

**ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И ЭНЕРГЕТИКА ДЕФОРМАЦИЙ
ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО
КРУГОВОГО ТОНКОГО СТЕРЖНЯ**

Саркисян С.О., Хачатрян М.В.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, круговой, тонкий стержень, прикладная модель, вариационный принцип, основные уравнения, граничные условия, энергетические теоремы, вариационные методы

Key words: micropolar, elastic, circular, thin bar, applied model, variation principle, basic equations, boundary conditions, energetic theorems, variation methods

Բանալի բառեր. Միկրոպոլյար, առաձգական, շրջանային, բարակ ձող, կիրառական մոդել, վարիացիոն սկզբունք, հիմնական հավասարումներ, եզրային պայմաններ, էներգետիկ թեորեմներ, վարիացիոն մեթոդներ

Մարգարյան Ա.Հ., Խաչատրյան Մ.Վ.

**Միկրոպոլյար առաձգական շրջանային բարակ ձողի դեֆորմացիայի կիրառական մոդելի
վարիացիոն սկզբունքը և նրա էներգետիկան**

Աշխատանքում դիտարկվում է շրջանային տիրույթի դեպքում առաձգականության միկրոպոլյար տեսության հարթ լարվածային վիճակի ընդհանուր վարիացիոն սկզբունքը, որի հիմքի վրա դուրս են բերվել այդ տեսության հիմնական հավասարումները և եզրային պայմանները:

Ընդունելով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ուղիղ ձողերի, սալերի և թաղանթների տեսությունների կառուցման հայտնի վարկածները, հարթ լարվածային վիճակի վարիացիոն սկզբունքի հիման վրա ստացվել է միկրոպոլյար առաձգական շրջանային բարակ ձողերի կիրառական մոդելի ընդհանուր վարիացիոն սկզբունքը՝ ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ: Կառուցված վարիացիոն սկզբունքի հիման վրա արտածվել են միկրոպոլյար առաձգական շրջանային բարակ ձողերի կիրառական մոդելի հիմնական հավասարումները և բնական եզրային պայմանները: Ցույց է տրվում, որ միկրոպոլյար առաձգական շրջանային բարակ ձողերի կառուցված կիրառական մոդելի համար տեղի ունեն բոլոր էներգետիկ թեորեմները, ինչպես նաև հիմնավորվում է շրջանային ձողի այս մոդելի եզրային խնդիրների լուծման համար Ռիտցի, Բուբնով-Գալերկինի վարիացիոն մեթոդների և վերջավոր էլեմենտների մեթոդի կիրառվումը:

Sargsyan S.H., Khachatryan M.V.

Variation principle and energetics of deformation of applied model of micropolar elastic circular thin bar

In the present paper the general variation principle of plane stress state of micropolar theory of elasticity is considered in a circular area, on the basis of which the basic equations and boundary conditions of the mentioned theory are obtained.

Accepting the known hypotheses of the construction of the theory of micropolar elastic thin straight bars, plates and shells, general variation principle for applied model of micropolar elastic circular thin bars with transverse shear deformations is obtained on the basis of variation principle of plane stress state. Based on the constructed variation principle the basic equations and natural boundary conditions of applied model of micropolar elastic circular thin bar are obtained. It is confirmed that all energy theorems and Ritz, Bubnov-Galerkin, FEM variation methods are applicable for the constructed model of micropolar elastic circular thin bar and for solutions of corresponding boundary value problems of the applied model.

В работе рассматривается общий вариационный принцип плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости для круговой области, на основе которого выводятся основные уравнения и граничные условия указанной теории.

Принимая известные гипотезы построения теории микрополярных упругих тонких прямолинейных стержней, пластин и оболочек, на основе вариационного принципа плоского напряжённого состояния, получен общий вариационный принцип для прикладной модели микрополярных упругих тонких круговых стержней с учётом поперечных сдвиговых деформаций. На основе построенного вариационного принципа выведены основные уравнения и естественные граничные условия прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней. Показываются, что для построенной прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней имеют место все энергетические теоремы, а также обосновывается применимость для решения краевых задач указанной модели кругового стержня вариационные методы Ритца, Бубнова-Галеркина и метода конечных элементов.

