ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №3, 2016 Механика
УДК 539.3

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЁННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НЕКОТОРЫХ НЕСУММИРУЕМЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Арабян М.О.

Բանալի բառեր: հատուկ կշռային տարածություններ, ընդհանրացված տատանումների ձևի ողորկություն, սեփական արժեքներ և տատանումների ձև, պտտման թաղանթ.
Ключевые слова: специальные весовые пространства, гладкость обобщенных форм колебаний, собственные значения и формы колебаний, оболочки вращения.
Key words: special weight spaces, the smoothness of generalized waveforms, eigenvalues and waveforms, shell rotation.

Արաբյան Մ. Հ.

Պտտման թաղանթի տատանումների խնդրի ընդհանրացված տատանումների ձևի ողորկությունը՝ կախված որոշ ոչ հանրագումարելի գործակիցներից

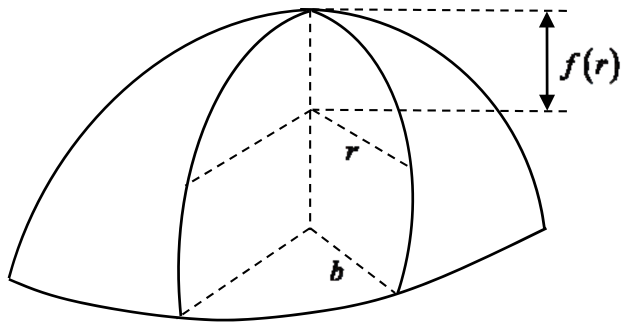
Աշխատանքում ուսումնասիրվում է պտտման թաղանթի տատանումների խնդիրը որոշ ոչ հանրագումարելի գործակիցներով: Գործակիցների վրա դրված որոշակի պայմանների դեպքում ապացուցվում է ընդհանրացված տատանումների ձևի ողորկությունը ներմուծված կշռային տարածություններում: Ցույց է տրվում, որ տատանումների ձևի ողորկությունը էապես կախված է թաղանթը բնութագրող այնպիսի գործակիցներից, ինչպիսիք են՝ հաստությունն ու ձևը:

Arabyan M.H.
The smoothness of generalized waveforms for the problem of rotation of the shell oscillations depending on certain nonsummable coefficients

In the paper we consider a problem of oscillations of rotation with certain nonsummable coefficients. Under certain conditions on the coefficients the smoothness of generalized waveforms in the introduced special weight spaces is proved. It is shown that the smoothness of waveforms are closely related to such factors characterizing the membrane, like thickness and shape.

В работе рассмотрена задача на собственные значения для дифференциальной системы с переменными коэффициентами, некоторые из которых имеют несуммируемую особенность. При некоторых предположениях изучаемая задача физически представляет задачу собственных колебаний оболочки вращения. При определённых условиях на коэффициенты доказана гладкость обобщённых решений краевой задачи, а также гладкость обобщённых форм колебаний в введённых специальных весовых пространствах. А это даёт возможность сделать дальнейшие исследования, в частности получить оценки скорости сходимости для приближённых решений. Показывается, что гладкость форм колебаний тесно связана с такими коэффициентами, характеризующими оболочку, как толщина и форма.

Введение. Задачи оптимального управления играют все более важную роль в науке и технике, имеют различные области приложения. Эффективные численные методы [1–3] имеют решающие значения для успешного применения оптимального управления в практических областях.



Огромное влияние на развитие теории оптимальных систем оказало стремление создать устройства, обладающие наилучшими характеристиками. Важными характеристиками конструкции являются вес и собственные частоты колебаний. Наиболее типичными в теории оптимального проектирования сжатых конструкций являются задачи максимизации критического значения ω_0, где ω_0 – минимальное из собственных значений при заданном весе конструкций и задачи минимального веса при ограничений $\omega_0 \geq \mu$, где μ – заданное число [4–7].

Оптимизационные задачи (1.1)–(1.5), (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) мало изучены. Сложность решения этих задач заключается в том, что некоторые коэффициенты уравнений имеют несуммируемую особенность.

1. Постановка задачи. В предлагаемой работе рассматривается следующая задача на собственные значения. При некоторых предположениях колебаний оболочки вращения описываются следующей системой уравнений [8]:

$$\left(rDW''\right)'' + \left(\left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)W'\right)' + \left(f'\varphi\right)' = \lambda rh\rho W\,, \tag{1.1}$$

$$\left(ar\varphi'\right)' - \left(\frac{a}{r} + \nu a'\right)\varphi - f'W' = 0\,, \tag{1.2}$$

