

УДК 539.3

**АНАЛИЗ ПРОГИБА БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА КОНЦАХ**

**Саакян А.А.**

**Ключевые слова:** изгиб балки, сосредоточенная сила, симметричный прогиб, максимальный прогиб

**Keywords:** beam bending, concentrated force, symmetrical deflection, maximum deflection.

**Բանալի բառեր:** հեծանի ծռում, կենտրոնացած ուժ, համաչափ ձկվածք, առավելագույն ձկվածք

**Մահակյան Ա.Ա.**

**Կենտրոնացած ուժի ազդեցության տակ հեծանի ձկվածքի վերլուծությունը տարբեր եզրային պայմանների դեպքում**

Հեծանի ծայրերի հենման պայմաններից կախված հետազոտվել է այն հատույնների տիրույթը, որտեղ հեծանը կենտրոնացած ուժի ազդեցության տակ կարող է ունենալ առավելագույն ձկվածք: Կատարվել է ստացված արդյունքների համեմատություն և պարզվել է, որ հետազոտվող տիրույթը ամենամեծն է հեծանի ծայրերի կոշտ ամրացման դեպքում և, գտնվելով հեծանի միջնակետի շուրջ, կազմում է նրա երկարության մեկ երրորդը: Կառուցվել է կենտրոնացած ուժերի էապես անհամաչափ համակարգ, որի ազդեցության տակ հեծանը կրում է համաչափից քիչ տարբերվող ձկվածք:

**Sahakyan A.A.**

**Deflection Analysis of a Beam Subjected to Action of Concentrated Force at the Various Conditions on the Edges.**

The interval of beam cross-section coordinates where beam can have the maximal deflection is investigated in dependence of the support conditions. Comparison of obtained results was conducted and it is found that mentioned interval is the largest in the case of fixed edges and is one-third the length of the beams around the mid-point. The essentially nonsymmetrical system of concentrated forces under action of which the beam gets almost symmetrical deflection is built.

Исследован интервал изменения координаты сечения балки, в которой она может иметь максимальный прогиб, в зависимости от условий опирания ее концов. Проведено сравнение полученных результатов и выяснено, что указанный интервал является наибольшим в случае жесткого закрепления обоих концов балки и составляет одну треть длины балки вокруг средней точки. Построена существенно несимметричная система сосредоточенных сил, под действием которой балка приобретает практически симметричный прогиб.

**Введение.** Общеизвестные задачи строительной механики для упругих балок (и пластин) требуют определение напряженно-деформированного состояния при заданных нагрузках и граничных условиях. Представляют также интерес задачи, когда по какой-либо характеристике деформированного или напряженного состояния необходимо определить приложенную нагрузку. Одна из таких задач приводится в книге С.П.Тимошенко [1], где по величине угла наклона касательной к прогибу в точке свободного опирания балки необходимо найти точку приложения сосредоточенной нагрузки. В определенном смысле такие задачи являются обратными. К такому классу обратных задач можно отнести также исследования, проведенные в статьях [2-4]. В частности, в работе [4], по аналогии со статьей [5], ставится вопрос – можно ли услышать упругую опору.

В настоящей работе ставится вопрос как выбрать нагрузку, чтобы максимальный прогиб был в заданном поперечном сечении балки. Исходя из известной задачи для струны, где максимальный прогиб получается в точке приложения сосредоточенной силы, рассматриваемая задача также решается для случая сосредоточенной нагрузки. В результате получается, что не во всех сечениях балки можно получить максимальный прогиб. В зависимости от вида закрепления концов балки установлен интервал точек сечения балки, в которых она может иметь максимальный прогиб.

**Постановка задачи и ее решение.** В рамках классической теории Кирхгоффа-Лява рассмотрим уравнение изгиба балки

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -q(x) \quad (1)$$

где  $D = EJ_x$  - жесткость балки на изгиб,  $E$  - модуль Юнга материала балки,  $J_x$  - момент инерции поперечного сечения.

Целью исследования является определение интервала точек, в которых балка, при различных условиях опирания на концах, может иметь максимальный прогиб. Поставленный вопрос будет правомочен, если каждый из концов балки либо шарнирно оперт, либо жестко зашпемлен.

Путем последовательного интегрирования уравнения (1) нетрудно получить общее представление прогиба  $w(x)$ . Оно имеет вид:

$$Dw(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Постоянные интегрирования  $C_i (i = \overline{1,4})$  определяются из условий на концах балки.

