периодическая структура стационарного течения смеси, характеризующегося чередующимися пробками в замкнутом канале бесконечной длины. На основе модельных уравнений разреженной пузырьковой смеси выписаны линейные уравнения типа Буссинеска, описывающие поведения давлений в периодически повторяющихся ячейках, которые состоят из двух пробок, наполненными газожидкостными смесями с разными объёмными содержаниями газа. Возмущения скоростей частиц смесей определяются из уравнений количества движения в каждой из пробок. Получено дисперсионное трансцендентное уравнение, из которого численной его реализацией найдены значения возбуждающих волну частот, при которых распространение волны сжатия не происходит.

Տրամադրված է սնարդային ռեժիմը փակ ջրանցքում, որտեղ կազմված է խցաններ: Գտնվում է խցանների կառուցվածքի և խցանների միջև ալիքային թվի կախվածությունը: Ջրաօդային խառնուրդի համար թվային հաշվարկներով որոշված են գրգռող հաճախությունների ոչ թափանցելության արժեքները, որոնց դեպքում ալիք չի տարածվում:

уравнения Хилла рассмотрено в [5]. Затухание волны умеренной интенсивности в вертикальной трубе с газожидкостной смесью экспериментально исследовано в [6]. Ниже рассматривается стационарная задача поведения волны в газожидкостной, в частности, водовоздушной смеси для определения диапазонов среза, являющейся логическим продолжением работы [7].

**1. Исходные уравнения.** Рассмотрим раннюю стадию формирования (зарождения) стационарного снарядного режима, в котором первая пробка наполнена газожидкостной смесью с малым объёмным газосодержанием  $\beta_1 \ll 1$ , а вторая – с более высоким содержанием газа  $\beta_2$ . Идеализированная схема режима стационарного течения представлена на фиг.1.



Фиг.1

Полагается, что касательные напряжения на стенках равны нулю в силу отсутствия вязкости.

Одномерные линейные уравнения, описывающие движения сред в пробках в приближении Буссинеска, имеют вид [6,7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - (1 - \beta_1) \frac{c_1^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^4 P_1}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad c_1^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_1 \rho_{10}} \\ \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - (1 - \beta_2) \frac{c_2^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^4 P_2}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad c_2^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_2 \rho_{10}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\rho_1 = (1 - \beta_1) \rho_{10} + \beta_1 \rho_{20}, \quad \rho_2 = (1 - \beta_2) \rho_{10} + \beta_2 \rho_{20}, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_{10} R_0^2}$$

Здесь и далее  $t$  – время,  $x$  – координата, направленная вдоль стенки канала,  $P_i$  и  $\rho_i$  ( $i = 1, 2$ ) – возмущения давления и плотности,  $\omega_{ar}$  – резонансная частота Минаерта,  $R$  – радиус пузырька,  $\gamma$  – показатель адиабаты газа,  $c_i$  – невозмущённые скорости звука в смесях. Последние слагаемые в уравнениях (1.1) ответственны за дисперсию волн в смесях. Индексы «0» отнесены к состоянию равновесия (покоя), а «1» и «2» – к параметрам первой и второй пробки.

Возмущения скоростей частиц смесей  $V_1$  и  $V_2$  определяются из уравнений количества движения в каждой из пробок

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\partial P_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2 c_2^2} \frac{\partial P_2}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

Предположим, что в периодической по  $x$  дискретной структуре снарядного режима зависимость параметров течения по  $t$  также является периодической, в связи с чем в (1.1), (1.2) можно полагать

$$\left[ P_i(x, t), V_i(x, t) \right] = \left[ P_{i^*}(x), V_{i^*}(x) \right] e^{i\omega t},$$

где  $\omega$  – возбуждающая частота. В результате получим стационарные уравнения

$$\frac{d^2 P_i}{dx^2} + \frac{\omega_i^2}{c_i^2} P_i = 0, \quad \frac{dV_i}{dx} + \frac{i\omega}{\rho_i c_i^2} P_i = 0, \quad \omega_i^2 = \omega^2 \left[ 1 - (1 - \beta_i) \frac{\omega^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1}, \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

Здесь звездочки в индексах опущены. Общие решения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x}, \quad P_2(x) = A_2 e^{-ik_2 x} + B_2 e^{ik_2 x} \\ V_1(x) &= \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} (A_1 e^{-ik_1 x} - B_1 e^{ik_1 x}) + D_1, \\ V_2(x) &= \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\omega}{\omega_2} (A_2 e^{-ik_2 x} - B_2 e^{ik_2 x}) + D_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega_2}{c_2}$$

где  $A_i, B_i, D_i$  – постоянные интегрирования.