где $r \in (0,b)$ – радиус оболочки, $W(r)$ – амплитуда перемещения точек срединной поверхности оболочки в нормальном направлении, $\varphi(r)$ – функция усилий, характеризующая тангенциальное перемещение, $f(r)$ – функция, определяющая форму срединной поверхности оболочки вращения, $h(r)$ – толщина, а $\rho(r)$ – удельный вес материала оболочки,

$$D(r) = \frac{Eh^3(r)}{12\left(1-\nu^2\right)}, \quad a(r) = \frac{1}{Eh(r)},$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, краевые условия для закреплённой оболочки имеют вид:

$$W'\big|_{r=0} = \left(\frac{1}{r}\left[\left(rDW''\right)' + \left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)W'\right]\right)\Bigg|_{r=0} = W\big|_{r=b} = W'\big|_{r=b} = 0,$$
$$a\left(r\varphi' - \nu\varphi\right)\big|_{r=0} = a\left(r\varphi' - \nu\varphi\right)\big|_{r=b} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\lambda = \omega^2$ – минимальное собственное число задачи (1.1)–(1.3). С этой задачей связаны различные задачи оптимального управления.

Одной из важнейших задач является минимизация веса оболочки

$$J\left(f'\right) = \int_0^b 2\pi r h \rho \sqrt{1 + f'^2}\, dr \to \inf \tag{1.4}$$

при условии

$$\lambda = \omega^2\left(f'\right) = \omega_0^2, \quad f' \geq 0. \tag{1.5}$$

Задача оптимизации заключается в отыскании функции $f\left(r\right)$, доставляющей минимум функционалу (1.4) и удовлетворящей условиям (1.5).

Заметим, что число рассматриваемых функционалов и накладываемых ограничениий, которые предполагаются непротиворечивыми, может быть, в принципе, сколь угодно большим. Оптимизируемый функционал (критерий качества конструкции) в каждой конкретной задаче только один. Так, например, при изгибе балки переменной толщины могут быть поставлены задачи в минимизации веса балки при ограничении на прогибы или минимизации максимального прогиба при заданном весе. Однако, задача одновременной минимизации двух функционалов веса балки и максимального прогиба не имеет смысла.

Оболочки и пластины являются механическими конструкциями, которые широко используются в технике.

Вес – одна из основных характеристик конструкции, и поэтому в большинстве работ по оптимальному проектированию этот функционал либо рассматривается в качестве оптимизируемого критерия качества, либо фигурирует среди других принимаемых ограничений. Вес конструкции характеризует как расход материалов, так и некоторые её эксплуатационные свойства.

Также рассматривается задача максимизации минимального собственного числа

$$\lambda = \omega^2\left(f'\right) \to \sup \tag{1.6}$$

при заданном весе оболочки

$$J\left(f'\right) = J_0, \quad f' \geq 0. \tag{1.7}$$

Такого типа задачи рассмотрены различными авторами. Известны монография Малкова В.П. и Угодчикова А.Г. [6] и журнальная статья Братуся А.С. и Сейраняна А.П. [15] .

Во всех перечисленных работах, в основном, рассматриваются задачи, в которых управлением является толщина пластины. Нам известна лишь работа [12], в которой рассматривается оболочка и проводится оптимизация как по толщине, так и по профилю оболочки.

Для изучения задачи колебаний сначала нужно изучить краевую задачу:

$$(Lu)_1 = f_1 \tag{1.8}$$

$$(Lu)_2 = f_2 \tag{1.9}$$

с фиксированным управлением $p(r) = f'(r)$ при краевых условиях (1.3), где $u = (W, \varphi)$. Первый вопрос, который возникает при исследовании задачи (1.1)–(1.5), это – как понимать решение задачи (1.1)–(1.3) при фиксированном управлении $p(r)$.

Дело в том, что некоторые коэффициенты уравнений имеют при $r = 0$ несуммируемую особенность. Поэтому введём следующие весовые пространства.

2. Весовые пространства и обобщённое решение

Исследование таких краевых задач для уравнений, имеющих несуммируемую особенность, оказывается, лучше всего вести в некоторых специальных весовых пространствах.

Введём весовые гильбертовы пространства $H_r^1[0,b]$, $H_r^2[0,b]$ со скалярными произведениями соответственно [9]:

$$\langle u, v\rangle_{H_r^1} = \int_0^b \left(ru'v' + \frac{uv}{r} \right) dr ,$$

$$\langle u, v\rangle_{H_r^2} = \int_0^b \left(ru''v'' + \frac{u'v'}{r} + uv \right) dr ,$$

и нормами:

$$\|u\|_{H_r^1} = \left(\langle u, u\rangle_{H_r^1} \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{H_r^2} = \left(\langle u, u\rangle_{H_r^2} \right)^{1/2} .$$

Обозначим через V следующее линейное подпространство пространства $H_r^2 \times H_r^1$:

$$V = \left\{ v :\ v \in H_r^2 \times H_r^1, v_1(b) = v_1'(b) = 0 \right\} .$$

В пространстве V рассмотрим билинейную форму:

$$B(u,v) = \int_0^b \Big[rDu_1''v_1'' + (D - \nu D'r)\frac{u_1'v_1'}{r} - pu_2v_1' +$$

$$+ aru_2'v_2' + (a + \nu a'r)\frac{u_2v_2}{r} + pu_1'v_2 \Big] dr - a\nu u_2v_2\Big|_0^b ,$$

порождённой дифференциальным оператором и краевыми условиями задачи (1.1)–(1.3).

