ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №2, 2016 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НАПОЛНИТЕЛЕМ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Мовсисян Л.А.

Բանալի բառեր. Գլանային թաղանթ, կայունություն, լցոն, խառը եզրային պայմաններ, նորմալ ճնշում:

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, устойчивость, наполнитель, смешанные граничные условия, нормальное давление.

Key words: cylindtical shell, stability, core, mixed boundary conditions, external normal pressure.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Խառը եզրային պայմաններով լցոնված գլանային թաղանթի կայունության մասին

Դիտարկվում է լցոնված գլանային թաղանթի կայունությունը խառը եզրային պայմանների դեպքում արտաքին նորմալ ճնշման տակ: Լցոնի ազդեցությունը հաշվի է առնվում Վինկլերի մոդելի դրվածքով: Առաձգամածուցիկ լցոնի դեպքում միաչափ խնդիրը օղակի համար լուծվում է ճշգրիտ:

Movsisyan L.A.

About the stability of cylindrical shell with core for mixed boundary condition

The stability of cylindrical shell with a core for mixed boundary conditions under external normal pressure is conidered. The influence of the core is considered by the model of Vincler.
Onedemitional problen for the ring with viscoellastic core is solved with exaction.

Рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки с наполнителем при внешнем нормальном давлении. Влияние наполнителя учитывается по модели Винклера.

Одномерная задача для кольца с вязкоупругим наполнителем решается точно.

Введение. В [1,2] была рассмотрена устойчивость цилиндрических оболочек при внешнем нормальном давлении для различных граничных условий. Так как целью исследования оказывалось влияние тангенциальных граничных условий на значения критического давления, то аппаратом исследования является так называемая полубезмоментная теория оболочек, что вполне оправдано для такого типа деформирования. Между прочим, заметим, что для классического случая свободного опирания такая постановка и точная дают одинаковые результаты.

В [3,4] уже рассматривалась устойчивость цилиндрических оболочек при смешанных граничных условиях: на части торцов заданы одни условия, на оставшиеся – другие.

В предлагаемой работе изучается такая же задача, когда цилиндр – с наполнителем. Влияние последнего моделируется по модели пластинки на упругом основании – модель Винклера. Большое количество работ по устойчивости оболочек на основании этой же модели выполнено [5].

Одномерная задача (кольцо с наполнителем) в предположении сплошности наполнителя и скользящего контакта между кольцом и наполнителем, решается точно, в предположении, что материал наполнителя вязкоупругий. И вот, что интересно, при определении критического давления в выражении члена, учитывающего влияние наполнителя, количество волн не входит, т.е. своего рода – оправдание модели Винклера.

1. Постановка задачи. Уравнение устойчивости оболочки под нормальным давлением q с учётом влияния наполнителя [2,3] будет:

$$D\frac{\partial^8 w}{\partial y^8}+\frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+T_2^0\frac{\partial^6 w}{\partial y^6}+k\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0\,. \tag{1.1}$$

Здесь новое – последний член, где k – коэффициент постели. Как и в предыдущих исследованиях, учтено, что и потери устойчивости происходят по формам $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\gg\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Здесь это условие выполняется тем более. Начальное кольцевое усилие определяется формулой

$$T_2^0=\frac{qR}{1+K},\ K=\frac{k(1-\nu^2)R^2}{Eh}. \tag{1.2}$$

Будем искать решение (1.1) в виде

$$w=\sum_{n=}^{\infty}\left(w_n^{(1)}\cos n\varphi+w_n^{(2)}\sin n\varphi\right)\ ,\ \ y=R\varphi, \tag{1.3}$$

тогда

$$\frac{d^4 w_n^{(i)}}{d\xi^4}-\lambda_n^4 w_n^{(i)}=0,\ \ n\le n_0 \tag{1.4}$$

$$\frac{a^4 w_n^{(i)}}{d\xi^4}+4\mu_n^4 w_n^{(i)}=0\ ,\ n>n_0. \tag{1.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\lambda_n^4=\frac{n^4}{l_1^4}\left|0,92 l_1 h_1^{3/2}\frac{n^2}{1+K}\lambda-\frac{n^4 h_1^2}{12\left(1-\nu^2\right)}-\frac{k_1}{h_1}\right|$$

$$h_1=\frac{h}{R},\ \ k_1=\frac{kR}{E},\ \ l_1=\frac{R}{l},\ \ \xi=\frac{x}{l} \tag{1.6}$$

$$4\mu_n^4=-\lambda_n^4\,,\ \lambda=\frac{q}{q_{kp}\,,},\ q_{kp}=0,92El_1\left(h_1\right)^{3/2}.$$

Как видно из (1.6), q_{kp} – это критическое давление свободно опёртой оболочки без наполнителя, что осуществляется при $n\approx 2.7\left(l_1\right)^{1/2}\left(h_1\right)^{-1/4}$.

