

УДК 539.3

**НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО
ПРОСТРАНСТВА С ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ
МЕЖФАЗНЫХ ДЕФЕКТОВ**

Акопян В.Н., Акопян Л.В.

Ключевые слова: двойкопериодическая задача, дефект, кусочно-однородное пространство

Key words: doubly-periodic problem, defect, piecewise homogeneous space

Բանալի բառեր: երկպարբերական, դեֆեկտ, կտոր առ կտոր համասեռ տարածություն

Hakobyan V.N., Hakobyan L.V.

Stress state of piece-wise homogeneous space with doubly-periodic system of interphase defects

In present paper the discontinuous solutions of equations for anti-plane problem of the elasticity theory for piece-wise space, formed by alternate junction of two heterogeneous layers with same thickness from different materials, with interphase doubly-periodic defects, when the displacements, as well as the stresses are discontinuous. Using these solutions the governing singular integral equations are written for two stated problems: the defect is the finite tunnel crack and the defect is finite tunnel crack with absolutely rigid thin inclusion welded to its one bank. The solutions of governing equations are built by the method of mechanical quadratures. The numerical analysis are fulfilled and the character of changing of the displacements of edges of cracks is revealed, the stress intensity factor and contact stresses on junction line of the inclusion with matrix are determined depending on geometrical and physical and mechanical parameters.

Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ.

**Երկպարբերական միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ
տարածության լարվածային վիճակը**

Կառուցված են նույն հաստության երկու տարբեր կյուբից պատրաստված շերտերի հաջորդաբար միացումից ստացված կտոր առ կտոր համասեռ տարածության խզվող լուծումները հակահարթ լարվածային վիճակի դեպքում, երբ տարածությունը շերտերի միացման հարթություններում պարունակում է երկպարբերական գծային թունելային դեֆեկտների համակարգ: Այդ լուծումների օգնությամբ ստացվել են երկու կոնկրետ խնդիրների որոշիչ հավասարումները՝ երբ դեֆեկտը իրենից ներկայացնում է ճաք կամ ճաք, որի ափերից մեկին ամրակցված է բացարձակ կոշտ ներդրակ: Որոշիչ հավասարումների լուծումները ստացվել են մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ: Պարզվել է քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակիցների, ճաքերի բացվածքների, ինչպես նաև կոնտակտային լարումների փոփոխման օրինաչափությունները՝ կախված խնդիրների ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

В настоящей работе в общем случае получены разрывные решения уравнений антиплоской задачи теории упругости для кусочно-однородного пространства, полученного поочерёдным соединением двух разнородных слоёв равной толщины из различных материалов, на плоскостях стыка которых имеются межфазные двойко-периодические дефекты, когда на дефектах имеют разрыв как смещения, так и напряжения. Используя эти решения, записаны определяющие сингулярные интегральные уравнения для двух конкретных задач, когда дефектом является конечная туннельная трещина и когда дефект представляет собой конечную туннельную трещину, на одном из берегов которой спаяно абсолютно жёсткое тонкое включение. Решения определяющих уравнений построены методом механических квадратур. Проведены численные расчёты и определены закономерности изменения разности смещений берегов трещин, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и контактные напряжения на сцеплённой с матрицей стороне включения в зависимости от геометрических и физико-механических параметров.

Введение. Периодическими и дwoякопериодическими задачами для однородных массивных тел с дефектами начали заниматься ещё в шестидесятые и семидесятые годы прошлого века. При помощи анализа периодических функций и мощного аппарата комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили были построены разрывные решения антиплоской и плоской задач уравнений теории упругости с дефектами для упругих пространств и плоскости, на основе которых были записаны определяющие уравнения ряда периодических и дwoякопериодических задач и построены их замкнутые или эффективные решения. Многие результаты, полученные в этом направлении, подытожены в монографиях [1,2]. На этой основе была предложена также теория регулярно армированных композитов [3]. Что же касается аналогичных задач для кусочно-однородных тел, то рассмотрены лишь несколько антиплоских и плоских периодических задач для составного двухкомпонентного пространства с дефектами [4-7]. Периодические и дwoяко-периодические задачи для кусочно-однородных тел с дефектами, которые в настоящее время весьма актуальны с точки зрения слоистых композитов, как нам известно, впервые были рассмотрены в работах [8,9].