Далее, при некоторых условиях на коэффициенты доказывается положительная определённость и ограниченность билинейной формы $B(u,v)$, а именно [9]:

$$B(u,v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V \tag{2.1}$$

$$|B(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \ \forall v \in V \tag{2.2}$$

где α и M – положительные постоянные и не зависят от u и v.

Также доказывается [9] существование обобщённого решения задачи (1.3), (1.8), (1.9), т.е. существование такого $u \in V$, для которого верно соотношение:

$$B(u,v) = \langle f_1, v_1 \rangle_{L_2} + \langle -f_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad \forall v \in V. \tag{2.3}$$

Возьмём любое $\psi \in L_2[0,b]$. Тогда условие

$$B(u,v) = \left\langle \sqrt{rh\rho}\ \psi, v_1 \right\rangle_{L_2}, \quad \forall v \in V,$$

полученное из (2.3) при $f = \begin{pmatrix} \sqrt{rh\rho}\ \psi \\ 0 \end{pmatrix}$, определяет функцию $u \in V$. Тем самым, определён оператор $G : \psi \in L_2[0,b] \to u = G\psi \in V$, причём верна оценка:

$$\|u\|_{H_r^2 \times H_r^1} = \|G\psi\|_{H_r^2 \times H_r^1} \leq \alpha^{-1} \left\| \sqrt{rh\rho}\ \psi \right\|_{L_2} \leq c_1 \|\psi\|_{L_2}. \tag{2.4}$$

Далее доказывается, что оператор $F_1\psi = \sqrt{rh\rho}\ (G\psi)_1$, как оператор, отображающий $L_2[0,b] \to L_2[0,b]$ – компактный и самосопряжённый [9].

3. Гладкость обобщённого решения краевой задачи. Энергетические оценки

Перейдём к изучению дифференциальных свойств решения задачи (2.3). Нам понадобятся ранее введённые [9] весовые гильбертовы пространства H_r^3, $\tilde{H}_r^2$ со скалярными произведениями соответственно:

$$\langle u,v \rangle_{\tilde{H}_r^2} = \int_0^b \left(ru''v'' + u'v' + \frac{uv}{r^2} \right) dr, \quad \langle u,v \rangle_{H_r^3} = \int_0^b \left(ru'''v''' + u''v'' + \frac{u'v'}{r^2} + uv \right) dr,$$

и нормами:

$$\|u\|_{\tilde{H}_r^2} = \left(\langle u,u \rangle_{\tilde{H}_r^2} \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{H_r^3} = \left(\langle u,u \rangle_{H_r^3} \right)^{1/2}.$$

Справедлива

Теорема 3.1. Пусть $D(r), a(r) \in H^2[0,b]$, $p(r) \in H^1[0,b]$, $f = (f_1, f_2)$, $f_1 \in L_2[0,b]$, $\frac{f_2}{r} \in L_2[0,b]$, $f_2 \in C[0,b]$, $D(r) \geq D_0 > 0$, $a(r) \geq a_0 > 0$, $D(r) - \nu D'(r) \geq D_1 > 0$, $0 < \nu = \mathrm{const} < 1$. Тогда решение задачи (2.3)

$$u = u(r) \in (u_1(r), u_2(r)) \in H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$$

и справедлива оценка:

$$\|u\|_{H_r^3\times\tilde{H}_r^2} \le c_2\left(\|f_1\|_{L_2}+\left\|\frac{f_2}{r}\right\|_{L_2}+\max_{[0,b]}|f_2|\right). \tag{3.1}$$

Решение удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &u_1'(0)=u_1(b)=u_1'(b)=0,\\ &a\left(ru_2'-\nu u_2\right)\big|_{r=0}=a\left(ru_2'-\nu u_2\right)\big|_{r=b}=0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Причём, краевые условия (3.2) выполняются в классическом смысле, а уравнение (1.2) – почти всюду.

Доказательство. Разобьём отрезок $[0,b]$ на N равных частей точками:

$0=r_0<r_1<\dots<r_i<r_{i+1}<\dots<r_N=b,$

$r_{i+1}=r_i+h$, $b=Nh$.

