

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗГИБНОЙ
ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ БАЛОК**

Асланян Н.С. , Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярность, термоупругость, балка, изгиб, прикладная модель, краевая задача, точное решение, прочность, жёсткость, эффективные свойства.

Բանալի բառեր՝ միկրոպոլյար, ջերմաստաձգականություն, հեծան, ծռում, կիրառական մոդել, եզրային խնդիր, ճշգրիտ լուծում, ամրություն, կոշտություն, արդյունավետ հատկություններ:

Key words: micropolarity, thermoelasticity, bar, bending, applied model, boundary-value problem, exact solution, rigidity, stiffness, effective properties.

Ասլանյան Ն.Ս., Սարգսյան Ս.Հ.

**Միկրոպոլյար բարակ հեծանների ծռման դեֆորմացիայի ջերմաստաձգականության
մաթեմատիկական մոդելը**

Աշխատանքում զարգացվում է հայտնի վարկածների մեթոդը և կառուցվում միկրոպոլյար բարակ հեծանների ծռման դեֆորմացիայի ջերմաստաձգականության կիրառական մոդելը, ինչպես նաև հաստատվում նրան համապատասխան վարիացիոն սկզբունքը: Կառուցված այս կիրառական մոդելի կիրառմամբ դիտարկվում է որոշակի եզրային պայմաններով միկրոպոլյար հեծանի ծռման դեֆորմացիայի կոնկրետ խնդիր, երբ տրված է ջերմաստիճանային ֆունկցիայի որոշակի բաշխում: Դրված այդ խնդրի և համապատասխան դասական խնդրի համար (վերջինիս դեպքում ունենք հեծանի ծռման դեֆորմացիայի ջերմաստաձգական խնդիր, ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ) կառուցվել են ճշգրիտ լուծումները բանաձևային տեսքերով: Այդ լուծումների միջոցով կատարվել են հաշվումներ, ստացվել են թվային արդյունքներ, որոնց անալիզի հիման վրա հաստատվել են միկրոպոլյար նյութի արդյունավետ դրսևորումները դասական նյութի համեմատ հեծանի կոշտության և ամրության իմաստներով:

Aslanyan N.S. , Sargsyan S.H.

Mathematical model of thermoelasticity of bending deformation of micropolar thin bars

The known hypotheses method is developed in the present paper, applied model of thermoelasticity of bending deformation of micropolar thin bars is constructed and also the corresponding variation principle is obtained. Using the constructed model, problems of bending of micropolar bar are studied in case of different support conditions, when the distributed temperature function is given. Solutions in the form of formulas are obtained for the stated problem and for the corresponding classical problem (in this case we have the problem of thermoelastic bending with consideration of transverse shears). With the help of these solutions calculations are done, numerical results are obtained, on the basis of which analysis is done and effective properties of the micropolar material are revealed from the point of view of stiffness and rigidity, compared with the classical materials.

В работе развивается известный метод гипотез и построена прикладная модель термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких балок, а также устанавливается соответствующий вариационный принцип. Используя построенную модель, рассматривается задача изгиба микрополярной балки с определёнными условиями опирания, когда задана определённо-распределённая температурная функция. Для поставленной задачи и для соответствующей классической задачи (в последнем случае имеем задачу термоупругого изгиба балки с учётом поперечных сдвигов) построены точные решения в виде формул. При помощи этих решений выполнены расчёты, получены численные результаты, на основе их

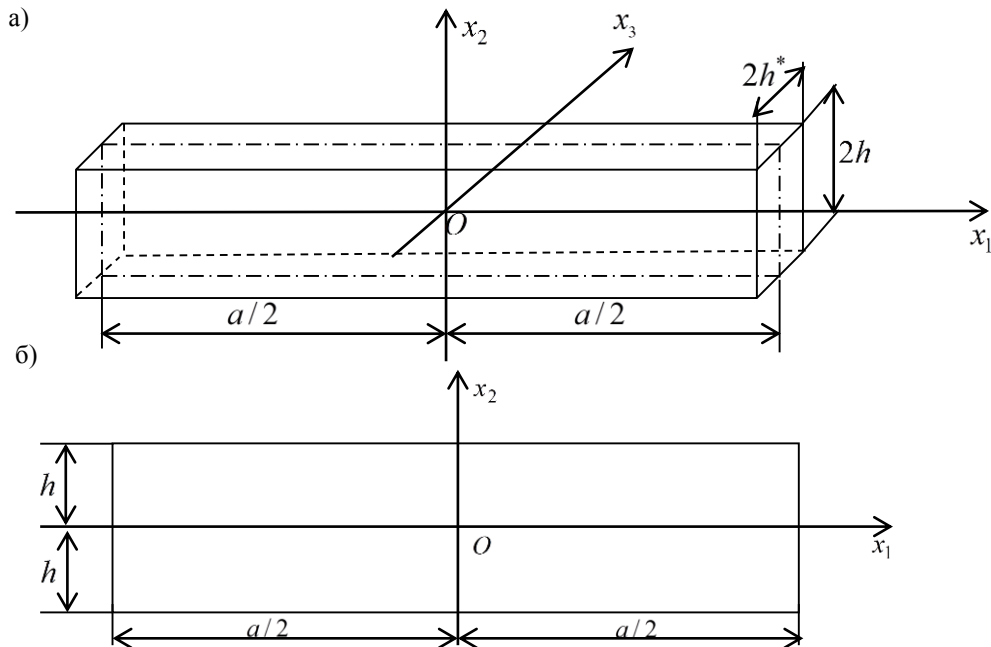
анализа установлены эффективные свойства микрополярного материала по сравнению с классическим материалом с точки зрения жёсткости и прочности балки.

Введение. Анализ температурных напряжений и деформаций в конструктивных элементах различного типа, работающих при высоких температурах, имеет исключительно большое значение [1-4]. Трёхмерная модель микрополярной термоупругости построена и изучена в работе [5].