Введение. Законы деформирования как классического упругого тела [1], так и микрополярного упругого тела [2], могут быть выражены в виде так называемых вариационных принципов. Из этих принципов выводятся все основные уравнения классической и микрополярной теории упругости: геометрические, физические и равновесия, кроме того, вариационная постановка задач даёт возможность для применения прямых методов решения задач, обходя решение самых дифференциальных уравнений. Благодаря этому, задача определения напряжённого состояния как классического так и микрополярного упругого тела может быть сведена к вариационной задаче математической физики.

В работе [3] получены общие вариационные принципы прикладной теории микрополярной упругости тонких оболочек и пластин.

В данной работе развивается метод работы [3] и в результате получен общий вариационный принцип для прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня. Исходя из этого принципа, выводятся основные уравнения и естественные граничные условия прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня.

1.Постновка задачи. Рассмотрим стержень (фиг.1), среднее сечение которого представляет собой криволинейный прямоугольник, две стороны которого образованы дугами концентрических окружностей ($r = r_1, r = r_2$), а две другие – отрезками радиусов ($\varphi = 0, \varphi = \varphi_1$). Поперечные сечения стержня представляют собой тонкий прямоугольник: $2h \times 2h^*$, где $2h$ – толщина, $2h^*$ – ширина стержня. Ось стержня – дуга окружности радиуса r_0 . Будем считать, что в указанном среднем сечении имеют место уравнения и граничные условия, а также вариационный принцип плоского напряжённого состояния (в этом смысле можем принимать $2h^* = 1$) микрополярной теории упругости [2]. Используем полярную систему координат (r, φ) .

Сформулируем общий вариационный принцип для плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости. Для этого рассмотрим следующий функционал [2]:

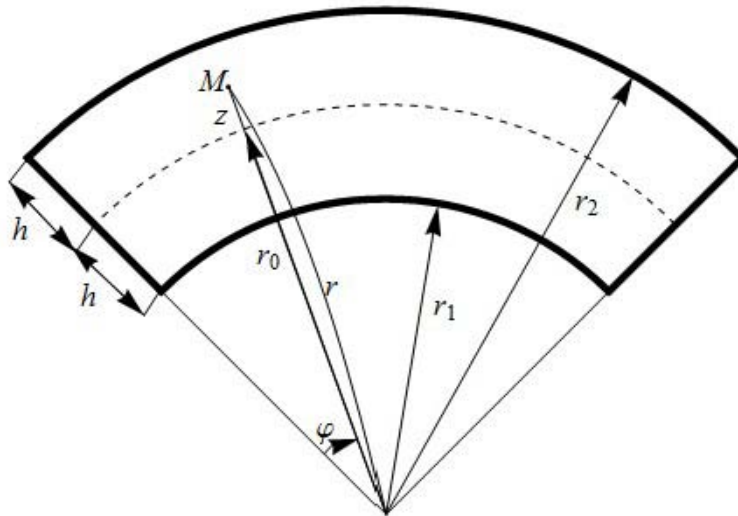
$$I = \iint_{(D)} \left[\mathcal{E} - \left\{ \sigma_{11} \left[\gamma_{11} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V_2 \right) \right] + \sigma_{22} \left[\gamma_{22} - \frac{\partial V_2}{\partial r} \right] + \right. \right. \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
& +\sigma_{12} \left[\gamma_{12} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} V_1 - \omega_3 \right) \right] + \sigma_{21} \left[\gamma_{21} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} + \omega_3 \right) \right] + \\
& + \mu_{13} \left[\chi_{13} - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi} \right] + \mu_{23} \left[\chi_{23} - \frac{\partial \omega_3}{\partial r} \right] \} r dr d\varphi - \\
& - \int_0^{\varphi_1} \left[q_1^+ V_1 + q_2^+ V_2 + m^+ \omega_3 \right]_{r=r_2} r_2 d\varphi + \int_0^{\varphi_1} \left[q_1^- V_1 + q_2^- V_2 + m^- \omega_3 \right]_{r=r_1} r_1 d\varphi + I^*,
\end{aligned}$$

где \mathcal{E} – удельная энергия деформации микрополярного упругого изотропного тела;
 I^* представляет собой:

$$\text{а) } I^* = \int_{r_1}^{r_2} \left[\sigma_{11}' V_1 + \sigma_{12}' V_2 + \mu_{13}' \omega_3 \right]_{\varphi=0} dr - \int_{r_1}^{r_2} \left[\sigma_{11}'' V_1 + \sigma_{12}'' V_2 + \mu_{13}'' \omega_3 \right]_{\varphi=\varphi_1} dr \quad (1.2)$$