Напишем разностную схему для задачи (1.3), (1.8), (1.9). Имеем:

$$\delta_{r\bar{r}}\left((rD)_{i+1}\delta_{r\bar{r}}u_{1,i}\right)+\delta_r\left(\left(\nu D_i'-\frac{D_i}{r_i}\right)\delta_{\bar{r}}u_{1,i}\right)+\delta_r\left(p_iu_{2.i}\right)=f_{1.i}\,,\quad i=\overline{1,N-2} \tag{3.3}$$

$$\delta_r\left((ar)_i\,\delta_{\bar{r}}u_{2,i}\right)-\left(a_{i+1}+\nu r_i\delta_r a_i\right)\frac{u_{2,i}}{r_i}-p_i\delta_r u_{1,i}=f_{2.i}\,,\quad i=\overline{1,N-1} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r_1}\left(\delta_r\left((rD)_1\,\delta_{r\bar{r}}u_{1,0}\right)+\left(\nu D_1'-\frac{D_1}{r_1}\right)\delta_{\bar{r}}u_{1,1}\right)=\delta_{\bar{r}}u_{1,0}=0,\quad u_{1,N}=\delta_{\bar{r}}u_{1,N}=0\\ &a(0)\left(0\cdot\delta_r u_{2,0}-\nu u_{2,0}\right)=0,\quad \text{т.е.}\quad u_{2,0}=0;\quad a(b)\left(b\delta_{\bar{r}}u_{2,N}-\nu u_{2,N}\right)=0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$f_{1,i}=\frac{1}{h}\int_{r_{i-1}}^{r_i}f_1\,dr\,,\ f_{2,i}=\frac{1}{h}\int_{r_{i-1}}^{r_i}f_2\,dr\,,\ D_i=D(r_i)\,,\ D_i'=D'(r_i)\,,\ a_i=a(r_i)\,,\ p_i=p(r_i)\,.$$

Введём следующие весовые дискретные пространства $H_{r,N}^1$, $H_{r,N}^2$, $\tilde{H}_{r,N}^2$, $H_{r,N}^3$ с нормами соответственно:

$$\|v\|_{H_{r,N}^1}^2=\sum_{i=1}^{N}r_i\left(\delta_{\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{v_i^2}{r_i}h\,,$$

$$\|v\|_{H_{r,N}^2}^2=\sum_{i=0}^{N-1}r_{i+1}\left(\delta_{r\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\delta_{\bar{r}}v_i\right)^2}{r_i}h+\sum_{i=0}^{N}v_i^2h\,,$$

$$\|v\|_{\tilde{H}_{r,N}^2}^2=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{r_i^2}{r_{i+1}}\left(\delta_{r\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N}\left(\delta_{\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{v_i^2}{r_i^2}h\,,$$

$$\|v\|_{H_{r,N}^3}^2=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{r_i^2}{r_{i+1}}\left(\delta_{r\bar{r}\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=0}^{N-1}\left(\delta_{r\bar{r}}v_i\right)^2h+\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\delta_{\bar{r}}v_i\right)^2}{r_i^2}h+\sum_{i=0}^{N}v_i^2h\,.$$

Рассмотрим следующее подпространство V_h пространства $H_{r,N}^2\times H_{r,N}^1$:

$$V_h = \left\{ v : v \in H^2_{r,N} \times H^1_{r,N},\, \delta_{\bar r} v_{1,0} = \delta_{\bar r} v_{1,N} = v_{1,N} = v_{2,0} = 0 \right\}.$$

Умножим (3.3) на $v_{1,i}$, а (3.4) на $-v_{2,i}$ и просуммируем первое по i от 1 до $N-2$, а второе – от 1 до $N-1$. Пользуясь разностным аналогом формулы интегрирования по частям, краевыми условиями (3.5), получим:

$$a\left([u]_N, [v]_N\right) = \sum_{i=1}^{N-2} f_{1,i} v_{1,i} h - \sum_{i=1}^{N-1} f_{2,i} v_{2,i} h,\ \forall [v]_N \in V_h, \tag{3.6}$$

где $[u]_N = \left([u_1]_N, [u_2]_N\right)$, $[u_1]_N = \left(u_{1,-1}, u_{1,0}, \ldots, u_{1,N}\right)$, $[u_2]_N = \left(u_{2,0}, \ldots, u_{2,N}\right)$,

$$a\left([u]_N, [v]_N\right) = \sum_{i=0}^{N-1} (rD)_{i+1} \delta_{r\bar r} u_{1,i} \delta_{r\bar r} v_{1,i} h + \sum_{i=1}^{N-1} \left(D_i - \nu D_i' r_i\right) \frac{\delta_{\bar r} u_{1,i} \delta_{\bar r} v_{1,i}}{r_i} h -$$

$$-\sum_{i=1}^{N-1} p_i u_{2,i} \delta_r v_{1,i} h + \sum_{i=1}^{N-1} (ar)_r \delta_{\bar r} u_{2,i} \delta_{\bar r} v_{2,i} h +$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1} \left(a_{i+1} + \nu r_i \delta_r a_i\right) \frac{u_{2,i} v_{2,i}}{r_i} h + \sum_{i=1}^{N-1} p_i \delta_r u_{1,i} v_{2,i} h - \nu a_N u_{2,N} v_{2,N}.$$

Аналогично (2.1) можно доказать, что

$$a\left([v]_N, [v]_N\right) \ge \alpha_1 \left\| [v]_N \right\|^2_{H^2_{r,N} \times H^1_{r,N}},\ \ \forall [v]_N \in V_h,$$

где α_1 не зависит ни от h, ни от N. Отсюда и из (3.6) следует

$$\left\| [v]_N \right\|_{H^2_{r,N} \times H^1_{r,N}} \le M_1 \left(\sum_{i=1}^{N-2} \left(f_{1,\mathrm{i}}\right)^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} \left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2 h \right)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Аналогично задаче (2.3) [9] можно доказать существование, а из оценки (3.7) единственность решения задачи (3.6).