1. Постановка задачи и вывод разрывных решений. Рассмотрим антиплоское напряжённое состояние кусочно-однородного пространства, изготовленного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв толщины $2H$ с модулями сдвигов G_1 и G_2 , на плоскостях соединения которых $y = 2nH$ ($n \in Z$)

по полосам $\left\{ x \in L = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}$ ($-\infty < z < \infty$), где $a_n = -a + 2nl$,

$b_n = a + 2nl$, содержит дwoякопериодическую систему туннельных дефектов типа трещин, полностью или частично сцеплённых абсолютно жёстких или инородных включений. Полагаем, что пространство деформируется под воздействием таких периодических с периодом $2l$ нагрузок, действующих на дефекты, при которых плоскости $y = (2n + 1)H$ ($n \in Z$) являются плоскостями симметрии.

Очевидно, что при такой постановке задачи напряжённое состояние в составных слоях, находящихся между плоскостями симметрии $y = (2k - 1)H$ и $y = (2k + 1)H$, будут одинаковыми и, следовательно, можно рассмотреть только двухкомпонентный слой между плоскостями симметрии $y = -H$ и $y = H$.

Сначала построим разрывные решения для двухкомпонентного слоя с периодической системой межфазных дефектов, считая, что разрывы напряжений и смещений на дефектах описываются соответственно функциями $\tau(x)$ и $W(x)$. Снабдив все величины, описывающие напряжённо-деформированное состояние верхнего и нижнего слоёв соответственно индексами 1 и 2, эту задачу математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1(x, H) = W_2(x, -H) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) \quad (x \notin L) \\ W_1(x, 0) = W_2(x, 0) \quad (x \notin L) \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) - \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = \tau(x) \quad (x \in L) \\ W_1(x, 0) - W_2(x, 0) = W(x) \quad (x \in L) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где $W_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) – компоненты смещений точек соответствующих слоёв, каждая из которых в области своего определения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 W_j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1.2)$$

и связаны с компонентами напряжений $\tau_{yz}^{(j)}(x, y)$ соотношениями

$$\tau_{yz}^{(j)}(x, y) = G_j \frac{\partial W_j(x, y)}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Построим решение граничной задачи (1.1), используя решения аналогичной задачи для слоистого композита с периодической системой параллельных межфазных дефектов, полученных в работе [9]. При помощи этих решений решения граничной задачи (1.1) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) &= \frac{G}{G+1} \tau(x) + \frac{G_1}{2H(G+1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \operatorname{cth}(\lambda(s-x)) W'(s) ds; \\ \frac{dW_1(x, 0)}{dx} &= \frac{W'(x)}{G+1} - \frac{1}{2HG_2(G+1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{\tau(s) ds}{\operatorname{sh}(\lambda(s-x))}; \\ \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) &= \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) - \tau(x); \quad \frac{W_2(x, 0)}{dx} = \frac{W_1(x, 0)}{dx} - W'(x). \\ &(G = G_1 / G_2; \lambda = \pi / 2H) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Учитывая периодичность функций $\tau(x)$ и $W(x)$, т.е. соотношения

$$\tau(x + 2nl) = \tau(x); \quad W'(x + 2nl) = W'(x),$$

можем записать:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \operatorname{cth}(\lambda(s-x)) W'(s) ds &= \int_{-a}^a \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}(\lambda(s-x+2nl)) \right\} W'(s) ds; \\ \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{\tau(s) ds}{\operatorname{sh}(\lambda(s-x))} &= \int_{a_n}^{b_n} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda(s-x)+2nl)} \right\} \tau(s) ds. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеют место представления [1, 10]

$$\operatorname{cth}\left(\frac{\pi x}{2H}\right) = \frac{H}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}(Hs) e^{isx} ds; \quad \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi x / 2H)} = \frac{H}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th}(Hs) e^{isx} ds,$$

где интегралы нужно понимать в смысле обобщённых функций.