Параллельно рассмотрим три возможных случая: а) шарнир-шарнир, б) зашпемление-шарнир, в) зашпемление-зашпемление (фиг. 1).

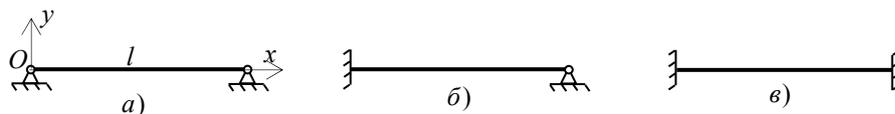


Рис. 1 Схематическое представление условий опирания балки

**Случай а).** Отметим, что полученные для этого случая результаты имеются и в работе [1], однако, для сохранения цельности изложения, приведем их заново.

Имеем граничные условия

$$w = 0; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l, \quad (3)$$

после удовлетворения которым найдем:

$$w(x) = \frac{1}{6D} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + \frac{1}{6Dl} \int_0^l x(l-s)(x^2 - 2ls + s^2) q(s) ds \quad (5)$$

Полагая, что на балку приложена сосредоточенная сила  $q(x) = q_0 \delta(x - \zeta)$ , будем иметь

$$6Dw(x) = q_0 (\zeta - x)^3 H(x - \zeta) + \frac{q_0}{l} x(l - \zeta)(x^2 - 2l\zeta + \zeta^2) \quad (6)$$

Продифференцировав последнее по  $x$  и приравняв к нулю, получим уравнение для определения точки максимального прогиба балки

$$-3(\zeta - x)^2 H(x - \zeta) + \frac{1}{l}(l - \zeta)(3x^2 - 2l\zeta + \zeta^2) = 0 \quad (7)$$

Очевидно, что наибольший прогиб под действием силы  $q_0$  имеет место в случае, когда сила приложена в середине, и равен

$$w_{\max} = -\frac{1}{48} \frac{q_0 l^3}{D} \quad (8)$$

Из уравнения (7) нетрудно найти, что максимальный прогиб балки будет иметь место в точке

$$x = \begin{cases} l - \sqrt{(l^2 - \zeta^2)}/3 & \text{при } \zeta < l/2 \\ \sqrt{(2l\zeta - \zeta^2)}/3 & \text{при } \zeta > l/2 \end{cases}$$

При стремлении  $\zeta \rightarrow l$  найденная точка максимального прогиба стремится к значению  $x_{\max} = l/\sqrt{3}$ . Такое же значение для точки максимального прогиба было получено при приложении на конце балке момента [6], который является предельным случаем рассматриваемой здесь задачи, когда  $\zeta \rightarrow l$  при условии постоянства произведения  $q_0(\zeta)(l - \zeta)$ .

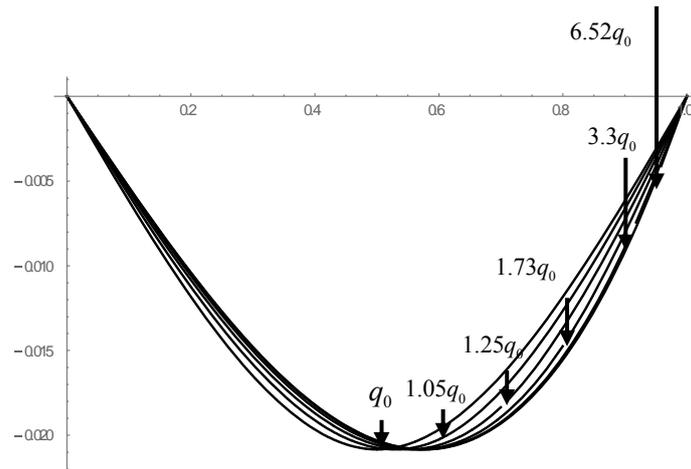
Таким образом, где бы не была приложена сосредоточенная сила, максимальный прогиб балки имеет место в средней части балки, занимающей интервал

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)l \approx 0.42265l < x < \frac{\sqrt{3}}{3}l \approx 0.57735l \quad (9)$$

При этом нетрудно убедиться, что наибольший прогиб балки может превосходить прогиб в средней точке максимально чуть более 2.5%.

Естественно ожидать, что и при любой распределенной, очевидно знакопостоянной, нагрузке, точка максимального прогиба балки будет находиться в этом же интервале.