в случае, когда на краевых сечениях области ($\varphi = 0, \varphi = \varphi_1$) как граничные условия заданы силовые и моментное напряжения (для величин $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \mu_{13}$);



Фиг.1

$$\begin{aligned}
\text{б) } I^* = & \int_{r_1}^{r_2} \left[\sigma_{11} (V_1 - V_1') + \sigma_{12} (V_2 - V_2') + \mu_{13} (\omega_3 - \omega_3') \right]_{\varphi=0} dr - \\
& - \int_{r_1}^{r_2} \left[\sigma_{11} (V_1 - V_1'') + \sigma_{12} (V_2 - V_2'') + \mu_{13} (\omega_3 - \omega_3'') \right]_{\varphi=\varphi_1} dr, \quad (1.3)
\end{aligned}$$

когда на краевых сечениях области ($\varphi = 0, \varphi = \varphi_1$) как граничные условия заданы перемещения и поворот (для величин V_1, V_2, ω_3);

$$\begin{aligned} \text{в) } I^* = & \int_{r_1}^{r_2} \left[\sigma_{11}' V_1 + \sigma_{12} (V_2 - V_2') + \mu_{13}' \omega_3 \right]_{\varphi=0} dr - \\ & - \int_{r_1}^{r_2} \left[\sigma_{11}'' V_1 + \sigma_{12} (V_2 - V_2'') + \mu_{13}'' \omega_3 \right]_{\varphi=\varphi_1} dr, \end{aligned} \quad (1.4)$$

когда на краевых сечениях области ($\varphi = 0, \varphi = \varphi_1$) задан смешанный тип краевых условий (для величин $\sigma_{11}, V_2, \mu_{13}$).

Удельная энергия деформации микрополярного упругого изотропного тела выражается следующей формулой [2]:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \gamma_{11} + \sigma_{22} \gamma_{22} + \sigma_{12} \gamma_{12} + \sigma_{21} \gamma_{21} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{23} \chi_{23}), \quad (1.5)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{11}^2 + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{11} \gamma_{22} + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{22}^2 + \frac{1}{2} (\mu + \alpha) \gamma_{12}^2 + \\ & + (\mu - \alpha) \gamma_{12} \gamma_{21} + \frac{1}{2} (\mu + \alpha) \gamma_{21}^2 + \frac{1}{2} B \chi_{13}^2 + \frac{1}{2} B \chi_{23}^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В вышеприведённых формулах: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ – обычные напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения, $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ – деформации; χ_{13}, χ_{23} – изгибы-кручения; V_1, V_2 – перемещения; ω_3 – свободный поворот; $E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$,

α, B – упругие постоянные микрополярного тела, (D) – область криволинейного прямоугольника (фиг.1).

Отметим, что если в выражениях функционала (1.1) и плотности потенциальной энергии деформации (1.6) подставить $\alpha = 0$ (а также считать $\mu_{13} = \mu_{23} = 0, \chi_{13} = \chi_{23} = 0, \omega_3 = 0$), получим функционал и плотность потенциальной энергии деформации для классического случая.

На основе (1.1) составим вариационное уравнение

$$\delta I = 0. \quad (1.7)$$

Варьируя функционал (1.1) по всем функциональным аргументам, получим следующие основные уравнения плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \quad (1.8)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}], & \gamma_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}], & \gamma_{12} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{12} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{21} \\ \gamma_{21} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{21} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{12}, & \chi_{13} &= \frac{1}{B} \mu_{13}, & \chi_{23} &= \frac{1}{B} \mu_{23} \end{aligned} \quad (1.9)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V_2, & \gamma_{22} &= \frac{\partial V_2}{\partial r}, & \gamma_{12} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} V_1 - \omega_3, & \gamma_{21} &= \frac{\partial V_1}{\partial r} + \omega_3, \\ \chi_{13} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi}, & \chi_{23} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

а также следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{на } r = r_1: & \sigma_{21} = q_1^-, \sigma_{22} = q_2^-, \mu_{23} = m^-, \\ \text{на } r = r_2: & \sigma_{21} = q_1^+, \sigma_{22} = q_2^+, \mu_{23} = m^+; \end{aligned} \quad (1.11)$$

