

**ФЛАТТЕР УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ
СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ И НАЛИЧИИ ИНЕРЦИОННЫХ
МОМЕНТОВ НА КРОМКАХ**

Микаелян А.О.

Բանալի բառեր. ուղղանկյուն առաձգական սալ, դինամիկ կայունություն, գերձայնային հոսք, կրիտիկական արագություն:

Ключевые слова: прямоугольная упругая пластинка, динамическая устойчивость, сверхзвуковое обтекание, критическая скорость.

Key words: rectangular elastic plate, dynamic stability, supersonic gas flow, critical velocity.

Միջառարկայի շեշտ.

Ուղղանկյուն առաձգական սալի ֆլատերը գերձայնային գազի հոսքի և սալի եզրերում իներցիոն մոմենտների առկայության դեպքում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Մալի բոլոր եզրերը հողակապորեն ամրակցված են և գազի հոսքին ուղղահայաց երկու կողմերում կան կենտրոնացված մոմենտներ: Ցույց է տրված ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են ֆլատերային անկայունության հանգեցնող գազի հոսքի կրիտիկական արագության արժեքները:

Mikaelyan H.H.

Flutter of the elastic rectangular plate in supersonic gas flow at the presence of inertial moments at the edges

The problem of stability of an elastic rectangular plate in a supersonic gas flow is investigated. All edges of the plate are hinged and there are concentrated moments on two edges of the plate. The critical velocity of the gas flow is defined which leads to flutter instability.

Рассматривается задача устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Все края пластинки шарнирно оперты, а на двух противоположных кромках пластинки, перпендикулярных к направлению потока газа, имеются сосредоточенные моменты. Найден критический скорости потока газа, превышение которых приводит к потере устойчивости пластинки.

Введение. В предлагаемой работе исследуется устойчивость прямоугольной упругой пластинки постоянной толщины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Все края пластинки шарнирно оперты, а на двух противоположных кромках пластинки, перпендикулярных к направлению потока газа, имеются сосредоточенные моменты. Найден соответствующие критические скорости потока газа, превышение которых приводит к потере устойчивости пластинки.

Установлено, что в случае, когда из одной из кромок пластинки сосредоточенный момент отсутствует, пластинка находится в устойчивом состоянии.

1. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная тонкая упругая пластинка, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущенной пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке. Пластинка обтекается в направлении оси Ox сверхзвуковым потоком газа со скоростью V .

Пусть кромки $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ пластинки шарнирно закреплены. На кромках $x = 0$ и $x = a$ приложены сосредоточенные моменты.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками и приложенными вдоль кромок пластинки $x = 0$ и $x = a$ сосредоточенными моментами.

Малые изгибные колебания точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] описываются дифференциальным уравнением [2,3]

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + a_0 \rho_0 V \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $W = W(x, y, t)$ – прогиб точек срединной поверхности пластинки; ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде; D – цилиндрическая жёсткость пластинки на изгиб.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0; \quad y = b, \quad (1.2)$$

$$W = 0, \quad D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2}, \quad x = 0, \quad (1.3)$$

$$W = 0, \quad D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -I_2 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2}, \quad x = a. \quad (1.4)$$

Требуется определить значения параметра V , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4).

Заметим, что устойчивость удлинённой пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенного момента на кромках была исследована в работе [5].

2. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде:

$$W(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin(\lambda_n y) \exp(i\omega t), \quad \lambda_n = \pi n b^{-1}. \quad (2.1)$$

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение, являющееся алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$p^4 - 2p^2 + \alpha_n^3 p + 1 = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0 \quad (2.2)$$

или

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0. \quad (2.3)$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (2.3) имеет два отрицательных

действительных корня: $p_1 < 0, p_2 < 0$ и пару комплексно-сопряжённых корней $p_{3,4} = \alpha + i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$.