На фиг.2 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках  $\zeta / l = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$ . Величины сосредоточенных сил выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым. Из рисунка видно, что для сил, приложенных близко к концу, формы искривленной балки практически не отличаются друг от друга.



Фиг.2 Шарнир-шарнир

**Случай б).** Полагая, что защемленным является левый конец балки, будем иметь граничные условия:

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad w = 0; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad (10)$$

Тогда прогиб определится формулой

$$w(x) = \frac{1}{6D} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + \frac{x^2}{4Dl^2} \int_0^l \left\{ lx - 2ls + s^2 - \frac{x(l-s)^2}{3l} \right\} (l-s) q(s) ds$$

Полагая, как и в предыдущем случае,  $q(x) = q_0 \delta(x - \zeta)$  найдем, что в этом случае точкой максимального прогиба является

$$x = \begin{cases} \left[ 1 - \sqrt{\frac{l-\zeta}{3l-\zeta}} \right] l & \text{при} \quad \zeta < (2 - \sqrt{2})l \\ \frac{2l\zeta(2l-\zeta)}{2l^2 + 2l\zeta - \zeta^2} & \text{при} \quad \zeta \geq (2 - \sqrt{2})l \end{cases}$$

При этом наибольший прогиб под действием силы  $q_0$  имеет место в случае, когда сила приложена в точке  $\zeta = (2 - \sqrt{2})l$ , и равен

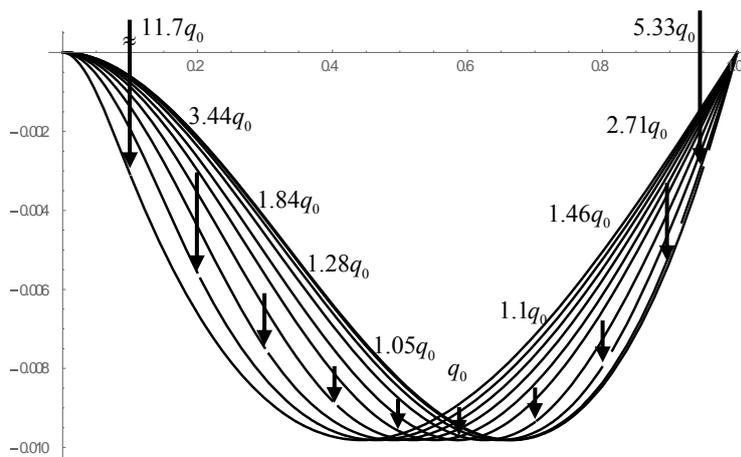
$$w_{\max} = \frac{q_0 l^3}{D} \left[ -5 \frac{2}{3} + 4\sqrt{2} \right] \quad (11)$$

Сравнив значения (8) и (11), замечаем, что защемление одного конца балки приводит к более чем двукратному уменьшению наибольшего прогиба балки.

Интервалом, в котором может находиться точка максимального прогиба в этом случае, будет

$$\left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) l < x < \frac{2}{3} l \quad 0.42265 < \frac{x}{l} < 0.6666667$$

В этом случае, разница между наибольшим прогибом балки и прогибом в точке  $\zeta = (2 - \sqrt{2})l$ , соответствующей наибольшему прогибу (11), может достигнуть почти 11%, если сосредоточенная сила приближается к защемленному концу, и 4%, если сосредоточенная сила приближается к шарнирно опертому концу.



Фиг.3 Защемление - шарнир

На фиг.3 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках  $\zeta / l = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; (2 - \sqrt{2}); 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$ . Величины сосредоточенных сил, как и выше, выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым.

**Случай в).** Граничные условия будут:

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l, \quad (12)$$

прогиб -

$$w(x) = \frac{1}{6D} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + \frac{x^2}{6Dl^3} \int_0^l (l-s)^2 [x(l+2s) - 3ls] q(s) ds \quad (13)$$

Полагая, как и ранее,  $q(x) = q_0 \delta(x - \zeta)$  найдем, что в этом случае точкой максимального прогиба является

$$x = \begin{cases} l^2 / (3l - 2\zeta) & \text{при} \quad \zeta \leq l \\ 2\zeta l / (l + 2\zeta) & \text{при} \quad \zeta > l \end{cases}$$

Ввиду симметрии, как и в первом случае, наибольший прогиб под действием силы  $q_0$  имеет место в случае, когда сила приложена в середине, и равен