Наша задача состоит в том, чтобы для решения задачи (3.3)–(3.5) получить следующие оценки:

$$\left\| [u_1]_N \right\|^2_{H^3_{r,N}} \le M_2 \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left[\left(f_{1,\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{\left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2}{r_i^2} \right] h + \max_i \left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2 \right), \tag{3.8}$$

$$\left\| [u_2]_N \right\|^2_{\tilde H^2_{r,N}} \le M_2 \left(\sum_{i=1}^{N-2} \left(f_{1,\mathrm{i}}\right)^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} \left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2 h \right), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} M_2 &= M_2\left(\max_{[0,b]} |a(r)|, \max_{[0,b]} |a'(r)|, \max_{[0,b]} |D'(r)|, \max_{[0,b]} |p| \right) = \\ &= M_2\left(\|a\|_{H^2}, \|D\|_{H^2}, \|p\|_{H^1} \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Для получения оценки (3.9) сначала умножим разностное уравнение (3.4) на $\dfrac{-u_{2,i}}{r_i} h$, просуммируем по i от 1 до $N-1$ и проинтегрируем по частям некие его члены. В результате получим:

$$\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\left(u_{2,i}\right)^2}{r_i^2}h+\sum_{i=1}^{N}\left(\delta_{\bar r}u_{2,i}\right)^2 h\le M_2\left(\sum_{i=1}^{N-2}\left(f_{1,\mathrm{i}}\right)^2 h+\sum_{i=1}^{N-1}\left(f_{2,\mathrm{i}}\right)^2 h\right),$$

где M_2 – из (3.10). Во второй раз умножим (3.4) на r_i, продифференцируем в разностном смысле по r_i, умножим на $\dfrac{-\delta_{\bar r}u_{2,i}}{r_i}h$ и просуммируем по i от 2 до $N-1$, снова применим формулу интегрирования по частям к членам высших производных, и, где нужно, учтём краевые условия (3.5). В результате получается оценка (3.9). Аналогично можно получить оценку (3.8). Далее, пусть $\left[u_1\right]_N=\left(u_{1,-1},u_{1,0},\dots,u_{1,N}\right)$ и $\left[u_2\right]_N=\left(u_{2,0},u_{2,1},\dots,u_{2,N}\right)$ – решение системы (3.3)–(3.5). Построим функции

$$u_1^h\left(r\right)=\sum_{i=-1}^{N}u_{1,i}\ell_{1,i}\left(r\right),\quad u_2^h\left(r\right)=\sum_{i=0}^{N}u_{2,i}\ell_{2,i}\left(r\right), \tag{3.11}$$

где

$$\ell_{1,i}\left(r\right)=\begin{cases}\dfrac{\left(r-r_{i-2}\right)^4}{24h^4}, & r_{i-2}\le r\le r_{i-1},\\ \dfrac{1}{12}+\dfrac{\left(r-r_{i-1}\right)^2}{2h^2}-\dfrac{\left(r-r_i\right)^4}{24h^4}-\dfrac{\left(r-r_{i-1}\right)^4}{8h^4}, & r_{i-1}\le r\le r_i,\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{\left(r-r_i\right)\left(r_{i+1}-r\right)}{h^2}+\dfrac{\left(r-r_i\right)^4}{8h^4}+\dfrac{\left(r-r_{i+1}\right)^4}{8h^4}, & r_i\le r\le r_{i+1},\\ \dfrac{1}{12}+\dfrac{\left(r-r_{i+2}\right)^2}{2h^2}-\dfrac{\left(r-r_{i+1}\right)^4}{24h^4}-\dfrac{\left(r-r_{i+2}\right)^4}{8h^4}, & r_{i+1}\le r\le r_{i+2},\\ \dfrac{\left(r-r_{i+3}\right)^4}{24h^4}, & r_{i+2}\le r\le r_{i+3},\\ & i=\overline{-1,N}.\end{cases} \tag{3.12}$$

$$\ell_{2,i}\left(r\right)=\begin{cases}\dfrac{\left(r-r_{i-2}\right)^3}{6h^3}, & r_{i-2}\le r\le r_{i-1},\\ \dfrac{r-r_{i-1}}{h}-\dfrac{\left(r-r_i\right)^3+2\left(r-r_{i-1}\right)^3}{6h^3}, & r_{i-1}\le r\le r_i,\\ \dfrac{\left(r_{i+1}-r\right)}{h}+\dfrac{\left(r-r_i\right)^3+2\left(r-r_{i+1}\right)^3}{6h^3}, & r_i\le r\le r_{i+1},\\ \dfrac{\left(r_{i+2}-r\right)^3}{6h^3}, & r_{i+1}\le r\le r_{i+2},\\ & i=\overline{0,N}.\end{cases} \tag{3.13}$$