Тогда, учитывая соотношения [12]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2nlx) = \pi [\delta(2lx - 2\pi k) + \delta(2lx + 2\pi k)];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right),$$

где $\delta(x)$ – известная функция Дирака, а k – целое число, после некоторых преобразований, вводя обозначения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2H} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}(\lambda(x + 2nl)) &= \frac{1}{l} \left[\frac{x}{2H} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{l} H\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2l} \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + K_1(x) \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2H} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda(x + 2nl))} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{th}\left(\frac{\pi k}{l} H\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) = \frac{1}{2l} \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + K_2(x) \right],$$

первые два соотношения (1.4) представим в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) &= \frac{G}{G+1} \tau(x) + \frac{G_1}{2l(G+1)} \int_{-a}^a \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(s-x)}{2l}\right) + K_1(s-x) \right] W'(s) ds; \\ \frac{dW_1(x, 0)}{dx} &= \frac{W'(x)}{G+1} - \frac{1}{2lG_2(G+1)} \int_{-a}^a \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(s-x)}{2l}\right) + K_2(s-x) \right] \tau(s) ds, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где функции $K_j(x)$ ($j = 1, 2$) – экспоненциально сходящиеся ряды:

$$K_1(x) = \frac{x}{H} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\pi k}{l} H\right) - 1 \right] \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right);$$

$$K_2(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{th}\left(\frac{\pi k}{l} H\right) - 1 \right] \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right).$$

Последние два соотношения (1.4) остаются неизменно.

Используя соотношение (1.5) и последние два соотношения (1.4), нетрудно сразу записать определяющие уравнения ряда задач для кусочно-однородного пространства, изготовленного при помощи поочерёдного соединения двух разнородных слоёв равной толщины с двояко-периодическими межфазными дефектами различных типов. В качестве примера рассмотрим две конкретные задачи.

2. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с двояко-периодической системой трещин. Сначала рассмотрим случай, когда дефекты представляют собой туннельные трещины длины $2a$, на верхние и нижние берега которых действуют распределённые нагрузки $\tau_0^{(j)}(x)$ ($j=1,2$). Тогда на берегах трещин имеют место условия

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,0) = \tau_0^{(j)}(x) \quad (j=1,2)$$

или в другой форме

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x,0) + \tau_{yz}^{(2)}(x,0) = \tau_0^+(x); \\ \tau(x) = \tau_0^-(x); \end{cases} \quad (|x| < a) \quad (2.1)$$

$$(\tau_0^\pm(x) = \tau_0^{(1)}(x,0) \pm \tau_0^{(2)}(x,0)).$$

Учитывая второе уравнение (2.1), при помощи соотношений (1.5) удовлетворим первому из условий (2.1). В итоге, после некоторых простых преобразований, для определения производной от разности смещений берегов трещины придём к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{W'(s)}{s-x} ds + \int_{-a}^a K_1^*(s-x)W'(s)ds = f(x), \quad (2.2)$$

где

$$f(x) = \frac{(G+1)\tau_0^+(x)}{G_1} - \frac{(G-1)\tau_0^-(x)}{G_1}; \quad K_1^*(x) = \frac{1}{2l}K_1(x) + \frac{1}{2l}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2l}\right) - \frac{1}{\pi x}.$$

Уравнение (2.2) будем рассматривать совместно с условием непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_{-a}^a W'(s)ds = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) решим методом механических квадратур. С этой целью, при помощи замены переменных $s \rightarrow as$ и $x \rightarrow ax$, его сформулируем на интервале $(-1,1)$ и вводя обозначения

$$W'(xa) = \varphi(x); \quad aK_1^*(ax) = K(x); \quad f(xa) = f_*(x),$$

запишем в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s)}{s-x} ds + \int_{-1}^1 K(s-x)\varphi(s)ds = f_*(x). \quad (2.4)$$

При этом, условие (2.3) примет вид:

$$\int_{-1}^1 \varphi(s)ds = 0 \quad (2.5)$$

Очевидно, что решение уравнения (2.4) в концевых точках трещины имеет обычную корневую особенность, что позволяет его представить в следующем виде:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_*(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2.6)$$

где $\varphi_*(x)$ – непрерывная гладкая функция, ограниченная вплоть до концов интервала $[-1, 1]$.