В работах [6,7] построена прикладная модель термоупругости микрополярных тонких оболочек и пластин, изучена энергетика явления и получен общий вариационный принцип. В работе [8] построена прикладная модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин.

В данной работе построена прикладная модель термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких балок, и на её основе рассматривается решение конкретной прикладной задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим микрополярную балку (фиг.1а) с постоянным поперечным сечением $2h^* \times 2h$ и длиной a . Будем считать, что в направлении, перпендикулярном к плоскости фигуры, размер $2h^*$ (ширина балки) намного меньше размера $2h$ (толщина балки). В этом случае напряжения (как силовые, так и моментные) можно заменить их средними значениями по ширине и привести таким образом определение напряжений к решению обобщённой плоской задачи микрополярной упругости в срединной плоскости балки x_1, x_2 (фиг.1б). В этом случае ширина балки не будет играть никакой роли и в дальнейшем будем полагать эту ширину, равной единице ($2h^* = 1$).



Фиг. 1

Рассмотрим основные уравнения и граничные условия плоского напряжённого состояния квазистатической несвязанной микрополярной термоупругости [5]:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0. \quad (1.1)$$

Физические соотношения микрополярной термоупругости

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}] + \alpha_i T, \quad \gamma_{12} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{12} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{21}, \\ \gamma_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}] + \alpha_i T, \quad \gamma_{21} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{21} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\chi_{13} = B\mu_{13}, \quad \chi_{23} = B\mu_{23};$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Omega_3 \\ \chi_{13} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ – силовые напряжения; μ_{13}, μ_{31} – моментные напряжения; $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ – деформации; χ_{13}, χ_{23} – изгибы-кручения; u_1, u_2 – перемещения; ω_3 – свободный поворот; $T = T(x_1, x_2)$ – функция неравномерно распределенной температуры; $E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \alpha, B$ – упругие постоянные микрополярного тела; α_i – коэффициент линейного температурного расширения материала.

К уравнениям (1.1)-(1.3) микрополярной упругости следует присоединить граничные условия:

На лицевых линиях прямоугольника ($x_2 = \pm h$) заданы напряжения:

$$\sigma_{21} = X^\pm, \quad \sigma_{22} = Y^\pm, \quad \mu_{23} = M^\pm. \quad (1.4)$$

На торцевых линиях прямоугольника ($x_1 = 0; a$) рассмотрим следующие варианты граничных условий:

а) заданы конкретные значения для напряжений:

$$\sigma_{11}, \sigma_{12} \text{ и } \mu_{13}; \quad (1.5)$$

б) заданы конкретные значения для перемещений и поворота:

$$u_1, u_2 \text{ и } \omega_3; \quad (1.6)$$

в) заданы конкретные значения для

$$\sigma_{11}, u_2 \text{ и } \mu_{13}, \quad (1.7)$$

в этом случае имеют место условия смешанного характера, которые для прикладной модели приведут к шарнирному опиранию.

Общий вариационный функционал рассматриваемой задачи (1.1)-(1.7) имеет вид [5].

$$\begin{aligned}
I = \iint_S & \left\{ W - \left[\sigma_{11} \left(\gamma_{11} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \left(\gamma_{22} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \sigma_{12} \left[\gamma_{12} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right) \right] + \right. \right. \\
& + \sigma_{21} \left[\gamma_{21} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right) \right] + \mu_{13} \left(\chi_{13} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \right) + \mu_{23} \left(\chi_{23} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right) \left. \right\} dS - \\
& - \int_0^a \left[X^+ u_1 + Y^+ u_2 + M^+ \omega_3 \right]_{x_2=h} dx_1 - \int_0^a \left[X^- u_1 + Y^- u_2 + M^- \omega_3 \right]_{x_2=-h} dx_2 + I^*,
\end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned}
\text{а) } I^* = & \int_{-h}^h \sigma_{11}^* u_1 \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^h \sigma_{11}^* u_1 \Big|_{x_1=a} dx_2 + \int_{-h}^h \sigma_{12}^* u_2 \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^h \sigma_{12}^* u_2 \Big|_{x_1=a} dx_2 - \\
& + \int_{-h}^h \mu_{13}^* \omega_3 \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^h \mu_{13}^* \omega_3 \Big|_{x_1=a} dx_2
\end{aligned} \quad (1.9)$$

– в случае граничных условий (1.5);

$$\begin{aligned}
\text{б) } I^* = & \int_{-h}^h \sigma_{11} (u_1 - u_1^*) \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^h \sigma_{11} (u_1 - u_1^*) \Big|_{x_1=a} dx_2 + \int_{-h}^h \sigma_{12} (u_2 - u_2^*) \Big|_{x_1=0} dx_2 - \\
& - \int_{-h}^h \sigma_{12} (u_2 - u_2^*) \Big|_{x_1=a} dx_2 + \int_{-h}^h \mu_{13} (\omega_3 - \omega_3^*) \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^h \mu_{13} (\omega_3 - \omega_3^*) \Big|_{x_1=a} dx_2
\end{aligned} \quad (1.10)$$

– в случае граничных условий (1.6);

$$\begin{aligned}
\text{в) } I^* = & \int_{-h}^h \sigma_{11}^* u_1 \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^h \sigma_{11}^* u_1 \Big|_{x_1=a} dx_2 + \int_{-h}^h \sigma_{12} (u_2 - u_2^*) \Big|_{x_1=0} dx_2 - \\
& - \int_{-h}^h \sigma_{12} (u_2 - u_2^*) \Big|_{x_1=a} dx_2 + \int_{-h}^h \mu_{13}^* \omega_3 \Big|_{x_1=0} dx_2 - \int_{-h}^h \mu_{13}^* \omega_3 \Big|_{x_1=a} dx_2
\end{aligned} \quad (1.11)$$

в случае граничных условий (1.7).