На линии  $x = 0$  раздела сред (пробок) должны выполняться условия непрерывности как давлений и их производных, так и скоростей

$$P_1(0) = P_2(0), \quad V_1(0) = V_2(0), \quad \frac{dP_1(0)}{dx} = \frac{dP_2(0)}{dx} \quad (1.5)$$

Кроме того, на линиях  $x = -a$  и  $x = b$  раздела элементарной ячейки, потребуем выполнение условий их квазипериодичности:

$$P_1(-a) = l P_2(b), \quad V_1(-a) = l V_2(b), \quad \frac{dP_1(-a)}{dx} = l \frac{dP_2(b)}{dx}, \quad (1.6)$$

где постоянный множитель  $l$  будет определён в процессе решения задачи.

Удовлетворяя решения (1.3) условиям (1.4) и (1.5), придём к системе линейных однородных уравнений относительно  $A_i, B_i, D_i$ :

$$A_1 + B_1 - A_2 - B_2 = 0$$

$$\frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} (A_1 - B_1) - \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\omega}{\omega_2} (A_2 - B_2) + D_1 - D_2 = 0$$

$$A_1 e^{ik_1 a} + B_1 e^{-ik_1 a} - l (A_2 e^{-ik_2 b} + B_2 e^{ik_2 b}) = 0$$

$$\frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} (A_1 e^{ik_1 a} - B_1 e^{-ik_1 a}) - l \frac{1}{\rho_2 c_2} \frac{\omega}{\omega_2} (A_2 e^{-ik_2 b} - B_2 e^{ik_2 b}) + D_1 - l D_2 = 0$$

$$-\frac{\omega_1}{c_1} (A_1 - B_1) + \frac{\omega_2}{c_2} (A_2 - B_2) = 0$$

$$-\frac{\omega_1}{c_1} (A_1 e^{ik_1 a} - B_1 e^{-ik_1 a}) + l \frac{\omega_2}{c_2} (A_2 e^{-ik_2 b} - B_2 e^{ik_2 b}) = 0$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений является равенство нулю определителя, элементы которого составлены из коэффициентов при  $A_i, B_i, D_i$ . Раскрывая его, для нахождения множителя  $l$  получим уравнение

$$\frac{1}{2} \left( l + \frac{1}{l} \right) = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2} \left( \frac{c_2}{c_1} \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{c_1}{c_2} \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin k_1 a \sin k_2 b$$

Его можно получить также с использованием метода интегральной передаточной матрицы, который эффективен в случае большего количества пробок [1]. Вводя в рассмотрение волновое число Блоха-Флоке  $q$  [4,5]  $l = e^{iqL}$ ,  $L = a + b$ , будем иметь трансцендентное уравнение

$$\cos qL = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2} \left( \frac{c_1}{c_2} \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{c_2}{c_1} \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin k_1 a \sin k_2 b, \quad (1.7)$$

которое в отсутствие дисперсии переходит в известное для периодических структур уравнение [4,5,8].

Отсюда следует вывод, что волновой процесс в ячейке определяется не локальными волновыми числами  $k_1, k_2$  в пробках, а некоторой величиной  $q$ , которая определяется с точностью до целого значений  $2\pi n/L$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ . Очевидно, что для возбуждающих частот  $\omega$ , при которых  $|\cos qL| \leq 1$ , имеет место распространение волны, а при  $|\cos qL| > 1$  волны отсутствуют. В последнем случае падающая из какой-либо пробки волна по достижению границы последующей полностью отражается от неё. Таким образом, весь спектр значений  $\omega$  подразделяется на диапазоны прозрачности (частот пропускания) и среза (частот запираения). Первые по очерёдности диапазоны будем называть главными. Введём в рассмотрение параметр  $\alpha = b/L$  – приведённую безразмерную ширину второй пробки и тогда  $a = (1 - \alpha)L$ , поскольку  $L = a + b$ .