В работе [6] подробно излагается решение характеристического уравнения (2.3) с помощью алгоритма Феррари [4], в соответствии с которым алгебраическое уравнение четвёртой степени сводится к эквивалентной системе двух квадратных уравнений. При этом, корни характеристического уравнения (2.3) определяются следующими выражениями [6]:

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - \frac{q-1}{2}}, \quad p_1 < 0, p_2 < 0 \quad (2.4)$$

$$p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q+1)}}{2} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + \frac{q-1}{2}}, \quad p_{3,4} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha > 0$$

q – единственный действительный корень кубического уравнения [6]

$$8(1+q)^2(q-1) = \alpha_n^6, \quad \alpha_n^3 = a_0\rho_0VD^{-1}\lambda_n^{-3}, \quad \lambda_n = \pi nb^{-1}. \quad (2.5)$$

Отметим, что из соотношений (2.5) и положительности дискриминанта

$$Q = \alpha_n^6 \left(\frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256} \right)$$

кубического уравнения очевидно, что кубическое уравнение

(2.5) при условии $\alpha_n^3 > 0$ имеет один действительный корень q ($q > 1$) и пару комплексно-сопряжённых корней.

Из соотношений (2.5) легко можно получить выражение зависимости скорости потока газа V от параметров системы

$$V = 2\sqrt{2(q-1)}(q+1)\pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}, \quad (2.6)$$

где через γ обозначено отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b :

$$\gamma = ab^{-1}. \quad (2.7)$$

Общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), в соответствии с вышеизложенным, можно представить в виде:

$$W(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n1} \exp(\lambda_n p_1 x) + C_{n2} \exp(\lambda_n p_2 x) + \exp(\lambda_n \alpha x) \times \\ \times (C_{n3} \cos(\lambda_n \beta x) + C_{n4} \sin(\lambda_n \beta x))) \exp(i\omega_n t) \sin(\lambda_n y), \quad (2.8)$$

где $p_i, (i = \overline{1,4})$ – корни характеристического уравнения (2.3), определяемые выражениями (2.4); $C_{nk}, (k = \overline{1,4})$ – произвольные постоянные, $\lambda_n = \pi nb^{-1}$.

Подставляя общее решение (2.8) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.3) и (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Далее, приравнявая

нулю определитель полученной системы, получаем следующее алгебраическое уравнение относительно квадратов собственных частот колебаний пластинки:

$$k_1 k_2 A(q, \gamma, n) \omega^4 - (k_1 + k_2) B(q, \gamma, n) \omega^2 + C(q, \gamma, n) = 0, \quad (2.9)$$

где $k_1 = I_1 D^{-1} b (\pi n)^{-1}$; $k_2 = I_2 D^{-1} b (\pi n)^{-1}$;

$$A(q, \gamma, n) = 2 \left\{ (Q_1^2 - Q_2^2 - 2(q+1)) \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \sin(\pi n \gamma Q_2) + \right. \\ \left. + 2Q_1 Q_2 \left(\operatorname{ch}(\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) - \operatorname{ch}(\pi n \gamma Q_1) \cos(\pi n \gamma Q_2) \right) \right\}; \quad (2.10)$$

$$B(q, \gamma, n) = 2 \left\{ (Q_1^3 - 2(q+1)Q_1 + Q_1 Q_2^2) \operatorname{ch}(\pi n \gamma Q_1) \sin(\pi n \gamma Q_2) - \right. \\ \left. - (Q_1^2 Q_2 + Q_2 (2(q+1) + Q_2^2)) \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \cos(\pi n \gamma Q_2) + \right. \\ \left. + Q_1 Q_2 2\sqrt{2(q+1)} \operatorname{sh}(\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) \right\}; \quad (2.11)$$

$$C(q, \gamma, n) = 2 \left\{ (Q_1^4 - 2Q_1^2 (q+1 - Q_2^2) + Q_2^2 (2(q+1) + Q_2^2)) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh}(\pi n \gamma Q_1) \sin(\pi n \gamma Q_2) + 4(q+1) Q_1 Q_2 \left(\operatorname{ch}(\pi n \gamma \sqrt{2(q+1)}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{ch}(\pi n \gamma Q_1) \cos(\pi n \gamma Q_2) \right) \right\}; \quad (2.12)$$

$$Q_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} - \frac{1}{2}(q-1)}; \quad Q_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} + \frac{1}{2}(q-1)}, \quad (2.13)$$

$q (q > 1)$ – единственный действительный корень кубического уравнения (2.5); γ – отношение сторон пластинки, определяемое выражением (2.7).