Из (3.11) для $u_2^h\left(r\right)$ получим

$$
u_2^h(r)=\begin{cases}
\dfrac{r^3}{6h}\delta_{r\bar r}u_{2,1}+r\delta_{\bar r}u_{2,1}, & 0\le r\le h,\\
\dfrac{(r_i-r)^3}{6h}\delta_{r\bar r}u_{2,i-1}+\dfrac{(r-r_{i-1})^3}{6h}\delta_{r\bar r}u_{2,i}+(r-r_{i-1})\delta_{\bar r}u_{2,i}+u_{2,i-1}, & r_{i-1}\le r\le r_i,\\
 & i=\overline{2,N-1}.\\
\dfrac{(r_N-r)^3}{6h}\delta_{r\bar r}u_{2,N-1}+(r-r_{N-1})\delta_{\bar r}u_{2,N}+u_{2,N-1}, & r_{N-1}\le r\le r_N.
\end{cases}
$$

Аналогично $u_2^h(r)$, с помошью (3.11) и (3.12) можно получить $u_1^h(r)$.

В силу краевых условий (3.5) имеем $\delta_{\bar r}u_{1,0}=u_{2,0}=0$, а значит, $\left(u_1^h\right)'(0)=u_2^h(0)=0$. Нетрудно доказать, что $u^h(r)=\left(u_1^h(r),u_2^h(r)\right)\in H_r^3\times\tilde H_r^2$ и справедливы оценки

$$\left\|u_1^h\right\|_{H_r^3}\le M_3\left\|[u_1]_N\right\|_{H_{r,N}^3}, \tag{3.14}$$

$$\left\|u_2^h\right\|_{\tilde H_r^2}\le M_4\left\|[u_2]_N\right\|_{\tilde H_{r,N}^2}. \tag{3.15}$$

Далее, в силу (3.6) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\left|B\left(u^h,v\right)-\left\langle f_1,v_1\right\rangle_{L_2}+\left\langle f_2,v_2\right\rangle_{L_2}\right|=\left|\left(B\left(u^h,v\right)-a\left([u]_N,[v]_N\right)\right)-\right.\\
&\left.-\left(\int_0^b f_1v_1\,dr-\sum_{i=1}^{N-2}f_{1,i}v_{1,i}h\right)+\left(\int_0^b f_2v_2\,dr-\sum_{i=1}^{N-1}f_{2,i}v_{2,i}h\right)\right|\le\\
&\le M_5\left(\left\|f_1\right\|_{L_2}+\left\|\frac{f_2}{r}\right\|_{L_2}+\max_{[0,b]}\left|f_2\right|\right)\left\|v\right\|_{H_r^2\times H_r^1}h^{1/2},\quad\forall v\in V,
\end{aligned}\tag{3.16}
$$

где M_5 не зависит от h.

В силу оценок (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) и в силу того, что

$$\sum_{i=1}^{N-1}\left(f_{1,i}\right)^2h=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{h^2}\left(\int_{r_{i-1}}^{r_i}f_1\,dr\right)^2h\le\left\|f_1\right\|_{L_2}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\left(f_{2,i}\right)^2}{r_i^2}h=\left\|\frac{f_2}{r}\right\|_{L_2}^2,\quad \max_i\left|f_{2,i}\right|\le\max_{[0,b]}\left|f_2\right|,$$

имеем

$$\left\|u^h\right\|_{H_r^3\times\tilde H_r^2}^2\le\left(M_3^2+M_4^2\right)\left(M_2+M_2\right)\left(\left\|f_1\right\|_{L_2}^2+\left\|\frac{f_2}{r}\right\|_{L_2}^2+\max_{[0,b]}\left|f_2\right|^2\right)\le R.$$

Так как шар в $H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$ является слабо компактным, то из множества $\{u_h\}$ при $h \to 0$ можно выделить такую последовательность $\{u^{h_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$, что $u_n \to u$ слабо в $H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$, причём, $u = (u_1, u_2) \in H_r^3 \times \tilde{H}_r^2$ и верна оценка

$$\|u\|^2_{H_r^3 \times \tilde{H}_r^2} \le c_3 \left(\|f_1\|^2_{L_2} + \left\| \frac{f_2}{r} \right\|^2_{L_2} + \max_{[0,b]} |f_2|^2 \right). \tag{3.17}$$

В силу лемм 4 и 6 [9], из последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\|u_{n_k} - u_{n_m}\|_{H_r^2 \times H_r^1} \to 0 \quad \text{при } k, m \to \infty.$$

Но тогда, поскольку в силу леммы 2 [9] пространство $H_r^2 \times H_r^1$ – полное, то имеем

$$\|u - u_{n_k}\|_{H_r^2 \times H_r^1} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{3.18}$$