в случае (1.2):

$$\begin{aligned} \text{на } \varphi = 0: & \sigma_{11} = \sigma_{11}', \sigma_{12} = \sigma_{12}', \mu_{13} = \mu_{13}'; \\ \text{на } \varphi = \varphi_1: & \sigma_{11} = \sigma_{11}'', \sigma_{12} = \sigma_{12}'', \mu_{13} = \mu_{13}''; \end{aligned} \quad (1.12)$$

в случае (1.3):

$$\begin{aligned} \text{на } \varphi = 0: & V_1 = V_1', V_2 = V_2', \omega_3 = \omega_3'; \\ \text{на } \varphi = \varphi_1: & V_1 = V_1'', V_2 = V_2'', \omega_3 = \omega_3''; \end{aligned} \quad (1.13)$$

в случае (1.4):

$$\begin{aligned} \text{на } \varphi = 0: & \sigma_{11} = \sigma_{11}', V_2 = V_2', \mu_{13} = \mu_{13}'; \\ \text{на } \varphi = \varphi_1: & \sigma_{11} = \sigma_{11}'', V_2 = V_2'', \mu_{13} = \mu_{13}'' . \end{aligned} \quad (1.14)$$

На основе уравнений (1.8)-(1.10) известным способом получим закон сохранения энергии (т.е. теорему Клапейрона) для плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости для рассматриваемой круговой области:

$$\iint_D \mathcal{E} r dr d\varphi = \frac{1}{2} A, \quad (1.15)$$

где $\frac{1}{2} A$ – работа внешних усилий и моментов:

$$A = \int_0^{\varphi_1} (q_1^+ V_1 + q_2^+ V_2 + m^+ \omega_3)_{r=r_2} r_2 d\varphi - \int_0^{\varphi_1} (q_1^- V_1 + q_2^- V_2 + m^- \omega_3)_{r=r_1} r_1 d\varphi - \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{11}' V_1 + \sigma_{12}' V_2 + \mu_{13}' \omega_3)_{\varphi=\varphi_1} dr + \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{11}'' V_1 + \sigma_{12}'' V_2 + \mu_{13}'' \omega_3)_{\varphi=\varphi_2} dr. \quad (1.16)$$

На основе закона сохранения энергии (1.15), с учётом того, что плотность потенциальной энергии деформации (1.6) положительно-определённая квадратичная форма, легко доказать теорему единственности в микрополярной теории упругости [2] (в данном случае – для плоского напряжённого состояния). Также легко проверить, что имеют место формулы типа Кастильяно и Грина. Известным способом [2] можно доказать и закон взаимности Бетти в микрополярной теории упругости.

В дальнейшем стержень будем считать тонким, это означает, что $2h \ll r$ и $2h \ll l$, где l – длина средней линии стержня. Наша цель – построение прикладной (одномерной) модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня. Для этого удобно будет радиус-вектор r произвольной точки области представить так: $r = r_0 + z$, где $-h \leq z \leq h$ ($r_1 = r_0 - h$, $r_2 = r_0 + h$), при этом, на основе тонкостенности стержня будем считать, что

$$1 + \frac{h}{r_0} \approx 1. \quad (1.17)$$

2. Основные гипотезы. Сформулируем допущения (достаточно общие) [4-6], используемые при построении прикладной модели микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек.

1. В качестве исходной кинематической для перемещений, примем гипотезу прямой линии, т.е. гипотезу Тимошенко, это означает, это линейный элемент, первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости кругового стержня до деформации, остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Кроме того, для свободного поворота ω_3 будем считать, что эта функция по толщинной координате z – постоянная. Вследствие указанных допущений будем иметь следующий линейный закон изменения перемещений и свободного поворота по толщине рассматриваемого стержня:

$$V_1 = u(\varphi) + z\psi(\varphi), \quad V_2 = w(\varphi), \quad \omega_3 = \Omega_3 \varphi, \quad (2.1)$$

где $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ – перемещения точек средней линии в направлениях по её касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi)$ – это прогиб стержня); $\psi(\varphi)$ – угол поворота

первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi)$ – свободный поворот точек этого элемента.

Кинематические гипотезы (2.1) в целом, как в работах [4-6], назовём обобщёнными гипотезами Тимошенко для случая микрополярного тонкого стержня (в данном случае, для кругового тонкого стержня).