W – плотность потенциальной энергии деформации термоупругого микрополярного тела:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \gamma_{11} + \sigma_{22} \gamma_{22} + \sigma_{12} \gamma_{12} + \sigma_{21} \gamma_{21} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{23} \chi_{23}) - \frac{\alpha T}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (1.12)$$

С учётом формул (1.2) выражение для W можем привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2) + (\mu + \alpha) (\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{12} \gamma_{21} + 2(\mu - \alpha) \gamma_{12} \gamma_{21} + \right. \\
& + B (\chi_{13}^2 + \chi_{23}^2) \left. \right\} - \frac{E}{1-\nu} (\gamma_{11} + \gamma_{22}) \alpha T.
\end{aligned} \quad (1.13)$$

Если рассматривать вариационное уравнение

$$\delta I = 0, \quad (1.14)$$

то в качестве уравнений Эйлера приходим к системе уравнений (1.1)-(1.3), а в качестве естественных граничных условий приходим к условиям (1.4)-(1.7).

Отметим, что на основании (1.13) легко получить следующие формулы типа Грина в микрополярной термоупругости:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{11}}, \sigma_{22} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{22}}, \sigma_{12} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{12}}, \sigma_{21} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{21}}, \mu_{13} = \frac{\partial W}{\partial \chi_{13}}, \mu_{23} = \frac{\partial W}{\partial \chi_{23}}. \quad (1.15)$$

Если в уравнениях (1.1)-(1.3) и в функционале (1.8) подставить $\alpha = 0$ и считать $M^+ = M^- = 0$, получим основные уравнения, граничные условия и функционал классической теории термоупругости плоского напряжённого состояния упругих тонких пластин.

Отметим, что поставленную задачу термоупругости микрополярного прямоугольника можно разделить на симметричную по x_2 задачу (т.е. растяжение–сжатие балки, в этом случае $\sigma_{11}, u_1, \sigma_{22}, \mu_{31}$ – чётные, $\sigma_{12}, \sigma_{21}, u_2, \mu_{13}$ – нечётные по x_2 функции) и на антисимметричную по x_2 задачу (т.е. изгиб балки в этом случае $\sigma_{12}, \sigma_{21}, u_2, \omega_3, \mu_{13}$ – чётные, а $\sigma_{11}, u_1, \sigma_{22}, \mu_{31}$ – нечётные по x_1 функции). В дальнейшем будем рассматривать задачу изгиба. В случае задачи изгиба примем следующие обозначения:

$$q_{x_1} = X^+ - X^-, q_{x_2} = Y^+ + Y^-, m = M^+ + M^-. \quad (1.16)$$

2. Исходные предположения. Принимая условие тонкостенности прямоугольника (балки) $2h \ll a$, будем развивать метод гипотез работ [6,7] для построения прикладной модели микрополярной термоупругости тонких балок.

В основу предлагаемой здесь прикладной модели термоупругости микрополярных тонких балок ставятся следующие предположения (гипотезы) кинематического и статического характера [6,7]:

1) Гипотеза кинематического характера. Согласно этой гипотезе, прямолинейный нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к средней линии до деформации, не остаётся перпендикулярным к ней после деформации, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины. Кроме того, точки указанного нормального элемента имеют также свободные вращения, для которых будем считать, что оно не изменяется вдоль толщинной координаты x_2 .

Кинематическую гипотезу математически запишем так: нормальное к средней линии балки перемещение и свободный поворот не зависят от координаты x_2 :

$$u_2 = w(x_1), \quad \omega_3 = \Omega_3(x_1), \quad (2.1)$$

а тангенциальное перемещение распределено по толщине балки линейным законом:

$$u_1 = x_2 \cdot \psi(x_1). \quad (2.2)$$

Отметим, что с точки зрения перемещений (формулы (2.1)₁, (2.2)) принятая выше кинематическая гипотеза, это, по сути дела, гипотеза, совпадающая с известной гипотезой Тимошенко в классической теории упругих тонких балок [9]. Кинематическую гипотезу в целом (формулы (2.1), (2.2)), как в работах [6-8], назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной термоупругости тонких балок.

2) Силовым напряжением σ_{22} в обобщённом законе Гука для деформации γ_{11} (формулы (1.2)₁) можем пренебречь относительно силового напряжения σ_{11} .

3) Будем принимать условие тонкостенности балки, т.е. $2h \ll a$.

4) При определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силового напряжения σ_{21} примем:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(x_1). \quad (2.3)$$

После вычисления указанных величин значение σ_{21} окончательно определим прибавлением к значению (2.3) результат интегрирования первого уравнения равновесия ((1.1)₁), наперёд удовлетворяя условие о равенстве нулю интеграла от $-h$ до $+h$.

5) Будем считать, что в тонкостенном случае рассматриваемого прямоугольника температура по толщине балки распределена по линейному закону. В случае задачи изгиба это означает, что

$$T = \frac{x_2}{2h} \tilde{T}(x_1). \quad (2.4)$$

3. Деформации, изгибы-кручения, силовые и моментные напряжения. В соответствии с принятым законом кинематической гипотезы (2.1), (2.2) для компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, из уравнений (1.3) получим:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= x_2 \cdot K_{11}, & \gamma_{22} &= 0, \\ \gamma_{12} &= \Gamma_{12}, & \gamma_{21} &= \Gamma_{21}, \\ \chi_{13} &= k_{13}, & \chi_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (3.2)$$

Теперь формулы (2.4) можем представить ещё и так:

$$\gamma_{11} = x_2 \cdot \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad \chi_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (3.3)$$

Здесь K_{11} – кривизна оси балки после деформации, связанная с силовым напряжением σ_{11} , а k_{13} – кривизна оси балки, связанная с моментным напряжением μ_{13} .