Докажем, что $u = (u_1, u_2)$ является решением задачи (2.3). В самом деле, в силу оценок (2.2), (3.16), (3.18) имеем:

$$\left| B(u,v) - \langle f_1, v_1 \rangle_{L_2} + \langle f_2, v_2 \rangle_{L_2} \right| \le \left| B\left(u - u_{n_k}, v\right) \right| +$$
$$+ \left| B\left(u_{n_k}, v\right) - \langle f_1, v_1 \rangle_{L_2} + \langle f_2, v_2 \rangle_{L_2} \right| \le M \|u - u_{n_k}\|_{H_r^2 \times H_r^1} \|v\|_{H_r^2 \times H_r^1} +$$
$$+ M_5 \left(\|f_1\|_{L_2} + \left\| \frac{f_2}{r} \right\|_{L_2} + \max_{[0,b]} |f_2| \right) \|v\|_{H_r^2 \times H_r^1} h^{1/2} \to 0, \quad \forall v \in V,$$

при $h \to 0$. Отсюда

$$B(u,v) = \langle f_1, v_1 \rangle_{L_2} - \langle f_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad \forall v \in V.$$

Аналогично, пользуясь оценками теорем вложения 2, 4 [9], можно доказать, что

$$u \in V, \quad a\left(ru_2' - \nu u_2\right)\Big|_{r=0} = a\left(ru_2' - \nu u_2\right)\Big|_{r=b} = 0.$$

Таким образом, u – решение задачи (2.3) и для него справедлива оценка (3.17), из которой следует оценка (3.1). Выполнение условий $u_1'(0) = u_1(b) = u_1'(b) = 0$ в классическом смысле следует из теоремы вложения 2 [9], которая выглядит так:

Теорема 3.2 [9]. *Любая функция* $v \in H_r^2[0,b]$ *может быть отождествлена с функцией, имеющей непрерывную производную, причём*

$$\max_{[0,b]} \left(|v'(r)| + |v(r)| \right) \le c \|v\|_{H_r^2}, \quad v'(0) = 0.$$

Установим, что уравнение (1.2) выполняется почти всюду. Из (2.3) при $v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$ с учётом (1.3) имеем:

$$0=\int_0^b\left(aru_2'v_2'+\left(\frac{a}{r}+\nu a'\right)u_2v_2+pu_1'v_2\right)dr-a\nu u_2v_2\Big|_0^b+\int_0^b f_2v_2\,dr=$$
$$=\int_0^b\left(\int_b^r\left[\left(a\xi u_2'\right)'-\left(\frac{a}{\xi}+\nu a'\right)u_2-pu_1'-f_2\right]d\xi\right)v_2'\,dr. \tag{3.19}$$

Можно убедиться, что

$$v_2=\int_0^r\int_b^z\left[\left(a\xi u_2'\right)'-\left(\frac{a}{\xi}+\nu a'\right)u_2-pu_1'-f_2\right]d\xi dz\in H_r^1\left[0,b\right].$$

Но тогда из (3.19) получим:

$$\int_r^b\left[\left(a\xi u_2'\right)'-\left(\frac{a}{\xi}+\nu a'\right)u_2-pu_1'-f_2\right]^2d\xi=0,\quad \forall r\in\left[0,b\right].$$

А это значит, что уравнение (1.2) выполняется почти всюду.

Теорема 3.1 доказана.

4. Гладкость обобщённых форм колебаний в задаче колебаний оболочки вращения

Определение. Функции $u\in V$, $u\not\equiv 0$ и число λ назовём обобщённой формой колебаний и собственным числом задачи (1.1)-(1.3), если выполняется следующее равенство:

$$B\left(u,v\right)=\lambda\left\langle rh\rho u_1,v_1\right\rangle_{L_2},\quad \forall v\in V. \tag{4.1}$$

В работе [9] при определённых условиях на коэффициенты доказано существование решения задачи на собственные значения (4.1). Справедлива следующая

Теорема 4.1. *Допустим выполнены условия теоремы 3.1, тогда обобщённые формы колебаний задачи (4.1)*

$u_k\in H_r^3\times\tilde{H}_r^2$.

Доказательство. Поскольку $F_1=\sqrt{rh\rho}\left(G\psi\right)_1$ – компактный и самосопряженный [9], то оператор F_1 имеет собственные значения и собственные функции [10],

$$F_1\psi=\mu\psi. \tag{4.2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Если* μ *– собственное число, а* ψ *– соответствующая собственная функция задачи (4.2), то* $\lambda=\dfrac{1}{\mu}$ *и* $u=G\psi$ *являются собственным числом и обобщённой формой колебаний задачи* (4.1) [9].

Осталось доказать, что при выполнении условий теоремы

$u_k\in H_r^3\times\tilde{H}_r^2$.

Это следует из теоремы 3.1 и приведённой леммы, а из (2.4) следует

$$\|u\|_{H_r^3\times\tilde{H}_r^2}=\|G\psi\|_{H_r^3\times\tilde{H}_r^2}\le\alpha^{-1}\left\|\sqrt{rh\rho}\,\psi\right\|_{L_2}\le c_1\|\psi\|_{L_2}.$$

Теорема 4.1 доказана.