Требуется определить диапазоны значений частот запираания. В качестве примера рассматриваются водовоздушные смеси с различными вариантами исходных параметров. При построении графиков тонкие и утолщённые кривые будут отнесены соответственно к меньшим и большим значениям варьируемых параметров.

**2. Случай отсутствия дисперсии.** Последними слагаемыми в уравнениях (1.1) можно пренебречь и полагать  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

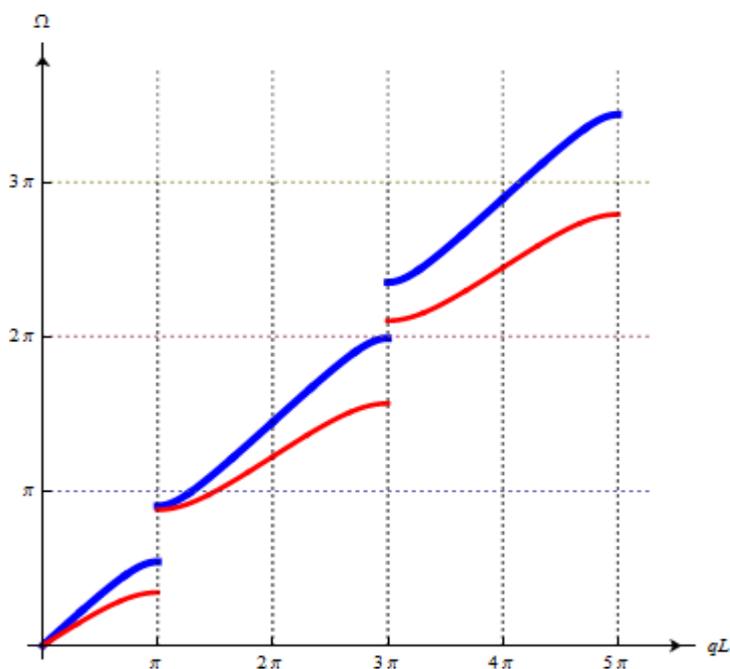
**Частная задача.** Пусть выполняется связь  $k_1 a = k_2 b$ , означающая, что фаза волны в каждой пробке меняется на одну и ту же величину [5]. Уравнение (1.7) примет форму записи:

$$\cos qL = 1 - \frac{1}{2} \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sin^2 [(1 - \alpha)\Omega] \equiv f_1(\Omega), \quad \Omega = \frac{\omega}{c_1} L \quad (2.1)$$

Условие  $k_1 a = k_2 b$  определяет значение  $\alpha$  в зависимости от отношения газосодержаний

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{c_1 + c_2}{c_2} = 1 + \sqrt{\theta}, \quad \theta = \beta_2 / \beta_1. \quad (2.2)$$

Исследуем влияния изменений параметров на картину распространения волны, для чего выявим зависимость безразмерного волнового числа  $qL$  всей ячейки от безразмерной частоты  $\Omega$ . При построении таких графиков по уравнению (2.1) значения параметров  $\alpha$  вычисляются по формуле (2.2).



Фиг. 2. Дисперсионные кривые при вариации  $\theta$ .

В случае исходных данных

$$P_0 = 0.1 \text{ МПа}, \quad \gamma = 1.4 \quad (2.3)$$

на фиг.2 показаны зависимости частоты  $\Omega$  от величины  $qL$  при значениях  $\theta = 5$ ,  $\alpha = 1/(1 + \sqrt{\theta}) \approx 0.309$  – верхние,  $\theta = 20$ ,  $\alpha = 1/(1 + \sqrt{\theta}) \approx 0.183$  – нижние кривые.