Учитывая условие $q > 1$, из выражений (2.13) имеем:

$$Q_1(q) > 0, \quad Q_2(q) > 0 \quad \text{для всех } q > 1. \quad (2.14)$$

С помощью графо-аналитических методов легко показать, что

$$A(q, \gamma, n) > 0, \quad B(q, \gamma, n) > 0, \quad C(q, \gamma, n) > 0 \quad (2.15)$$

для всех $q > 1$, $n \geq 1$ и $\gamma > 0$.

Ясно, что дисперсионное уравнение (2.9) устанавливает зависимость собственной частоты колебаний пластинки Ω от параметров a, b, n, I_1, I_2, q (или V в соответствии с (2.6)) системы (1.1)-(1.4).

Следует отметить, что среди параметров исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа (1.1)-(1.4), наиболее существенное влияние на её динамическое поведение оказывают следующие параметры: $\gamma = ab^{-1}$ – отношение ширины пластинки к её длине; k_1, k_2 – коэффициенты, характеризующие влияние сосредоточенных инерционных моментов, приложенных вдоль краёв пластинки $x = 0$ и $x = a$; параметр скорости потока газа $q (q > 1)$; n – число полуволн вдоль стороны b .

Таким образом, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа при наличии сосредоточенных моментов I_1, I_2 , приложенных вдоль краёв пластинки $x=0$ и $x=a$, сводится к исследованию поведения корней уравнения (2.9) в зависимости от параметров исходной задачи устойчивости (1.1)–(1.4).

Область устойчивости пластинки рассматриваемой динамической системы определяется соотношениями:

$$A(q, \gamma, n) > 0, B(q, \gamma, n) > 0, C(q, \gamma, n) > 0, \Delta > 0. \quad (2.16)$$

Здесь Δ – дискриминант характеристического уравнения (2.9):

$$\Delta = \Delta(q, \gamma, n) = ((k_1 + k_2)B(q, \gamma, n))^2 - 4k_1k_2 A(q, \gamma, n)C(q, \gamma, n). \quad (2.17)$$

При условии

$$\Delta > 0, A(q, \gamma, n) > 0, B(q, \gamma, n) > 0, C(q, \gamma, n) = 0 \quad (2.18)$$

пластинка теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция, а при условии

$$A(q, \gamma, n) > 0, B(q, \gamma, n) > 0, C(q, \gamma, n) > 0, \Delta = 0 \quad (2.19)$$

пластинка теряет динамическую устойчивость – пластинка совершает флаттерные колебания.

Рассмотрим частные случаи.

3.1. Исследуем характеристическое уравнение (2.9) при условии

$$k_1 = k \neq 0, k_2 = 0 \quad \text{или} \quad k_1 = 0, k_2 = k \neq 0. \quad (3.1)$$

В этом случае решение характеристического уравнения (2.9) запишется в виде

$$\omega^2 = C(q, \gamma, n)(k B(q, \gamma, n))^{-1}. \quad (3.2)$$

Установлено, что в случае, когда в одной из кромок пластинки сосредоточенный момент отсутствует, пластинка находится в устойчивом состоянии.

3.2. Теперь рассмотрим случай, когда $k_1 = k_2 = k$.

Характеристическое уравнение (2.9) запишется в виде:

$$k^2 A(q, \gamma, n)\omega^4 - 2k B(q, \gamma, n)\omega^2 + C(q, \gamma, n) = 0. \quad (3.3)$$

Учитывая условие (2.19), дискриминант характеристического уравнения (3.3) примет вид:

$$\Delta = \Delta(q, \gamma, n) = (2k B(q, \gamma, n))^2 - 4k^2 A(q, \gamma, n)C(q, \gamma, n) = 0. \quad (3.4)$$

С помощью численных методов анализа из уравнения (3.4) найдены первые корни q_1 уравнения (2.2), соответствующие различным значениям параметра $\gamma \in (0; 1)$.

Подставляя полученные значения q_1 в соотношение (2.6), получаем соответствующие значения критической скорости потока $V_{cr fl}$, приводящие к флаттерной неустойчивости.

Некоторые результаты расчётов – значения $V_{cr fl} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующие различным значениям γ , представлены в табл.1.