2. Будем применять гипотезу о тонкостенности кругового стержня, при которой считаем, что имеет место приближённое равенство (1.15), а также, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + z} = \frac{1}{r_0 \left(1 + \frac{z}{r_0}\right)} \approx \frac{1}{r_0}. \quad (2.2)$$

3. Примем предположения о малости нормального напряжения σ_{22} , относительно нормального напряжения σ_{11} , в первом уравнении закона Гука ((1.9)₁).

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{21} примем

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi). \quad (2.3)$$

После определения указанных выше величин, формулу для σ_{21} будем поправлять следующим образом. Проинтегрируем по z второе из (1.8) ((1.8)₂) уравнение равновесия и, при определении постоянного интегрирования (вернее, функции от φ), потребуем равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. После указанного интегрирования полученное окончательное выражение прибавим к формуле (2.3).

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и поворота (2.1), подставляя их в формулы (1.10), находим деформации и изгибы-кручения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \left(\frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w \right) + z \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3 \\ \gamma_{21} &= \psi + \Omega_3, \quad \chi_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \quad \chi_{23} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \\ \mathbf{K}_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

тогда для деформаций, изгибов – кручений получим:

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + z\mathbf{K}_{11}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12}, \quad \gamma_{21} = \Gamma_{21}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0 \quad (2.6)$$

Здесь Γ_{11} представляет собой продольную относительную деформацию средней линии; K_{11} – изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений); Γ_{12}, Γ_{21} – сдвиговые деформации; k_{13} – изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

Используя гипотезу 3) и формулу (2.6)₁, из формулы (1.9)₁ для напряжений σ_{11} будем иметь

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0(\varphi) + z \sigma_{11}^1(\varphi), \quad (2.7)$$

где

$$\sigma_{11}^0(\varphi) = E\Gamma_{11}, \quad \sigma_{11}^1(\varphi) = EK_{11}. \quad (2.8)$$

Для определения силового напряжения σ_{12} , используя формулы (1.9)₃, (2.4)₃, (2.4)₄, получим:

$$\sigma_{12} = (\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}. \quad (2.9)$$

Принимая во внимание формулы для σ_{11} ((2.7)), σ_{12} ((2.9)), рассмотрим второе уравнение равновесия ((1.8)₂), которое проинтегрируем по r , с учётом тонкостенности области и граничных условий из (1.11) для σ_{22} , окончательно получим:

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(q_2^+ + q_2^-) - \frac{h^2}{2} \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 + z \left(\frac{1}{r_0} \sigma_{11}^0 - \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{12}^0}{d\varphi} \right) + \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 \frac{z^2}{2}. \quad (2.10)$$

Для моментного напряжения μ_{13} на основании формул (1.9)₅ и, с учётом формулы из (2.6) для χ_{13} , будем иметь:

$$\mu_{13} = Bk_{13}. \quad (2.11)$$

Значение для моментного напряжения μ_{23} получим из третьего уравнения равновесия ((1.8)₃) интегрированием по r с учётом формул (2.11), (2.9) и (2.3):

$$\mu_{23} = \frac{1}{2}(m^+ + m^-) - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{d\mu_{13}^0}{d\varphi} + \sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0 \right) \quad (2.12)$$

Для определения силового напряжения σ_{21} , в основу примем гипотезу 4), тогда с использованием первого уравнения равновесия ((1.8)₁), а также формулу (2.3), окончательно получим:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi) + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^1}{d\varphi} - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^0}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} \sigma_{12}^0 \right) - \frac{z^2}{2} \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}^1}{d\varphi}. \quad (2.13)$$

3. Вариационный принцип прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня. С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений и поворота, деформаций и изгибов-кручения, силовых и моментных напряжений, в прикладной теории микрополярного упругого кругового стержня, вместо компонентов силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия: N , Q_1 , Q_2 и моменты: M_{11} , L_{13} , которые выражаются следующими формулами:

$$N = \int_{-h}^h \sigma_{11} dz, \quad Q_1 = \int_{-h}^h \sigma_{12} dz, \quad Q_2 = \int_{-h}^h \sigma_{21} dz, \quad M_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} z dz, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dz \quad (3.1)$$