Подставляя значения функций $\varphi(x)$ в (2.4), (2.5) и используя соотношения, приведённые в [13], по стандартной процедуре придём к системе алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_*(\xi_i)$ ($i = 1, \dots, n$), после определения которых нетрудно восстановить функцию $\varphi_j(x)$ ($-1 < x < 1$) и определить все компоненты напряжений и деформаций в двухкомпонентной ячейке. В частности, приведённая разность смещений точек берегов трещины определится формулой:

$$W_*(x) = W(ax) / 2a = \frac{1}{2} \int_{-1}^x \varphi(x) dx, \quad (2.7)$$

а безразмерные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины определяются по формуле (1.5), которая при помощи функции $\varphi(x)$ записывается следующим образом:

$$\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax, 0)}{G_1} = \frac{1}{\pi(G+1)} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} + K_1^*(s-x) \right] \varphi(s) ds \quad (|x| > 1).$$

Подставляя сюда значения функций $\varphi(x)$ из (2.5) и учитывая соотношение [11]

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{(s-a)^{\gamma-1} (b-s)^{-\gamma} ds}{(s-x)} = - \frac{\text{sign}(x)}{\sin \pi\gamma |a-x|^\gamma |b-x|^{1-\gamma}} \quad (x < a; x > b) \quad (2.8)$$

при $\gamma = 1/2$, после некоторых преобразований коэффициент интенсивности запишем в виде:

$$\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax, 0)}{G_1} = - \frac{\text{sign}(x) \varphi_*(c)}{2\pi(G+1)\sqrt{x^2-1}} + R_1(x).$$

Здесь $c = \pm 1$, а функция $R_1(x)$ ограничена в точках $x = \pm 1$. Используя полученное выражение для определения приведённых коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений, получим формулы:

$$K_{III}(\pm a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{|x \mp 1|} \frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax, 0)}{G_1} = \mp \frac{\sqrt{\pi} \varphi_*(\pm 1)}{2(G+1)}.$$

Численные результаты. Проведён численный расчёт, когда пространство деформируется под воздействием равным по величине и противоположно направленным равномерно распределёнными нагрузками интенсивности τ_0 , т.е.,

когда $\tau_0^{(1)}(x) = \tau_0^{(2)}(x) = -\tau_0$. При этом, принято $\tau_0 / G_1 = 0.1$ и изучены закономерности изменения коэффициентов интенсивности напряжений в концевых точках трещины и разности смещений точек берегов трещины в зависимости от параметров G , $\lambda_1 = a/l$ и $\lambda_2 = H/l$. Численные расчёты показывают, в чём можно убедиться и аналитически, что в случае, когда $\tau_0^{(-)}(x) = 0$, коэффициенты интенсивности приведённых напряжений не зависят от соотношений модулей сдвигов разнородных слоёв G , а разность смещений точек берегов трещины прямо пропорциональна числу $(G_1 + G_2) / G_1 G_2$. В табл. 1 и 2 приведены значения коэффициентов интенсивности приведённых напряжений в концевых точках трещин в зависимости от изменения λ_1 и λ_2 . Они показывают, что при постоянных размерах прямоугольной ячейки приведённые коэффициенты интенсивности напряжений при увеличении длины трещины также увеличиваются (табл.1). А при постоянных значениях l и a , при увеличении ширины полосы коэффициенты интенсивности напряжений уменьшаются, стремясь к определённой величине (табл.2).

Таблица 1. $\lambda_2 = 0.5$

λ_1	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$K_{III}(\pm a)$	0.08865	0.08873	0.08905	0.08957	0.09026	0.0915

Таблица 2. $\lambda_1 = 0.1$

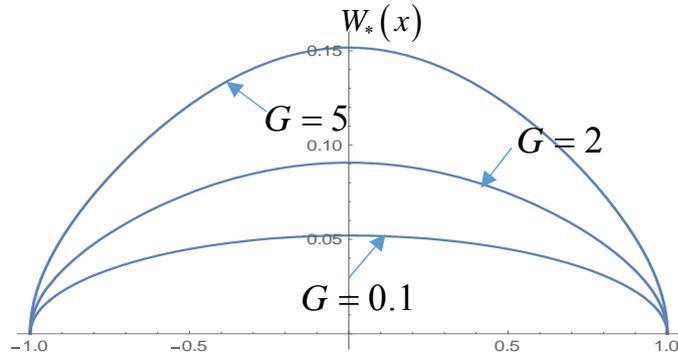
λ_2	0.1	0.5	1	2	5
$K_{III}(\pm a)$	0.09137	0.0887	0.0886	0.08856	0.08852