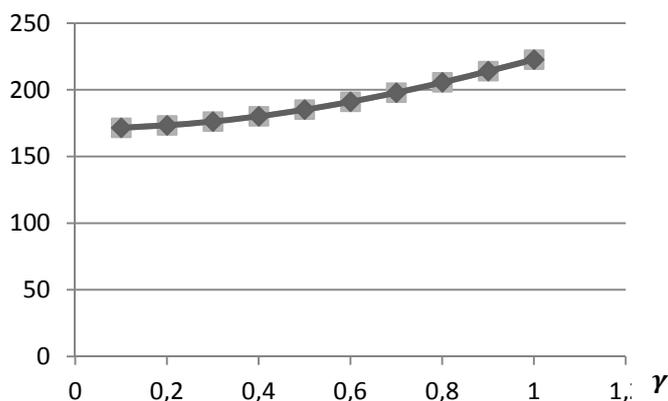
Отметим, что для всех γ наименьшее значение скорости потока достигается при значении $n = 1$.

Таблица 1

γ	q_1	$V_{cr\ fl} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$
0.1	156.043	171.46
0.2	39.0373	173.32
0.3	17.3794	176.12
0.4	9.81094	180.14
0.5	6.32101	185.11
0.6	4.43957	190.98
0.7	3.32025	197.82
0.8	2.60937	205.57
0.9	2.13762	213.94
1.0	1.81527	222.62

В результате расчёта было установлено, что при значениях $\gamma \geq 0.1$ критическая скорость $V_{cr\ fl}$ зависит от отношения сторон $\gamma = ab^{-1}$ прямоугольника. С возрастанием γ значение критической скорости растёт (фиг.1).

$$V_{cr\ fl} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$$



Фиг.1

Можно полагать, что для всех $\gamma \in (0; 0.1)$ поведение прямоугольной пластинки ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) в сверхзвуковом потоке газа при наличии сосредоточенных моментов на кромках $x=0$ и $x=a$ аналогично поведению обтекаемой удлиненной пластинки ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \infty$), при наличии сосредоточенных моментов на кромках $x=0$ и $x=a$ [5] имеет место явление флаттера.

Из сопоставления значений $V_{cr\ fl}$ при $k_1 = k_2$, приведённых в табл.1 со значениями, полученными в работе [7], следует, что критическая скорость флаттера в случае, когда все четыре края шарнирно закреплены, превышает критическую скорость

флаттера в случае, в котором один край свободен, а остальные края шарнирно закреплены.

Таким образом, в рассматриваемом случае, т.е. в случае, в котором все края пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, шарнирно закреплены и на двух кромках, перпендикулярных к направлению потока газа, имеются сосредоточенные моменты, имеет место только динамическая потеря устойчивости. При отсутствии приложенных инерционных моментов, хотя бы на одной из кромок, возмущённое движение пластинки устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755. P'yushin A.A.(1956). Law of Flat Sections at the Big Supersonic Velocity. PMM, v.20(6), pp. 733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с. Bolotin , V.V. (1963). Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press. New York. 324 p.
3. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С. 211–222. Movchan A.A. (1956). About vibrations of a plate, moving in gas. Izv. Acad. Nauk USSR. PMM. V. 20. № 2, pp. 211-222.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832с. Korn G., Korn T. Mathematical Handbook. McGraw-Hill, New York. 1968. 807p.
5. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Флаттер пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенной массы на кромках.//ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. Т.49. № 3. С.162-167. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Flutter of plate with the supersonic gas flow and existense of concentrated mass on edges. Math. Methods and phys.-mech fields. 2006. V.49. № 3. p.162-167.
6. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край.// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. № 3. С.34–40. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the stability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction from the free edge to the clamped edge.// Izv. NAS of Armenia, Mekhanika, 2012. v.65, №3, pp.34-40.
7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.14-44. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge.// Izv. NAS of Armenia, Mekhanika, 2014. v.67, №2, pp.14-44.

Сведения об авторе:

Микаелян Асмик Овиковна – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (+374 77) 03 63 49; (+374 96) 03 63 49. **E-mail:** hasmik.mikaelyan.hm@gmail.ru

Поступила в редакцию 15.03.2016