На основе обобщённого закона Гука (1.2), с учётом гипотезы 2), а также формул (2.4) и (3.1), для силовых напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ и моментного напряжения μ_{13} получим:

$$\sigma_{11} = Ex_2 \left(K_{11} - \alpha_t \frac{\tilde{T}}{2h} \right), \quad \sigma_{12} = (\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{21} = (\mu + \alpha)\Gamma_{21} + (\mu - \alpha)\Gamma_{12}, \quad \mu_{13} = Bk_{13}.$$

Рассматривая уравнения равновесия (1.1)₂ и (1.1)₃, с учётом граничных условий (1.4), для силового напряжения σ_{22} и моментного напряжения μ_{23} получим:

$$\sigma_{22} = x_2 \cdot \frac{q_{x_2}}{2h}, \quad \mu_{23} = x_2 \cdot \frac{m}{2h}. \quad (3.5)$$

Теперь, придерживаясь гипотезы 4), для силового напряжения σ_{21} окончательно получим:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(x_1) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_2^2}{2} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial x_1}, \quad (3.6)$$

$$\text{где } \sigma_{11}^1 = E \left(K_{11} - \alpha_t \frac{\tilde{T}}{2h} \right). \quad (3.7)$$

4. Усилия и моменты. Вывод основных уравнений прикладной модели микрополярных упругих тонких балок. В прикладной модели микрополярных балок вместо силовых и моментных напряжений удобно оперировать статически эквивалентными им внутренними усилиями и моментами:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-h}^h \sigma_{11} \cdot x_2 dx_2, & N_{12} &= \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_2, \\ N_{21} &= \int_{-h}^h \sigma_{21} dx_2, & L_{13} &= \int_{-h}^h \sigma_{13} dx_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

На основе формул (3.4) для напряжений, с учётом (4.1) приходим к следующим соотношениям термоупругости:

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3} (K_{11} - \alpha_t \chi_t), \quad N_{12} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{12} + (\mu - \alpha) \Gamma_{21}], \quad (4.2)$$

$$N_{21} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{21} + (\mu - \alpha) \Gamma_{12}], \quad L_{13} = 2h B k_{13},$$

где принято следующее обозначение:

$$\chi_t = \frac{\tilde{T}}{2h}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим выражения для $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \mu_{23}$ (формулы (3.5), (3.6)), удовлетворяя граничным условиям (1.4) с учётом (1.16), приходим к следующим уравнениям равновесия прикладной модели:

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -q_{x_2}, \quad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h q_{x_1}, \quad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -m. \quad (4.4)$$

Уравнения равновесия (4.4), соотношения упругости (4.2) и геометрические соотношения (3.2) представляют собой основные уравнения прикладной модели термоупругости микрополярных тонких балок.

Вариационный функционал прикладной модели термоупругости микрополярных тонких балок получим на основе формул (1.8)-(1.11) с учётом (2.1), (2.2), (3.1), (3.3), (3.4)-(3.6) и (3.17):

$$\begin{aligned}
I_0 = & \int_0^a \left\{ W_0 - M_{11} \left(K_{11} - \frac{d\psi}{dx_1} \right) - N_{12} \left[\Gamma_{12} - \left(\frac{dw}{dx_1} - \Omega_3 \right) \right] - \right. \\
& - N_{21} \left[\Gamma_{21} - (\psi + \Omega_3) \right] - L_{13} \left(k_{13} - \frac{d\Omega_3}{dx_1} \right) \left. \right\} dx_1 - \\
& - \int_0^a \left[q_{x_1} h\psi + q_{x_2} w + m\Omega_3 \right] dx_1 + I_0^*,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где W_0 – плотность потенциальной энергии деформации для прикладной модели:

$$W_0 = \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + h(\mu + \alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + Bhk_{13}^2 - \frac{2Eh^3}{3} K_{11}\alpha_i\chi_i; \tag{4.6}$$

$$\text{а) } I_0^* = M_{11}^*\psi|_{x_1=0} - M_{11}^*\psi|_{x_1=a} + N_{12}^*w|_{x_1=0} - N_{12}^*w|_{x_1=a} + L_{13}^*\Omega_3|_{x_1=0} - L_{13}^*\Omega_3|_{x_1=a}, \tag{4.7}$$

когда имеем следующие граничные условия

$$M_{11}|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad N_{12}|_{x_1=0;a} = N_{12}^*, \quad L_{13}|_{x_1=0;a} = L_{13}^* \tag{4.8}$$

(в частности, из (4.8) можем получить условия свободного края в микрополярной модели);

$$\begin{aligned}
\text{б) } I_0^* = & M_{11}(\psi - \psi^*)|_{x_1=0} - M_{11}(\psi - \psi^*)|_{x_1=a} + N_{12}(w - w^*)|_{x_1=0} - \\
& - N_{12}(w - w^*)|_{x_1=a} + L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3^*)|_{x_1=0} - L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3^*)|_{x_1=a},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

когда имеем следующие граничные условия

$$w|_{x_1=0;a} = w^*, \quad \psi|_{x_1=0;a} = \psi^*, \quad \Omega_3|_{x_1=0;a} = \Omega_3^* \tag{4.10}$$

(в частности, из (4.10) можем получить условия полной заделки края в микрополярной модели);

$$\begin{aligned}
\text{в) } I_0^* = & M_{11}^*\psi|_{x_1=0} - M_{11}^*\psi|_{x_1=a} + N_{12}(w - w^*)|_{x_1=0} - N_{12}(w - w^*)|_{x_1=a} + \\
& + L_{13}^*\Omega_3|_{x_1=0} - L_{13}^*\Omega_3|_{x_1=a},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

когда имеем следующие граничные условия

$$M_{11}|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad w|_{x_1=0;a} = w^*, \quad L_{13}|_{x_1=0;a} = L_{13}^* \tag{4.12}$$

(в частности, из (4.12) можем получить условия шарнирного опирания края в микрополярной модели с загруженными моментами или без них).