Здесь отрезки между кривыми, параллельные оси  $\Omega$ , соответствуют значениям частот запираия в каждом из диапазонов, ширины которых характеризуются длинами отрезков.

Очевидно, что с увеличением  $\theta$  ширины диапазонов среза возрастают, а сами частоты уменьшаются по величине. С увеличением параметра  $\alpha$  ширины, наоборот, уменьшаются, а частоты возрастают. Заметим, что  $P_0$  не влияет на величину безразмерной частоты  $\Omega$ .

На фиг.3 представлена та же зависимость в главном диапазоне изменения (полупериоде  $[0, \pi]$ ) в случае  $\theta = 20$ . Видно, что с увеличением  $\Omega$  ширины диапазонов частот запираия остаются неизменно равными, а сами частоты в каждом из них с возрастанием  $qL$  уменьшаются по величине.

На фиг.4 представлена правая часть уравнения (2.1). Здесь прямая  $f_1 = -1$  отсекает частоты запираия. Видно, что ширины диапазонов среза меньше ширин диапазонов пропускания, что связано с распределением энергии падающей на границу раздела сред волны между энергиями отражённой  $I_1$  и прошедшей сквозь неё  $I_2$ , волн. Количественное отношение энергий определяется из полученной в [11] формулы

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{(z-1)^2}{4z}, \quad z = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}, \quad (2.4)$$

где  $z$  – относительный акустический импеданс. В силу малости величин  $\beta_1, \beta_2$  можно полагать:

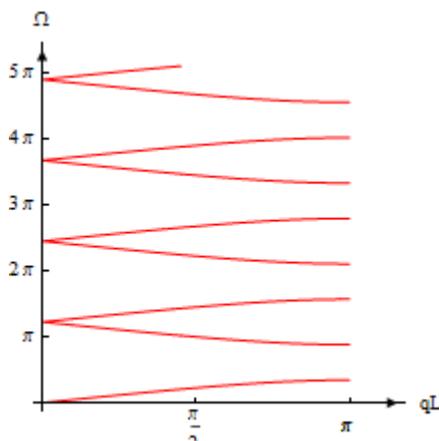
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}, \quad z = \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1} \frac{1}{\sqrt{\theta}}. \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует что  $I_1 / I_2 < 1$  при значениях  $0.1716 < z < 1$ , откуда вытекает неравенство

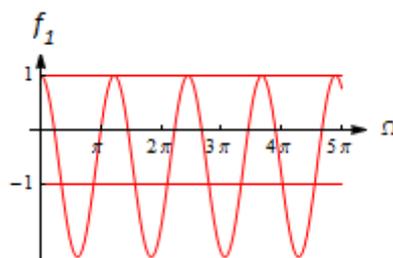
$$\beta_1 (\sqrt{\theta} - 0.1716) < 1/\theta - 0.1716, \quad 0.029 < \theta < 34,$$

определяющее область допустимых значений  $\beta_1$ . В рассматриваемом случае  $\theta = 20$  имеем  $\beta_1 < 0.0121$  и, в частности, при  $\beta_1 = 0.0025$ ,  $\beta_2 = 0.05$ , из (2.5) получим величину  $z = 0.213$ , подстановка которой в (2.4) даёт значение  $I_1 / I_2 = 0.727$ . А это означает, что большая часть звуковой энергии падающей волны проходит через

границу раздела двух акустических сред, т.е., действительно, ширины диапазонов частот пропускания больше ширины диапазонов среза.



Фиг.3. Дисперсионные кривые в полупериоде  $qL \in [0, \pi]$  при  $\theta = 20$ .



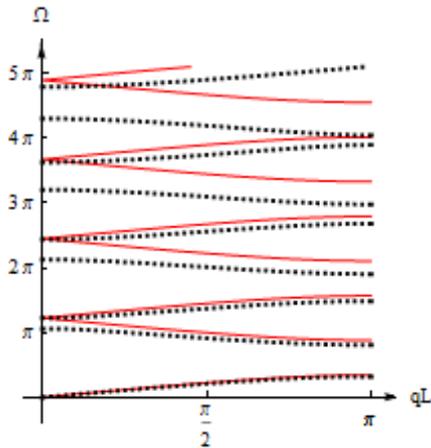
Фиг.4. Правая часть уравнения (2.1) при  $\theta = 20$ ,  $\alpha = 0,183$ .