Проведён численный расчёт также в случае, когда $\tau_0^{(1)}(x) = -\tau_0$ и $\tau_0^{(2)}(x) = -0.5\tau_0 \cos(\pi x/2)$. При этом, опять принято $\tau_0 / G_1 = 0.1$. В этом случае при постоянной геометрии увеличение соотношений модулей сдвигов разнородных слоёв G приводит к уменьшению коэффициентов интенсивности напряжений (табл. 3).

Таблица 3. $\lambda_1 = 0.1$; $\lambda_2 = 0.5$

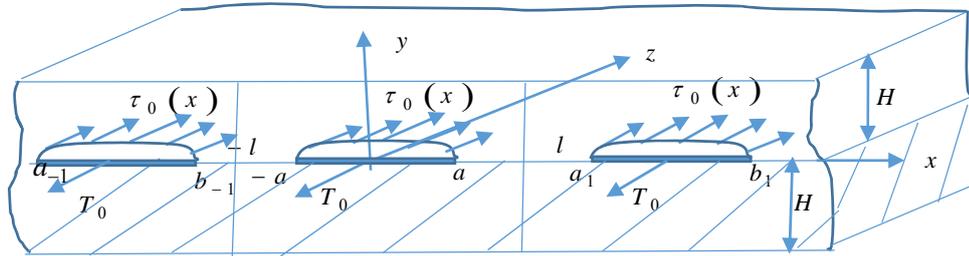
G	0.1	0.5	1	2	3	5
$K_{III}(\pm a)$	0.0825	0.0661	0.0547	0.0435	0.0378	0.0322

На фиг.1 приведены графики приведённой разности смещений точек берегов трещины $W_*(x)$ в зависимости от параметра G . Они показывают, что при увеличении G разность смещений также увеличивается.



Фиг.1

3. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с двояко-периодической системой частично отслоившихся абсолютно жёстких включений. Далее рассмотрим случай, когда дефекты представляют собой туннельные трещины длины $2a$, на нижнем берегу которых спаяно абсолютно жёсткое включение. Будем считать, что пространство деформируется под воздействием распределённой нагрузки $\tau_0(x)$, действующей на верхний берег трещины, и сосредоточенной нагрузки T_0 , приложенной к включению (фиг.2).



Фиг.2

На берегах трещин выполняются условия:

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x, +0) = \tau_0(x); \\ W_2'(x, -0) = 0. \end{cases} \quad (|x| < a) \quad (3.1)$$

При помощи разрывных решений (1.5), удовлетворив этим условиям, придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{cases} \tau_*(x) + \frac{1}{\pi G} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{s-x} + K_1^*(s-x) \right] W'(s) ds = \frac{G+1}{GG_1} \tau_0(x); \\ W'(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{s-x} + K_2^*(s-x) \right] \tau_*(s) ds = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Эту систему рассмотрим вместе с условиями непрерывности смещений в концевых точках трещины и условием равновесия включения, записанного при помощи функции $\tau_*(x)$:

$$\int_{-a}^a W'(s) ds = 0, \quad \int_{-a}^a \tau_*(s) ds = T_0^*. \quad (3.3)$$

Здесь

$$K_2^*(x) = \frac{\pi}{2l} K_2(x) + \frac{\pi}{2l} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi x}{2l} \right) - \frac{1}{x};$$

$$\left(\tau_*(x) = \tau(x) / G_1; \quad T_0^* = \left(\int_{-a}^a \tau_0(s) ds - T_0 \right) / G_1 \right).$$