Варьируя функционал по всем функциональным аргументам, как уравнения Эйлера, приходим к основным уравнениям термоупругости микрополярных тонких балок (4.4), (4.2), (3.2) и, к граничным условиям (4.8), либо (4.10), либо (4.12).

Отметим, что если в уравнениях (4.4), (4.2), (3.2) и в функционале (4.5) микрополярной термоупругости для значения упругого постоянного α подставить нуль ($\alpha = 0$), а также, считать, что $M^+ = M^- = 0$, то придём к классической модели термоупругости тонких балок с учётом поперечных сдвиговых деформаций:

Уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -q_{x_2}, \quad N_{12} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = hq_{x_1} \quad (4.13)$$

Физические соотношения термоупругости

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}(K_{11} - \alpha_t \chi_t), \quad N_{12} = N_{21} = 2h\mu\Gamma \quad (4.14)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}. \quad (4.15)$$

Граничные условия:

а) свободный нагруженный край:

$$M_{11}|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad N_{12}|_{x_1=0;a} = N_{12}^*; \quad (4.16)$$

б) на краях балки заданы перемещение и поворот:

$$w|_{x_1=0;a} = w^*, \quad \psi|_{x_1=0;a} = \psi^* \quad (4.17)$$

(в частности, из (4.17) можно получить условия полной заделки);

в) когда имеют место граничные условия (1.7), для прикладной модели микрополярной балки будем иметь следующие граничные условия:

$$M_{11}|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad w|_{x_1=0;a} = w^* \quad (4.18)$$

(в частности, из (4.18) получим условия шарнирного опирания-загруженной моментом или без него).

Общий функционал для классической теории термоупругости тонких балок будет выражаться так:

$$I_0 = \int_0^a \left\{ W_0 - M_{11} \left(K_{11} - \frac{d\psi}{dx_1} \right) - N_{12} \left[\Gamma - \left(\frac{dw}{dx_1} + \psi \right) \right] \right\} dx_1 - \int_0^a [q_{x_1} h\psi + q_{x_2} w] dx_1 + I_0^*, \quad (4.19)$$

где плотность потенциальной энергии деформации W_0 будет :

$$W_0 = \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + \mu h \Gamma^2 - \frac{2Eh^3}{3} K_{11} \alpha_t \chi_t; \quad (4.20)$$

$$а) I_0^* = M_{11}^* \psi|_{x_1=0} - M_{11}^* \psi|_{x_1=a} + N_{12}^* w|_{x_1=0} - N_{12}^* w|_{x_1=a} \quad (4.21)$$

в случае граничных условий (4.16);

$$б) I_0^* = M_{11} (\psi - \psi^*)|_{x_1=0} - M_{11} (\psi - \psi^*)|_{x_1=a} + N_{12} (w - w^*)|_{x_1=0} - N_{12} (w - w^*)|_{x_1=a} \quad (4.22)$$

в случае граничных условий (4.17);

$$в) I_0^* = M_{11}^* \psi|_{x_1=0} - M_{11}^* \psi|_{x_1=a} + N_{12} (w - w^*)|_{x_1=0} - N_{12} (w - w^*)|_{x_1=a} \quad (4.23)$$

в случае граничных условий (4.18).

5. Численный пример. Рассмотрим тонкую балку (фиг. 2) толщиной $2h$, длиной a из однородного изотропного материала под действием температуры

$$T = T_0 \left(\frac{x_1}{a} + \frac{1}{2} \right) \frac{x_2}{2h}. \quad (5.1)$$

Отметим, что температурная распределённая функция (5.1) удовлетворяет двумерному уравнению стационарной теплопроводности.

Так как внешние усилия и моменты отсутствуют, основная система прикладной термоупругости микрополярных тонких балок (4.4), (4.2), (3.2) примет вид:

Уравнения равновесия

$$\frac{d\bar{N}_{12}}{d\bar{x}_1} = 0, \quad \bar{N}_{21} - \frac{d\bar{M}_{11}}{d\bar{x}_1} = 0; \quad (5.2)$$

$$\frac{d\bar{L}_{13}}{d\bar{x}_1} + \bar{N}_{12} - \bar{N}_{21} = 0.$$

Соотношения термоупругости

$$\bar{N}_{12} = 2\delta \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right) \Gamma_{12} + \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} \right) \Gamma_{21} \right], \quad \bar{N}_{21} = 2\delta \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right) \Gamma_{21} + \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} \right) \Gamma_{12} \right], \quad (5.3)$$

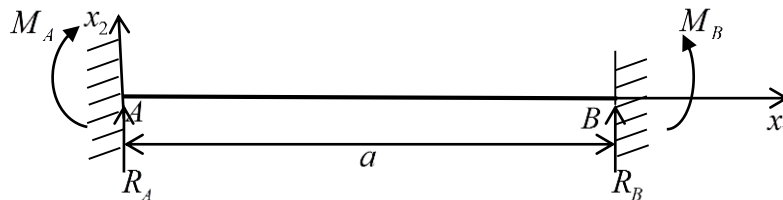
$$\bar{M}_{11} = \frac{4(1+\nu)}{3} \delta^3 \left[\frac{d\psi}{d\bar{x}_1} - \frac{\delta^{-1}}{2} \left(\bar{x}_1 + \frac{1}{2} \right) \alpha_i T_0 \right], \quad \bar{L}_{13} = 2\delta B^* \frac{d\Omega_3}{d\bar{x}_1}.$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{1}{a} \frac{d\psi}{d\bar{x}_1}, \quad k_{13} = \frac{1}{a} \frac{d\Omega_3}{d\bar{x}_1}. \quad (5.4)$$

Будем рассматривать случай, когда оба конца балки защемлены, т.е. имеют место следующие граничные условия:

$$\bar{w} = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x}_1 = 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 = 1. \quad (5.5)$$



Фиг. 2.