Заключение. Большую роль при выборе модели и формулировке задачи играет априорная информация о свойствах искомого решения. Информация о модели и знание принципиальных свойств её решения позволяют при постановке задачи оптимизации выделить существенные ограничения и отбросить «второстепенные» и тем самым привести задачу к такому виду, что её можно решить имеющимися численными или даже аналитическими методами.

В настоящей работе, введя весовые функциональные пространства, показываются свойства форм колебаний, а именно, что гладкость форм колебаний тесно связана, а вернее, непрерывно зависит от коэффициентов, характеризующих оболочку**,** толщины и формы**.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayer C. and Rösch A. Superconvergence properties of optimal control problems. SIAM, Journal on Control and Optimization, 43 (2004) (3), pp. 970-985.
2. Y. Chen and W. B. Liu, Error estimates and superconvergence of mixed finite element for quadratic optimal control, International J. Numerical Analysis and Modeling, 3 (2006), no. 3, pp. 311-321.
3. Bramble J.H., Pasciak J.E., and Trenev D. Analysis of a finite pml approximation to the three dimensional elastic wave scattering problem. Math.Comput., v. 79, № 272, 2010, pp. 2079–2101.
4. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980, с 256. Banichuk N.V. Optimization forms of elastic bodies. M.: Nauka, 1980, p 256 (in Russian).
5. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. Наука, М., 1975. Lurie K.A. Optimal control in mathematical physics. M.: Nauka, 1975 (in Russian).
6. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. Наука, М., 1981. Malkov V.P., Ugodchikov A.G. Optimization of elastic systems. M.: Nauka, 1981 (in Russian).
7. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. Fichera G. Existence theorems in elasticity. M.: Mir, 1974 (in Russian).
8. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек. – Изв. АН СССР, Отдел тех. Наук, №3 (1955), сс. 33-68. Grigolyuk E.I. Nonlinear vibrations and stability of shallow cores and shells. Izv. AS USSR, Dep. Tech. Science, №3 (1955), pp. 33-68 (in Russian).
9. Арабян М.О. Исследование спектра одного вырождающегося оператора, ЕГУ, Ученые записки, №3 (2005), сс. 31-39. Arabyan M.H. On an eigenvalue problem. YSU, the researchers note, 3(2005), pp. 31-39 (in Russian).
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, М., 1976. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Nauka, M.,1976 (in Russian).

11. Багдасарян Ж.Е., Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек вращения.- Изв. АН Арм. ССР, Физ.-мат.н.,1960,13, №5, сс. 27-36 . Baghdasaryan Zh.E., Gnuni V.TS. On the theory of dynamic stability of laminated anisotropic shells of rotation. Izv. AS Arm. SSR, Phis. Math.Nauk, 1960, 13, №5, pp. 27-36 (in Russian).
12. Араркцян Б.Г., Гнуни В.Ц.,Оганесян А.О.Проектирование оболочек вращения минимальной массы.- Сб. Научных трудов посвященных 60-летию ЕГУ, 1981. Ararktsyan B.G. Gnuni V.TS., Hovhannisyan A.H. Designing a minimum weight of shells of rotation. Proccedings of Scientific papers dedicated to the 60th anniversary of Yerevan State University, 1981 (in Russian).
13. Лурье А.И. Применение принципа максимума к простейшим задачам механики.- Труды Ленинград. Политехн.ин-та., Л.-М.: Машиностроение, 1965, №252, сс. 34-46. LurieA.I. Applying the maximum principle to the simplest problems of mechanics. Proceedings of Leningrad Polytech. Institute, L. – M.: Mashinostroenie, 1965, №252, pp. 34-46 (in Russian).№
14. Гнуни В.Ц., Ншханян Ю.С. Оптимальный выбор закона изменения угла армирования.- Изв. Вузов, Машиностроение, 1980, №4, сс. 35-39. Gnuni V.TS., Nshkhanyan Yu. S. The optimal choice of the law of variation of the angle of reinforcement. – Izv. Vuzov, Mashinostronenie, 1980, №4, pp. 35-39 (in Russian).
15. Братусь А.С.,Сейранян А.П. Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений.- ПММ,1983, т.47, Вып.4, сс. 546-554. Bratus A.S., Seyranyan A.P. Bimodal solutions in optimization problems of their eigenvalues. – PMM, 1983, N47, part 4, pp. 546-554 (in Russian).
16. Амбарцумян С.А.Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974, с.448 . Hambardzumyan S. A. The general theory of anisotropic shells. Moskva: Nauka, 1974, p. 448 (in Russian).

Сведения об авторе:

Арабян Мариам Овсеповна, к. ф.-м. н., доцент кафедры анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики ЕГУ.
Адрес: 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1; **тел.:** (+374 10) 577 937
E-mail: arabyan.mariam@mail.ru

Поступила в редакцию 10.05.2016