Чтобы решить систему (3.2) методом механических квадратур, при помощи замены переменных сформулируем её на интервал $[-1, 1]$, введём в рассмотрение функции

$$\varphi_j(x) = W'(ax) + (-1)^{j+1} \sqrt{G} \tau_*(ax) \quad (j=1, 2)$$

и обозначив

$$K_{11}(x) = \frac{a [K_1^*(ax) + K_2^*(ax)]}{2\pi\sqrt{G}}; \quad K_{12}(x) = \frac{a [K_1^*(ax) - K_2^*(ax)]}{2\pi\sqrt{G}};$$

$$K_{21}(x) = -K_{12}(x); \quad K_{22}(x) = -K_{11}(x);$$

$$f_j(x) = (-1)^{j+1} \frac{G+1}{\sqrt{GG_1}} \tau_0(ax); \quad (j=1, 2),$$

запишем в виде:

$$\varphi_j(x) + \frac{(-1)^{j+1}}{\pi\sqrt{G}} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(s) ds}{s-x} + \int_{-1}^1 K_{j1}(s-x) \varphi_1(s) ds +$$

$$+ \int_{-1}^1 K_{j2}(s-x) \varphi_2(s) ds = f_j(x) \quad (3.4)$$

При этом, условия (3.3) примут вид:

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(s) ds = (-1)^{j+1} \sqrt{GT_0^*} / a \quad (j=1, 2). \quad (3.5)$$

Методом Мусхелишвили нетрудно убедиться, что искомые функции в точках ± 1 имеют показательную особенность типа $\omega_j(x) = (1+x)^{-\gamma_j} (1-x)^{\gamma_j-1}$ ($j=1, 2$), где

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0.5 + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{G}}{1-G} \right) & (G \leq 1) \\ 1 - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{G}}{G-1} \right) & (G \geq 1) \end{cases}; \quad \gamma_2 = 1 - \gamma_1.$$

Исходя из этого, решение системы (3.2) представим в виде

$$\varphi_j(x) = \varphi_j^*(x) \omega_j(x) \quad (j = 1, 2), \quad (3.6)$$

где $\varphi_j^*(x)$, как и в первой задаче, – непрерывная гладкая функция, ограниченная вплоть до концов интервала $[-1, 1]$.

Подставляя значения функций $\varphi_j(x)$ в (3.3), (3.4) и используя соотношения, приведённые в [13], по стандартной процедуре, опять придём к системе алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_j(\xi_i)$ ($i = 1, \dots, n$). После определения $\varphi_j(\xi_i)$ легко восстановить функцию $\varphi_j(x)$ ($-1 < x < 1$) и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в двухкомпонентной ячейке. В частности, приведённые контактные напряжения, действующие на сцеплённой стороне включения и разность смещений точек берегов трещины, определяются формулами:

$$\tau_*^{(2)}(x) = -\frac{\tau_{yz}^{(2)}(ax, 0)}{G_1} = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{2\sqrt{G}} - \frac{\tau_0(x)}{G_1},$$

$$W_*(x) = \frac{W(ax)}{2a} = \frac{1}{4} \int_{-1}^x [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] dx.$$

Приведённые же коэффициенты интенсивности в концевых точках трещины определяются при помощи формулы (1.5), которая при $|x| > 1$ в новых обозначениях можно записать в виде:

$$\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax, 0)}{G_1} = \frac{1}{2\pi(G+1)} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} + K_1^*(s-x) \right] (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) ds$$

Подставляя сюда значения функций из (3.6) и учитывая соотношение (2.8), после некоторых преобразований запишем в виде:

$$\frac{\tau_{yz}^{(j)}(ax, 0)}{G_1} = -\frac{\operatorname{sign}(x)}{2\pi(G+1)\sin(\pi\gamma_1)} \left\{ \frac{\varphi_1^*(c)}{|x+1|^{\gamma_1}|1-x|^{1-\gamma_1}} + \frac{\varphi_2^*(c)}{|x+1|^{1-\gamma_1}|1-x|^{\gamma_1}} \right\} + R_2(x).$$

Здесь $c = \pm 1$, а функция $R_2(x)$ ограничена в точках $x = \pm 1$.