Перейдём к численному исследованию уравнения (1.7), когда  $k_1 a \neq k_2 b$ , которое запишется в безразмерном виде

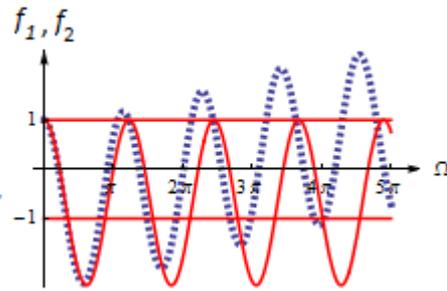
$$\cos qL = \cos[(1-\alpha)\Omega] \cos\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\theta}}\Omega\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right) \sin[(1-\alpha)\Omega] \sin\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\theta}}\Omega\right] \equiv f_2(\Omega) \quad (2.6)$$

где выражения  $\Omega$  и  $\theta$  приведены в (2.1) и (2.2).

Используя уравнение (2.6), выясним влияние газосодержаний на дискретную картину распространения волны и сравним со случаем уравнения (2.1). Вычисления проводятся с исходными данными (2.3). Заметим, что при использовании (2.1) и задании  $\theta$  значение  $\alpha$  вычисляется по формуле (2.2), а в рассматриваемом случае при выборе  $\theta$  значение  $\alpha$  уже задаётся. На фиг.5 приведены графики зависимости  $\Omega$  в главном диапазоне изменения  $qL \in [0, \pi]$  при  $\theta = 20$ ,  $\alpha = 1/(1 + \sqrt{\theta}) \approx 0.183$  – сплошные и  $\theta = 12.7$ ,  $\alpha = 0.219$  – пунктирные кривые. Видно, что при фиксированном  $qL$  с уменьшением  $\theta$  переход от сплошных кривых к пунктирным происходит сжатие по оси  $\Omega$ , что означает сужение соответствующих диапазонов как среза, так и пропускания.

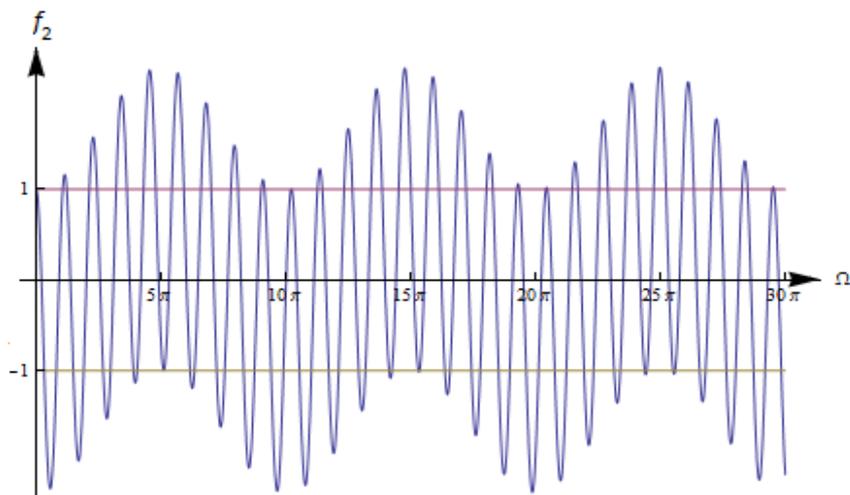


Фиг.5. Дисперсионные кривые в полупериоде  $qL \in [0, \pi]$  при вариации  $\theta$ .



Фиг.6. Правые части уравнений (2.6) и (2.1).