Отметим, что соотношения (5.2)-(5.5) приведены в безразмерной форме с помощью следующих обозначений:

$$\bar{N}_{12} = \frac{N_{12}}{a\mu}, \quad \bar{N}_{21} = \frac{N_{21}}{a\mu}, \quad \bar{M}_{11} = \frac{M_{11}}{a^2\mu}, \quad \bar{L}_{13} = \frac{L_{13}}{a^2\mu}, \quad B^* = \frac{B}{a^2\mu}, \quad (5.6)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{a}.$$

Из первого уравнения равновесия ((5.2)₁) получим:

$$\bar{N}_{12} = \text{const} = C_1. \quad (5.7)$$

Подставляя (5.7) в формулу (5.3)₁, после некоторых преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} - \psi - 2\Omega_3 \right) = \frac{1}{2} \delta^{-1} C_1 - \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right). \quad (5.8)$$

Суммируя первые две формулы из (5.3), получим:

$$\bar{N}_{12} + \bar{N}_{21} = 4\delta(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})$$

и имея в виду (5.7), для \bar{N}_{21} будем иметь:

$$\bar{N}_{21} = 4\delta \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right) - C_1. \quad (5.9)$$

Рассматривая второе уравнение равновесия из (5.2) и подставляя в это уравнение (5.9) и формулу для \bar{M}_{11} из (5.3), получим следующее уравнение:

$$4\delta \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right) - C_1 = \frac{4}{3} (1+\nu) \delta^3 \left[\frac{d^2\psi}{d\bar{x}_1^2} - \frac{\delta^{-1}}{2} \alpha_i T_0 \right]. \quad (5.10)$$

Теперь формулы для L_{13} из (5.3) и (5.7), (5.9) подставляя в третье уравнение равновесия из (5.2), приходим к следующему уравнению:

$$2B^* \delta \frac{d^2\Omega_3}{d\bar{x}_1^2} + 2C_1 - 4\delta \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right) = 0. \quad (5.11)$$

Рассмотрим систему уравнений (5.10) и (5.11), исключим из этих двух уравнений

выражение $4\delta \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right)$, в результате чего получим следующее равенство:

$$\Omega_3 = \frac{I}{2B^*} \left[\frac{4(1+\nu)}{3} \delta^2 \psi - \left(\frac{C_1}{2} \delta^{-1} + \frac{(1+\nu)}{3} \delta \alpha_i T_0 \right) \bar{x}_1^2 + \delta^{-1} (C_3 \bar{x}_1 + C_4) \right]. \quad (5.12)$$

Подставляя (5.12) в равенство (5.8) и выражая ψ через $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$, будем иметь:

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)}{3B^*} \delta^2 \frac{\alpha}{\mu}} \left[- \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \frac{\delta^{-1} \alpha}{B^* \mu} C_3 \bar{x}_1 - \right. \\ \left. - \frac{I}{B^* \mu} \left(\frac{1}{2} \delta^{-1} C_1 + \frac{(1+\nu)}{3} \delta \alpha_i T_0 \right) \bar{x}_1^2 + \delta^{-1} \left(\frac{1}{B^* \mu} C_4 + \frac{1}{2} C_1 \right) \right] \quad (5.13)$$

Если в равенстве (5.8) учесть значение Ψ через $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$, будем иметь формулу Ω_3 через

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} : \\ \Omega_3 = \frac{2(1+\nu)\delta^2}{3B^* \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)}{3B^*} \delta^2 \frac{\alpha}{\mu} \right)} \left[- \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \frac{\delta^{-1} \alpha}{B^* \mu} C_3 \bar{x}_1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{B^* \mu} \left(\frac{1}{2} \delta^{-1} C_1 + \frac{(1+\nu)}{3} \delta \alpha_i T_0 \right) \bar{x}_1^2 + \delta^{-1} \left(\frac{1}{B^* \mu} C_4 + \frac{1}{2} C_1 \right) \right] - \\ - \frac{I}{4B^*} \left(C_1 \delta^{-1} + \frac{2(1+\nu)}{3} \delta \alpha_i T_0 \right) \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2B^*} \delta^{-1} (C_3 \bar{x}_1 + C_4). \quad (5.14)$$

Если теперь формулу для Ψ ((5.13)) подставить в уравнения (5.10), для \bar{w} приходим к следующему дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$A \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}_1^3} + D \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} = K_1 \bar{x}_1^2 + K_2 \bar{x}_1 + K_3, \quad (5.15)$$

где

$$A = \frac{4(1+\nu)\delta^3 \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)}{3 \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)}{3B^*} \frac{\alpha}{\mu} \delta^2 \right)} ; \quad D = 4\delta \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)}{1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)}{3B^*} \frac{\alpha}{\mu} \delta^2} \right], \\ K_1 = \frac{1}{B^* \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)}{3B^*} \frac{\alpha}{\mu} \delta^2 \right)} \left[2 \frac{\alpha}{\mu} C_1 + \frac{4}{3} (1+\nu) \frac{\alpha}{\mu} \delta^2 \alpha_i T_0 \right],$$

$$K_2 = -\frac{4\frac{\alpha}{\mu}C_3}{B^*\left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*\mu}\delta^2\right)},$$

$$K_3 = -\frac{1}{B^*\left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*\mu}\delta^2\right)}\left[4\frac{\alpha}{\mu}C_4 + \frac{4}{3}C_1(1+\nu)\frac{\alpha}{\mu}\delta^2 + 2B^*C_1 + \frac{8}{9}(1+\nu)^2\frac{\alpha}{\mu}\delta^4\alpha_i T_0\right] + C_1 - \frac{2}{3}(1+\nu)\delta^2\alpha_i T_0.$$

Общее решение дифференциального уравнения (5.15) имеет вид:

$$\bar{w} = C_5 + C_6 \operatorname{sh}\lambda\bar{x}_1 + C_7 \operatorname{ch}\lambda\bar{x}_1 + \frac{K_1}{3D}\bar{x}_1^3 + \frac{K_2}{2D}\bar{x}_1^2 + \left(\frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2}\right)\bar{x}_1 \quad (5.16)$$

где C_5, C_6, C_7 – новые постоянные интегрирования.