Тогда, для коэффициентов интенсивности безразмерных разрушающих напряжений получим формулы:

$$K_{III}(a) = -\frac{\sqrt{2\pi}\phi_2^*(1)}{2^{2-\gamma_1}(G+1)\sin(\pi\gamma_1)}; \quad K_{III}(-a) = \frac{\sqrt{2\pi}\phi_1^*(-1)}{2^{2-\gamma_1}(G+1)\sin(\pi\gamma_1)}.$$

Численные результаты. Проведён численный расчёт в случае, когда на верхний берег трещины действует равномерно распределённая нагрузка интенсивности τ_0 , а на жёсткое включение действует уравнивающая сосредоточенная нагрузка T_0 , т.е. в случае, когда $\tau_0(x) = -\tau_0 = \text{const}$ и $T_0^* = 0$. При этом принято $\tau_0 / G_1 = 0.1$ и $\lambda_2 = H / l = 0.5$. Изучены закономерности изменения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, контактных напряжений, действующих на сцеплённую с матрицей сторону включения, а также разности смещений точек берегов трещины в зависимости от изменения параметров G и $\lambda_1 = a / l$.

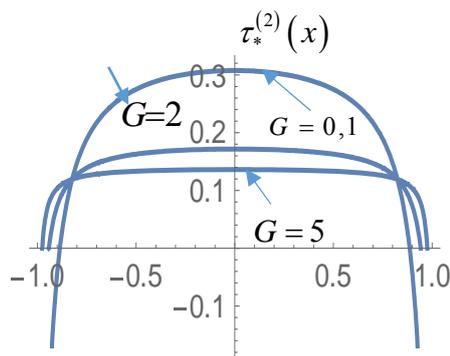
Результаты расчётов приведены в табл. 3-4 и фиг.3-6. Из приведённых таблиц явствует, что при постоянных геометрических характеристиках увеличение параметра G приводит к уменьшению коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений, а при постоянных размерах ячейки и постоянного значения параметра G , параметр λ_1 мало влияет на значения коэффициентов интенсивности.

Таблица 4. $\lambda_1 = 0.2$

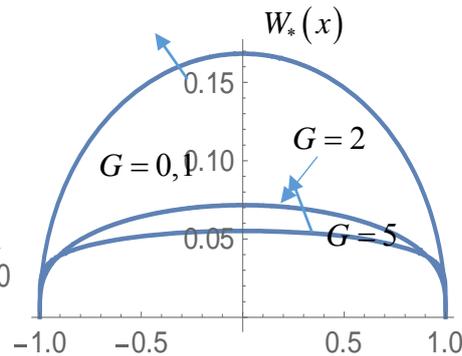
G	0.1	0.5	1	2	3	5
$K_{III}(\pm a)$	0.1069	0.03369	0.0189	0.0100	0.0068	0.0041

Таблица 5. $G = 0.5$

λ_1	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$K_{III}(\pm a)$	0.03330	0.03338	0.03369	0.03416	0.03475	0.03540



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 и 4 приведены, соответственно, графики безразмерных контактных напряжений $\tau_*^{(2)}(x)$ и разности смещений берегов трещины $W_*(x) = W(x) / 2a$ при различных значениях G в случае, когда $\lambda_1 = 0.1$. Из графиков видно, что увеличение параметра G приводит к уменьшению как контактных напряжений в средней части зоны контакта, так и разности смещений берегов трещины $W_*(x)$.

Вычисления показывают также, что в случае, когда $G = 0.5$, увеличение параметра λ_1 приводит к возрастанию контактных напряжений в средней части зоны контакта и разности смещений берегов трещины $W_*(x)$.