Теперь, в функционале (1.1) плоского напряжённого состояния микрополярного стержня используем формулы для деформаций, изгибов-кручений (2.6), силовых и моментных напряжений ((2.8), (2.9), (2.11)), перемещений и поворота (2.1), после выполнения интегрирования по z , от $-h$ до h , приходим к следующему функционалу:

$$\begin{aligned} I_0 = & \int_0^{\varphi_1} \left[\mathcal{E}_0 - \left\{ \left[\Gamma_{11} - \left(\frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w \right) \right] N + \left(\mathbf{K}_{11} - \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi} \right) M_{11} + \right. \right. \\ & + \left[\Gamma_{12} - \left(\frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3 \right) \right] Q_1 + \left[\Gamma_{21} - (\psi + \Omega_3) \right] Q_2 + \\ & \left. \left. + \left[k_{13} - \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi} \right] L_{13} \right\} r_0 d\varphi - \int_0^{\varphi_1} \left[q_1^+ (u+h\psi) + q_2^+ w + m^+ \Omega_3 \right] \Big|_{z=h} r_0 d\varphi + \right. \\ & \left. + \int_0^{\varphi_1} \left[q_1^- (u-h\psi) + q_2^- w + m^- \Omega_3 \right] \Big|_{z=-h} r_0 d\varphi + I_0' \right. \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \text{а) } I_0' = & uN' \Big|_{\varphi=0} + \psi M' \Big|_{\varphi=0} + wQ_1' \Big|_{\varphi=0} + \Omega_3 L_{13}' \Big|_{\varphi=0} - uN'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} - \\ & - \psi M'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} - wQ_1'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} - \Omega_3 L_{13}'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } I_0' = & N(u-u') \Big|_{\varphi=0} + M_{11}(\psi-\psi') \Big|_{\varphi=0} + Q_1(w-w') \Big|_{\varphi=0} + L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3') \Big|_{\varphi=0} - \\ & - N(u-u'') \Big|_{\varphi=\varphi_1} - M_{11}(\psi-\psi'') \Big|_{\varphi=\varphi_1} - Q_1(w-w'') \Big|_{\varphi=\varphi_1} - L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3'') \Big|_{\varphi=\varphi_1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{в) } I_0' = & uN' \Big|_{\varphi=0} + \psi M' \Big|_{\varphi=0} + \Omega_3 L_{13}' \Big|_{\varphi=0} + Q_1(w-w') \Big|_{\varphi=0} - uN'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} - \\ & - \psi M'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} - \Omega_3 L_{13}'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} - Q_1(w-w'') \Big|_{\varphi=\varphi_1} ; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 = & Eh\Gamma_{11}^2 + \frac{Eh^3}{3}K_{11}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{12}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{21}^2 + \\ & + 2(\mu - \alpha)h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + (\gamma + \varepsilon)hk_{13}^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

из себя представляет плотность потенциальной энергии деформации микрополярного кругового тонкого стержня. Отметим, что в выражениях (3.3)-(3.5) одним или двумя штрихами обозначены значения соответствующих величин на краях $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$ кругового стержня.

Вариационное уравнение

$$\delta I_0 = 0 \quad (3.7)$$

будет представлять собой общий вариационный принцип прикладной модели микрополярного упругого кругового стержня.

Варьируя функционал (3.2) по всем функциональным аргументам, получим основные уравнения и естественные граничные условия прикладной модели микрополярного упругого кругового стержня:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения равновесия} \\ \frac{1}{r_0}N - \frac{1}{r_0}\frac{dQ_1}{d\varphi} = q_2^+ - q_2^-, \quad \frac{1}{r_0}Q_1 + \frac{1}{r_0}\frac{dN}{d\varphi} = -(q_1^+ - q_1^-) \\ Q_2 - \frac{1}{r_0}\frac{dM_{11}}{d\varphi} = h(q_1^+ + q_1^-), \quad Q_2 - Q_1 - \frac{1}{r_0}\frac{dL_{13}}{d\varphi} = m^+ - m^-; \end{aligned} \quad (3.8)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} N = 2Eh\Gamma_{11}, \quad Q_1 = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{21}, \\ Q_2 = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}, \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}K_{11}, \quad L_{13} = 2Bhk_{13}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \\ K_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0}\frac{d\Omega_3}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Граничные условия (например, для края $\varphi = 0$):

В случае (3.3):

$$\begin{aligned} N|_{\varphi=0} = N' = \int_{-h}^h \sigma_{11}' dz, \quad M_{11}|_{\varphi=0} = M' = \int_{-h}^h \sigma_{11}' z dz; \\ Q_1|_{\varphi=0} = Q_1' = \int_{-h}^h \sigma_{12}' dz, \quad L_{13}|_{\varphi=0} = L_{13}' = \int_{-h}^h \mu_{13}' dz. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия свободного края:

$$N = 0, \quad Q = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0; \quad (3.12)$$