Для детального выявления картины распространения волн на фиг.6 приведены виды правых частей уравнений (2.6) и (2.1) при тех же значениях параметров и в той же области изменения  $\Omega \in [0, 5\pi]$ . Прямые  $f_1, f_2 = \pm 1$  отделяют частоты записания от частот пропускания, пунктирные кривые соответствуют правой части (2.6), а сплошные – правой части (2.1). Уменьшение  $\theta$  приводит также к изменению поведения кривых по оси  $f_2$ , что может привести к исчезновению нижних диапазонов среза и к появлению верхних.



Фиг.7. Правая часть уравнения (2.6) при  $\theta = 12.7, \alpha = 0.219$ .

Численные исследования указывают, что с увеличением  $\theta$  при  $\Omega \in [0, 5\pi]$  имеет место, наоборот, расширение по оси  $\Omega$  и возрастание по оси  $f_2$ . Таким образом, отклонение значения  $\theta$  в ту или в иную сторону от значения, соответствующего случаю  $k_1 a = k_2 b$ , всегда приводит к возрастанию максимумов и минимумов правой части (2.6) по оси  $f_2$ , что может привести к исчезновению нижних диапазонов среза и к появлению верхних.

Однако, при расширении области изменения  $\Omega$  максимумы и минимумы правой части (2.6) могут как возрастать, так и уменьшаться. Такие изменения ограничиваются двумя почти периодическими огибающими волн с одинаковыми периодами, что проиллюстрировано на фиг.7. Приведённая картина указывает, что расширяющиеся диапазоны среза сужаются и, наоборот, – с переходом от одного полупериода к последующему. Это означает также, что показанная на фиг.5 картина дисперсионных кривых периодически повторяется по  $\Omega$  с периодом огибающих.

**3. Учёт дисперсии.** Уравнение (1.7) перепишем в развёрнутой форме:

$$\begin{aligned} \cos qL = & \cos\left((1-\alpha)\frac{\Omega}{\sqrt{E_1}}\right)\cos\left(\sqrt{\theta}\frac{\alpha\Omega}{\sqrt{E_2}}\right) - \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} + \sqrt{\theta}\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right)\sin\left((1-\alpha)\frac{\Omega}{\sqrt{E_1}}\right)\sin\left(\sqrt{\theta}\frac{\alpha\Omega}{\sqrt{\theta}\sqrt{E_2}}\right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$E_1 = 1 - \frac{1-\beta_1}{3\beta_1}\xi^2\Omega^2, \quad E_2 = 1 - \frac{1-\beta_2}{3\beta_1}\xi^2\Omega^2, \quad \xi = \frac{R}{L}$$

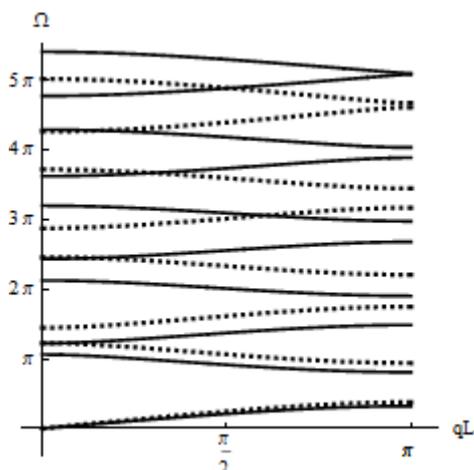
Выявим влияние вариации  $\xi$  на ширины диапазонов среза. Поскольку, в силу  $\beta_1 < \beta_2$ , на величину  $\Omega$  должно быть наложено ограничение

$$\Omega < \sqrt{\frac{3\beta_1}{1-\beta_1}} \frac{1}{\xi}, \quad (3.2)$$

то с возрастанием  $\xi$  значение  $\Omega$  должно убывать и, наоборот, с уменьшением  $\xi$  – возрастать. В связи с этим, соответственно уменьшаются и возрастают как ширины диапазонов среза, так и диапазоны частот пропускания. Если для уравнения (2.6) почти периодические огибающие указывали на почти периодичность картины распространения, то в данном случае такая картина отсутствует. В то же время имеем бесконечное множество диапазонов среза пропускания частот, которые сгущаются снизу к числу, определённом по правой части (3.2), являющееся резонансной частотой.