Подставляя (5.16) в (5.13) и (5.14), получим окончательные выражения для Ψ и Ω_3 :

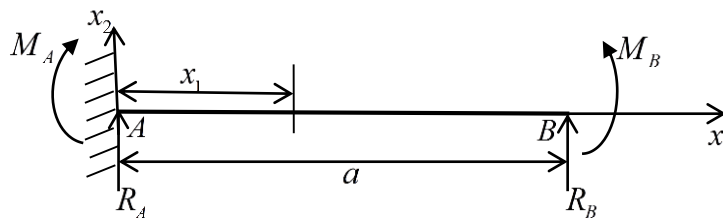
$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*\mu}\delta^2\frac{\alpha}{\mu}}\left[-\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)\left(C_7\lambda\operatorname{sh}\lambda\bar{x}_1 + C_6\lambda\operatorname{ch}\lambda\bar{x}_1 + \frac{K_1}{D}\bar{x}_1^2 + \frac{K_2}{D}\bar{x}_1 + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2}\right) - \frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{1}{2}\delta^{-1}C_1 + \frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_i T_0\right)\bar{x}_1^2 + \delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_3\bar{x}_1 + \frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_4 + \frac{1}{2}C_1\right)\right] \quad (5.17)$$

$$\Omega_3 = \frac{2(1+\nu)\delta^2}{3B^*\left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*\mu}\delta^2\frac{\alpha}{\mu}\right)}\left[-\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)\left(C_7\lambda\operatorname{sh}\lambda\bar{x}_1 + C_6\lambda\operatorname{ch}\lambda\bar{x}_1 + \frac{K_1}{D}\bar{x}_1^2 + \frac{K_2}{D}\bar{x}_1 + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2}\right) - \frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{\delta^{-1}}{2}C_1 + \frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_i T_0\right)\bar{x}_1^2 + \frac{\delta^{-1}\alpha}{B^*\mu}C_3\bar{x}_1 + \delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_4 + \frac{1}{2}C_1\right)\right] - \frac{1}{2B^*}\left(\frac{C_1}{2}\delta^{-1} + \frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_i T_0\right)\bar{x}_1^2 + \frac{1}{2B^*}\delta^{-1}(C_3\bar{x}_1 + C_4) \quad (5.18)$$

Для определения постоянных интегрирования $C_1, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$, на основе формул (5.16), (5.17), (5.18) удовлетворим граничным условиям (5.5), в результате получим

шесть линейных алгебраических уравнений относительно искомым постоянных интегрирования. Решая полученную алгебраическую систему уравнений, определяя значения $C_1, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ и подставляя их в выражения (5.16), (5.17), (5.18), получим решение поставленной граничной задач (5.2)-(5.5).

Поставленную задачу решаем также на основе классической теории термоупругого изгиба балок (4.13)-(4.15), (4.17) ($w = 0, \psi = 0$). Задачу будем решать методом сил сопротивления материалов [10]. Так как задача дважды статически неопределённая, выбираем основную систему (фиг.3).



Фиг.3

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} R_A + R_B &= 0, \\ M_B - M_A + R_B \cdot a &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Внутренние силовые факторы (поперечная сила и изгибающий момент) для основной системы будут:

$$\begin{aligned} N_{12} &= R_A = \text{const} = C_1, \\ M_{изг} &= M_{11} = M_A + R_A \cdot x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Перейдём к безразмерным величинам (5.6).

Подставим значения \bar{M}_{11} ((5.20)) и \bar{K}_{11} ((4.15)₂) в формулу (4.14)₁ и полученное

выражение для $\frac{d\psi}{d\bar{x}_1}$ проинтегрируем по \bar{x}_1 , получим:

$$\psi = \frac{3\delta^{-3}}{4(1+\nu)} \left(\bar{R}_A \cdot \frac{\bar{x}_1^2}{2} + \bar{M}_A \cdot \bar{x}_1 \right) + \frac{\delta^{-1} \alpha_r T_0}{4} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) + C_2. \quad (5.21)$$

Из этого выражения потребуем условия:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 = 1, \quad \psi = 0. \quad (5.22)$$

В результате получим

$$C_2 = 0 \quad (5.23)$$

и следующее уравнение:

$$\frac{\bar{R}_A}{2} + \bar{M}_A = -\frac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_i T_0}{3}, \quad (5.24)$$

также значение для ψ

$$\psi = \frac{3\delta^{-3}}{4(1+\nu)} \left(\bar{R}_A \cdot \frac{\bar{x}_1^2}{2} + \bar{M}_A \cdot \bar{x}_1 \right) + \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1). \quad (5.25)$$

Подставляя значение N_{12} ((5.20)₁) и формулу (5.25) для ψ в формулу (4.14)₂, определим производную $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$, интегрируя это выражение, получим общее решение

для функции w :

$$\bar{w} = \frac{\bar{R}_A \delta^{-1}}{2} \bar{x}_1 - \left[\frac{3\delta^{-3}}{8(1+\nu)} \left(\frac{\bar{R}_A}{3} \bar{x}_1^3 + \bar{M}_A \bar{x}_1^2 \right) + \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} \left(\frac{\bar{x}_1^3}{3} + \frac{\bar{x}_1^2}{2} \right) \right] + C_3. \quad (5.26)$$

Удовлетворив условиям

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{w} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 = 1, \quad \bar{w} = 0, \quad (5.27)$$

получим

$$C_3 = 0 \quad (5.28)$$

и уравнение

$$\bar{R}_A = \frac{3\delta^{-2}}{4(1+\nu)} \left(\frac{\bar{R}_A}{3} + \bar{M}_A \right) + \frac{5\alpha_i T_0}{12}, \quad (5.29)$$