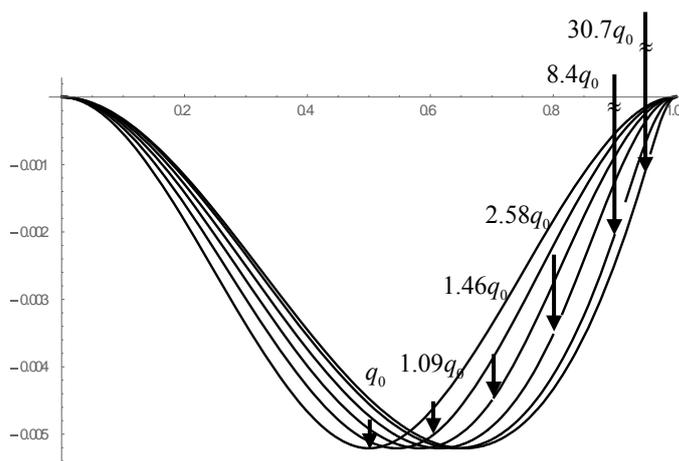
$$w_{\max} = -\frac{1}{192} \frac{q_0 l^3}{D} \quad (14)$$

Сравнив значения (8) и (14), замечаем, что защемление обоих концов балки приводит к четырехкратному уменьшению наибольшего прогиба балки.

В этом случае максимальный прогиб может иметь место в интервале:

$$\frac{1}{3} l < x < \frac{2}{3} l$$

а разность между наибольшим прогибом балки и прогибом в средней точке может достигнуть 15.6%.



Фиг. 4 Защемление - защемление

На фиг.4 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках  $\zeta / l = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$ . Как и выше, величины сосредоточенных сил выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым.

Исследуя изгиб балки под действием сосредоточенной силы, приложенной в разных точках, уместно вспомнить о такой своеобразной точке как точка золотого сечения и найти точки максимального прогиба, когда сила приложена в этой точке и, наоборот, найти те точки, куда надо приложить силу, чтобы максимальный прогиб имел место в точке золотого сечения.

Пусть сила приложена в точке золотого сечения  $\frac{\zeta}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180\dots$ . Тогда максимальный прогиб будет в следующих точках:

$$\text{Случай 1.} \quad \frac{x_{\max}}{l} = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5}{6}} = 0.5335\dots$$

$$\text{Случай 2.} \quad \frac{x_{\max}}{l} = \frac{2(10-3\sqrt{5})}{11} = 0.5985\dots$$

$$\text{Случай 3.} \quad \frac{x_{\max}}{l} = \frac{5-\sqrt{5}}{5} = 0.5527\dots$$

Теперь найдем такую точку приложения силы, чтобы максимальный прогиб имел место в точке золотого сечения  $\frac{x_{\max}}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180\dots$

Случай 1. нет

$$\text{Случай 2.} \quad \frac{\zeta}{l} = \frac{5-\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} = 0.6750\dots$$

$$\text{Случай 3.} \quad \frac{\zeta}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2(3-\sqrt{5})} = 0.8090\dots$$

Поставим такой вопрос – можно ли в случаях 1) и 3) асимметрию изогнутой оси балки, вызванную сосредоточенной силой, приложенной вне центра балки, свести к минимуму посредством приложения подчиняющейся определенной закономерности системы сосредоточенных сил меньшей интенсивности.

Пусть сосредоточенная сила  $P$  приложена в  $\zeta = pl$  ( $0.5 < p < 1$ ). Предположим, что в точках  $\zeta_k = p^k l$  ( $k = 2, 3, \dots$ ), составляющих геометрическую прогрес-

сию со знаменателем  $p$  приложены силы  $P_k = a^{k-1}P$  ( $0 < a < 1, k = 2, 3, \dots$ ), также составляющие убывающую геометрическую прогрессию.