В реальных смесях  $R \leq 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $L \sim 1$  м и поэтому  $\xi \ll 1$ . На фиг.8 показаны зависимости диапазонов частот запираения от  $qL$  при частотах, далёких от резонансной. Пунктирные кривые соответствуют решениям уравнения (2.6), а сплошные – решениям уравнения (3.1). Видно, что происходит нелинейное сжатие по

оси  $\Omega$ , и, тем самым, уменьшение как ширины диапазонов среза, так и диапазонов частот пропускания.



Фиг.8. Дисперсионные кривые в полупериоде  $qL \in [0, \pi]$  при  $\theta = 12.7$ ,  $\alpha = 0.219$ ,  $\xi = 5 \cdot 10^{-4}$ .

**Закключение.** Исследуется случай, когда в замкнутом канале бесконечной длины с газожидкостной смесью реализуют пробки, первая из которых наполнена смесью с малым газосодержанием газа  $\beta_1$ , а вторая – с более высоким содержанием газа  $\beta_2$ . Принимается квазипериодичность структуры снарядного режима течения. Выведено трансцендентное дисперсионное уравнение, описывающее зависимость волнового числа Блоха всей ячейки от локальных волновых чисел в пробках. В качестве примера рассмотрены водовоздушные смеси. Численная реализация уравнений с заданными исходными параметрами смесей выявляет диапазоны значений частот запираания (диапазоны среза), при которых распространение волны отсутствует.

Показано, что в отсутствии эффекта дисперсии:

в частной задаче с уменьшением  $\theta$  – отношения газосодержаний  $\beta_2/\beta_1$  – ширины диапазонов среза уменьшаются, как и значения самих частот. В случае  $\theta = 20$  с увеличением частоты ширины диапазонов среза не меняются. При этом они меньше ширины диапазонов частот пропускания;

при исследовании общего уравнения с увеличением или уменьшением  $\theta$  имеет место соответственно расширение или сжатие картины распространения по оси  $\Omega$ ; картина дисперсионных кривых почти периодически повторяется по  $\Omega$ .

В случае учёта дисперсии при возрастании параметра  $\xi = R/L$  значения частот запираания убывают, а с её уменьшением – возрастают. Картина распространения волн не является периодической. Имеется бесконечное множество диапазонов среза, значения частот которых сгущаются снизу к резонансной частоте.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Martin C.S., Padmanabhan M. Pressure Pulse Propagation in Two-Component Slug Flow // Trans. of the ASME. 1979. V.101. №1. = Мартин К.С., Падманабхан М. Распространение импульса давления в двухкомпонентном снарядном потоке. // Теор. основы инж. расчётов. 1979. Т.101. №1. С.161-171.
2. Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Об одной модели снарядного потока газожидкостной смеси // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Чартарагет, 2014. С.340-344.
3. Brillouin L. et Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux periodiques. Paris: Masson et C<sup>ie</sup> Editeurs, Duror editeurs. = Бриллюэн А., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 448с.
4. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками. М.: Наука, 1989. 288с.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384с.
6. Донцов В.Е., Накоряков В.Е. Волны давления в газожидкостной среде с расслоённой структурой жидкость-пузырьковая смесь // ПИМТФ. 2003. Т.44. №4. С.102-108.
7. Григорян Ш.А., Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Распространение волны давления в замкнутом канале, наполненном периодическими пробками газожидкостной смеси и газа // Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №3. С.46-53.
8. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.
9. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с.
10. Ghazaryan K., Piliposyan D. Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structures // J. of Sound and Vibration, 330(26). 2011. Pp.6456-6466.
11. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496с.

Авторы благодарят А.С. Аветисяна за полезные советы, учёт которых способствовал улучшению оформления работы.

### **Сведения об авторах:**

**Оганян Гагик Гришасевич** – к.ф.м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. Тел. (+374 93) 946-947, **E-mail:** mechins@sci.am

**Саакян Саак Леонович** – к.ф.м.н., ЕГУ, фак-т информатики и прикладной математики. Тел. (+374 77) 002-408, **E-mail:** ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 04.05.2016