Заключение. Построены разрывные решения уравнений антиплоской задачи теории упругости для кусочно-однородного пространства с туннельными двоякопериодическими дефектами и на их основе построены эффективные решения двух конкретных задач. Показано, что когда дефект представляет собой конечную туннельную трещину, на берегах которой действуют противоположно направленные одинаковые по величине нагрузки, как напряжения в целом, так и коэффициенты интенсивности приведённых разрушающих напряжений не зависят от соотношения модулей сдвигов материалов слоёв. В случае же, когда дефектом является конечная туннельная трещина, на один из берегов которой спаяно абсолютно жёсткое тонкое включение, как напряжения, так и смещения при неизменной геометрии достаточно сильно зависят от соотношения модулей сдвигов материалов слоёв.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с. Panasyuk V., Savruk M., Datsishin A. Stress distribution around cracks in plates and shells. Naukova Dumka. Kiev, 1976, 443p. (in Russian).
2. Бардзокас Д.И., Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Т.1. Москва-Ижевск: 2010. 864с. Bardzokas D.I., Filshtinskii L.A., Filshtinsky M.L. Actual Problems of Coupled Physical Fields in Deformable Solids. Monograph in 5 Volumes, Volume 1. - M.-Izhevsk: NIC «Regulyarnaya I Khaoticheskaya Dinamika», 2010. - 864 p. (in Russian).
3. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. М.: Изд. Физматлит, 1994. 332с. Grigolyuk E., Filshtinsky L. Regular piece-homogeneous structures with defects. FizMatLit, 1994, 332p. (in Russian).
4. Мкртчян М.С., Мхитарян С.М. К задаче о напряжённом состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге. // Докл. АН Арм. ССР. 1993. Т.94. № 2. С.104-110. Mkrtyan M.S., Mkhitaryan S.M. On a stress state of compound elastic infinite body with periodic system of collinear cracks under longitudinal displacement. // reports NAS RA, 1993, Vol. 94, N2, pp. 104-110 (in Russian).
5. Мкртчян М.С. Периодическая задача о напряжённом состоянии упругого кусочно-однородного пространства с абсолютно жёсткими включениями на линии соединения разнородных сред. // В сб.: «Контактные и смешанные задачи механики деформируемого тела», НАН Армении, 1999, с.100-104. Mkrtyan M. Periodic problem of stress state of the elastic piece-homogeneous space with absolutely rigid inclusions on junction line of heterogeneous media. // Proceedings «Contact and mixed

- boundary-value problems of mechanics of deformable bodies», NAS of Armenia, 1999, pp. 100-104 (in Russian).
6. Акопян В.Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин // Докл. НАН РА. 2002. Т.102. №1. С.29-34. Hakobyan V.N. Mixed boundary value problem for compound plane, weakened by periodical system of cracks. // Reports NAS RA, Vol. 102, 2002, pp.29-34 (in Russian).
 7. Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. Плоско-деформированное состояние составной плоскости с периодической системой абсолютно жёстких тонких включений. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 19-23, 2011, Горис-Степанакерт, ст. 172-176. Dashtoyan L.L., Hakobyan L.V. Plane stress state of compound plane with periodic system of absolutely rigid thin inclusions // Proceedings of international conference “The problems of dynamics of interaction of deformable media”, September 19-23, 2011, Goris-Stepanakert, pp.172-176 (in Russian).
 8. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Двойкопериодическая задача для кусочно-однородной плоскости с трещинами. // В сборн. трудов IV-ой международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015. С.33-37. Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L. Doubly periodic problem for piecewise-homogeneous plane with cracks // Proceedings of IV international conference “Topical Problems of Continuum Mechanics”, Yerevan-2015, pp. 33-37 (in Russian).
 9. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространства с периодической системой параллельных межфазных дефектов. // В сборнике трудов IV-ой международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015. С.28-32. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. The stress state of piece-wise homogeneous space with periodic system of parallel interface defects. // Proceedings of IV international conference “Topical Problems of Continuum Mechanics”, Yerevan-2015, pp.28-32 (in Russian).
 10. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщённых функций. М.: Наука, 1977. 288с. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P. Integral transformations of generalized functions, Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., 20, VINITI, Moscow, 1982, 78–115 (in Russian).
 11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integrals and series // integrals and series. Nauka, 1981. 738p. (in Russian).
 12. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327с. Shilov G. Mathematical analysis. Second special course // Moscow. Nauka, 1965, 327pp. (in Russian).
 13. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Известия НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 3. С.12-19. Sahakyan A.V. Application of the method of discrete singularities for solving the singular integral equations with unmoved singularities. // Proc. NAS RA “Mechanics”, 2000, Vol. 53, N3, pp.12-19 (in Russian).

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – д.ф.м.н., проф., директор Института механики НАН Армении, тел.(37410) 52-48-90, **E-mail:** vhakobyan@sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна – к.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

Поступила в редакцию 15.04.2016