В случае (3.4):

$$u|_{\varphi=0} = u' = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h V_1' dz, \quad \psi|_{\varphi=0} = \psi' = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h V_1' z dz; \quad (3.13)$$

$$w|_{\varphi=0} = w' = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h V_2' dz, \quad \Omega_3|_{\varphi=0} = \Omega_3' = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \omega_3' dz.$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия жёсткого защемления:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0; \quad (3.14)$$

В случае (3.5):

$$N|_{\varphi=0} = N' = \int_{-h}^h \sigma_{11}' dz, \quad M_{11}|_{\varphi=0} = M' = \int_{-h}^h \sigma_{11}' z dz; \quad (3.15)$$

$$w|_{\varphi=0} = w' = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h V_2' dz, \quad L_{13}|_{\varphi=0} = L_{13}' = \int_{-h}^h \mu_{13}' dz.$$

Здесь, как частный случай, получим граничные условия шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad N = N', \quad M_{11} = M', \quad L_{13} = L_{13}', \quad (3.16)$$

или $w = 0, \quad N = N', \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0$, когда край шарнирно опёрт и не нагружен внешними моментами.

Известным способом, на основе системы уравнений прикладной модели микрополярного кругового тонкого стержня (3.8)-(3.10), либо, на основе уравнения баланса энергии (1.15), с использованием гипотез раздела два, получим уравнение баланса энергии для указанной прикладной модели:

$$\int_0^a \mathcal{E}_0 dx_1 = \frac{1}{2} A_0, \quad (3.17)$$

где $\frac{1}{2} A_0$ – работа внешних приложенных усилий:

$$\begin{aligned} A_0 = & \int_0^{\varphi_1} \left[(q_1^+ - q_1^-) u + (q_1^+ + q_1^-) h \psi + (q_2^+ - q_2^-) w + (m^+ - m^-) \Omega_3 \right] r_0 d\varphi - \\ & - u N' \Big|_{\varphi=0} - \psi M' \Big|_{\varphi=0} - w Q_1' \Big|_{\varphi=0} - \Omega_3 L_{13}' \Big|_{\varphi=0} + u N'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} + \psi M'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} + \\ & + w Q_1'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} + \Omega_3 L_{13}'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Легко убедиться, что для построенной модели микрополярного упругого тонкого кругового стержня имеют место все энергетические теоремы (Клапейрона, единственности, взаимности работ), а также формулы типа Кастильяно и Грина.

Из общего вариационного уравнения (3.2), как частные случаи, следуют вариационные принципы типа Лагранжа и Кастильяно, следовательно, оправдано применение вариационных методов Ритца и Бубнова-Галеркина, а также метод конечных элементов.

Отметим, что если в функционале (3.2) и в формуле (3.6) для плотности потенциальной энергии деформации, подставить $\alpha = 0$ (а также $\Omega_2 = 0$, $L_{13} = 0$, $k_{13} = 0$), получим функционал и формулу для плотности потенциальной энергии деформации для классического случая упругого кругового тонкого стержня с учётом поперечных сдвигов[7].

4. Заключение. На основе метода гипотез построен общий вариационный принцип прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней. На основе указанного вариационного принципа получены основные уравнения и естественные граничные условия прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней. Изучается энергетика явления, а также обосновывается применимость вариационных методов и метода конечных элементов для решения краевых задач прикладной модели микрополярных упругих круговых тонких стержней.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542с.
2. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P.383.
3. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells//International Journal of Mechanics. 2014. Vol.8. P. 93-100.
4. Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// J. of Mat. Sci. and Engineering. 2012. V.2. № 1. P.98-108.
5. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик //Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С.148-155.
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.
7. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учётом поперечных сдвиговых деформаций //Докл. НАН Армении. 2016. С.34-42.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН РА, д.ф.-м.н, проф., зав. каф. анализа и диф. уравнений Гюмрийского госпединститута им.М.Налбандяна.

Хачатрян Мелине Вардановна – аспирант Гюмрийского госпединститута им.М.Налбандяна. Тел.: (093) 15 16 98. E-mail: khachatryanmeline@mail.ru

Поступила в редакцию 28.03.2016