Прогиб балки от такой нагрузки, например для случая 1), определится формулой

$$6Dw(x) = P \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} \left[ (\zeta_k - x)^3 H(x - \zeta_k) + \frac{x}{l} (l - \zeta_k) (x^2 - 2l\zeta_k + \zeta_k^2) \right]$$

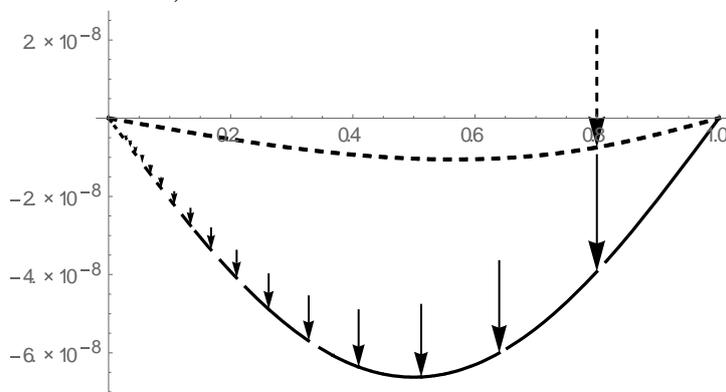
Из условия нахождения наибольшего прогиба в средней точке получим уравнение для определения знаменателя  $a$ :

$$\frac{p}{4(1-ap)} - \frac{p^3}{1-ap^3} + 3 \sum_{i=1}^m a^{i-1} \left( p^k - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

Здесь  $m = [\ln 0.5 / \ln p]$  - целая часть отношения в скобках.

В частности, если сила приложена в золотом сечении, т.е.  $p = 0.6180\dots$ , то  $a = 0.5172\dots$ . Отметим также другой интересный случай, когда сумма дополнительных приложенных сил равна величине заданной силы  $P$ . Это имеет место только при  $p = 0.6087\dots$  и  $a = 0.4999\dots$

На фиг. 5 представлены изогнутые оси балки под действием силы  $P$ , приложенной в точке  $\zeta = 0.8l$  ( $p = 0.8$ ), (пунктир) и под действием системы сил  $P_k = a^{k-1}P$  ( $a = 0.7891\dots, k = 1, 2, \dots$ ) (сплошная линия).



Фиг. 5. Изогнутая ось балки

Наибольший прогиб под действием системы сил балка приобретает точно в средней точке, однако изогнутая ось не становится идеально симметричной относительно середины балки. При этом отклонение от симметрии является наибольшим у концов балки и в данном случае достигает всего 0.67%. Следует заметить, что величина отклонения от симметрии существенно зависит от точки приложения силы  $P$ , т.е. от точки  $\zeta = pl$ , и принимает максимальное значение около 3.5% при значении  $p$  около 0.57. При  $p \rightarrow 1$  изогнутая ось балки становится симметричной,

поскольку и  $a \rightarrow 1$ , т.е. бесконечная система сил стремится к равномерно распределенной нагрузке.

Аналогичный анализ для закрепленной по обоим концам балки показал, что при наибольшем прогибе в середине балки отклонение от симметрии в этом случае намного больше и достигает почти 20%, причем опять при значении  $p$  около 0.57.

Отметим, что прогиб балки под действием бесконечной системы сил изменяется в пределах, соответствующих прогибу от сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в середине балки, и прогибу от равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $P$ .

**Заключение.** Сравнение полученных для шарнирно-опертой и жестко закрепленной балок результатов показало, что при действии одной и той же силы наибольший прогиб в первом случае в четыре раза превышает прогиб во втором случае. Но несмотря на это, область, в которой этот прогиб возможен, чуть более чем в два раза меньше и занимает около 15.5% длины балки. Знание этой области может помочь в вопросе эффективного подпирания балки при действии на нее нагрузки, имеющей сильно выраженную несимметричность относительно середины балки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Сопrotивление материалов. Т.1, М., Наука, 1965, 365с.
2. Гнуни В.Ц, Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости. В сб. «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем», Ереван, Изд-во ЕГУ, 1997, с.115-120.
3. Белубекян М.В., Гараков В.Г. Задача С.А.Амбарцумяна о выборе места расположения опор балки. В сб. «Седьмая годовичная научная конференция РАУ», Ереван, Изд-во РАУ, 2013, с. 19-22.
4. Крейн М.Г., Яврян В.А. О функциях спектрального сдвига, возникающих при возмущениях положительного оператора. Journal of Operator Theory, Vol.6, Issue 1, 1981, pp. 155-191
5. Кас, Mark "Can one hear the shape of a drum?". The American Mathematical Monthly, vol. 73 (1966), No.4, Part 2, pp. 1-23.
6. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. М.-Л., Гостехиздат, 1949, 772с.

#### Сведения об авторе:

**Саакян Арег Аветикович**, аспирант Института механики НАН РА

**Адрес:** пр. М.Маштоца 45/16 кв.106, Ереван, 0019

**Тел:** (+37499)608866

**E-mail:** areg1992@gmail.com