а также формулу для \bar{w} :

$$\bar{w} = \frac{\bar{R}_A \delta^{-1}}{2} \bar{x}_1 - \frac{3\delta^{-3}}{8(1+\nu)} \left(\frac{\bar{R}_A}{3} \bar{x}_1^3 + \bar{M}_A \bar{x}_1^2 \right) - \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} \left(\frac{\bar{x}_1^3}{3} + \frac{\bar{x}_1^2}{2} \right). \quad (5.30)$$

Таким образом, для определения \bar{R}_A и \bar{M}_A получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\bar{R}_A}{2} + \bar{M}_A = -\frac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_i T_0}{3}, \\ \bar{R}_A = \frac{3\delta^{-2}}{4(1+\nu)} \left(\frac{\bar{R}_A}{3} + \bar{M}_A \right) + \frac{5\alpha_i T_0}{12}. \end{cases} \quad (5.31)$$

Решая эту систему для \bar{R}_A и \bar{M}_A , получим:

$$\begin{aligned} \bar{R}_A &= -\frac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_i T_0}{24(1+\nu)\delta^2 + 3}, \\ \bar{M}_A &= -\frac{(1+\nu)\delta^2(1+16(1+\nu)\delta^2)\alpha_i T_0}{24(1+\nu)\delta^2 + 3}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Окончательно, для \bar{w} и ψ получим:

$$\bar{w} = \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{12} \left[\frac{1}{8(1+\nu)\delta^2 + 1} - 1 \right] \bar{x}_1^3 + \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{8} \left[\frac{1 + 16(1+\nu)\delta^2}{8(1+\nu)\delta^2 + 1} - 1 \right] \bar{x}_1^2 - \frac{(1+\nu)\delta\alpha_i T_0}{3(8(1+\nu)\delta^2 + 1)} \bar{x}_1, \quad (5.33)$$

$$\psi = -\frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} \left[\frac{1}{8(1+\nu)\delta^2 + 1} - 1 \right] \bar{x}_1^2 - \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} \left[\frac{1 + 16(1+\nu)\delta^2}{8(1+\nu)\delta^2 + 1} - 1 \right] \bar{x}_1. \quad (5.34)$$

Приводим результаты численных вычислений. Расчёты выполнены при следующих значениях параметров задачи:

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \nu = 0.33, B^* = 1.5, T_0 = 60^\circ \text{ C}, \alpha_i = 125 \times 10^{-7} \text{ } \frac{1}{\text{гр.}}$$

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^{-7}$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^{-7}$	$\frac{W_{\max}^{mik.}}{W_{\max}^{kl.}}$
0	7.946	7.946	1
10^{-5}	7.941	7.946	0.99
10^{-3}	7.032	7.946	0.88
10^{-2}	5.227	7.946	0.66
2×10^{-2}	4.155	7.946	0.52
10^{-1}	1.158	7.946	0.15

Как убедились, при увеличении постоянной упругости α (микрополярной постоянной) жёсткость балки увеличивается.

6. Заключение. Развивая метод известных гипотез, построена прикладная модель термоупругой изгибной деформации микрополярной тонкой балки с независимыми полями перемещений и вращений. Для построенной модели устанавливается соответствующий вариационный принцип. Рассматривается по построенной прикладной модели изучение конкретной задачи термоупругого изгиба микрополярной тонкой балки с определёнными граничными условиями, когда задано изменение температурной функции. Построено точное решение для этой задачи, выполнен численный расчёт и его анализ. Установлены эффективные свойства микрополярного материала балки с точки зрения жёсткости и прочности по сравнению с классическим материалом.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелан Э., Паркус Г., Температурные напряжения вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматлит, 1958. 167 с. Melan E., Parkus G. Thermal stresses caused by stationary temperature fields. Moscow, Fizmatlit. 1958. 167p. (in Russian)
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 518с. Boley B., Weiner J. Theory of thermal stresses. Moscow, Mir. 1964. 518p. (in Russian)
3. Баженов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчёт конструкций на тепловые воздействия. М.: Изд. «Машиностроение», 1969. 600с. Bazhenov V.L., Goldenblat I.I., Nikolenko N.A., Sinyukov A.M. Calculation of structures on thermal influence. Moscow, Mashinostroeniye. 1969. 600p. (in Russian)
4. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344с. Podstrigach Ya. S., Shvets R.N. Thermoelasticity of thin shells. Kiev: Naukova-dumka. 1978. 344p. (in Russian)
5. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, Pergamon Press. 1986. 383p.
6. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells // Journal of Thermal Stresses. 2013. Vol. 36. issue 11, pp. 1200-1216.
7. Саркисян С.О. Некоторые общие вопросы теории термоупругости микрополярных тонких оболочек // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 2. сс.52-68. Sargsyan S.H. Some general questions of theory of thermoelasticity of micropolar thin shells // Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. Vol. 67. issue 2. pp. 52-68. (in Russian)
8. Асланян Н.С., Саркисян С.О. Математическая модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №1. С.34-47. Aslanyan N.S., Sargsyan S.H. Mathematical model of thermoelasticity of micropolar orthotropic thin plates // Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics. 2013. Vol. 66. issue 1. pp. 34-47. (in Russian)
9. Timoshenko S.P. Vibration problems in engineering. New-York: D van Nostrand C. 1937. 470p.
10. Феодосьев В.И. Сопроотивление материалов М.: Изд. «Наука», 1986. 512с. Feodosyev V.E. Strength of materials, Moscow, Nauka. 1986. 512p. (in Russian)

Информация об авторах:

Асланян Наира Самвеловна – аспирантка кафедры Высшей математики Гюмрийского государственного пед. института им. М.Налбандяна, (055) 73-57-24.

E-mail: asnaira73@mail.ru

Саркисян Самвел Оганесович – чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, (093) 15 16 98.

E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 01.06.2016