Решение систем (1.4) и (1.5), соответственно,

$$w_n^{(i)}=A_n^{(i)}\cos\lambda_n\xi+B_n^{(i)}\sin\lambda_n\xi+C_n^{(i)}\mathrm{ch}\lambda_n\xi+D_n^{(i)}\mathrm{sh}\lambda_n\xi \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}w_n^{(i)}=A_n^{(i)}\mathrm{ch}\mu_n\xi\cos\mu_n\xi+B_n^{(i)}\mathrm{ch}\mu_n\xi\sin\mu_n\xi+\\+C_n^{(i)}\mathrm{sh}\mu_n\xi\sin\mu_n\xi+D_n^{(i)}\mathrm{sh}\mu_n\xi\cos\mu_n\xi\end{gathered} \tag{1.8}$$

Решение, соответствующее $n=0$, не записывается, так как при определении минимального критического давления оно не используется.

Начало координаты x берём в середине длины оболочки и будем считать, что на концах $\xi=\pm 0,5$ заданы смешанные условия, а именно:

$$\begin{aligned} &u=v=0 \quad \text{при} \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 \\ &T_1=v=0 \quad \text{при} \quad -\pi \le \varphi - \varphi_0,\ \varphi_0 < \varphi \le \pi. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Эти условия равнозначны следующим [2]:

$$\begin{aligned} &w=w'_\xi=0 \quad \text{при} \quad -\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 \\ &w=w''_\xi=0 \quad \text{при} \quad -\pi \le \varphi < -\varphi_0,\ \ \varphi_0 \le \varphi \le \pi. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Симметричные и антисимметричные формы потери устойчивости будем изучать в отдельности. Итак, для симметричного случая из (1.7) и (1.8) следует взять члены с коэффициентами A_n и C_n. Тогда, удовлетворяя условиям (1.10), для их определения получим следующие системы:

$$\sum_{n=1}^{n_0}\left[X_n^{(i)}\frac{1}{\lambda_n}\left(\mathrm{tg}0,5\lambda_n+\mathrm{th}0,5\lambda_n\right)\right]\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}+$$

$$+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left[X_n^{(i)}\frac{1}{\mu_n}\frac{\mathrm{sh}\lambda_n+\sin\lambda_n}{\mathrm{ch}\lambda_n+\cos\lambda_n}\right]\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}=0 \quad \text{при} \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0$$

$$\sum_{n=q}^{\infty}\left|X_n^{i}\right|_{\sin n\varphi}^{\cos n\varphi}=0 \quad \text{при} \quad -\pi \le \varphi < -\varphi_0 \quad \varphi_0 < \varphi \le \pi \tag{1.11}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} &X_n^{(i)}=-A_n\lambda_n^2\cos 0,5\lambda_n \quad \text{при} \quad n\le n_0 \\ &X_n^{(i)}=A_n\mu_n^2\frac{\mathrm{ch}^2 0,5\mu_n+\cos^2 0,5\mu_n-1}{\mathrm{ch}0,5\mu_n\cos 0,5\mu_n} \quad \text{при} \quad n>n_0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Решение парных уравнений (1.11) сводится к решению следующих систем бесконечных алгебраических уравнений:

$$X_m^{(i)}=\sum_{i=1}^{\infty}a_{mn}^{(i)}X_n^{(i)} \qquad (i=1,2), \tag{1.13}$$

где введены обозначения:

$$a_{mn}^{(i)}=d_nC_{mn}^{(i)}$$

$$d_n=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\lambda_n}\left(\mathrm{tg}0,5\lambda_n+\mathrm{th}0,5\lambda_n\right), & n\le n_0\\[2mm] 1-\dfrac{1}{\mu_n}\dfrac{\mathrm{sh}\mu_n+\sin\mu_n}{\mathrm{ch}\mu_n+\cos\mu_n}, & n\ge n_0+1\end{cases} \tag{1.14}$$

$$C_{mn}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{m^2-n^2}\left(m\sin m\varphi_0\cos n\varphi_0-n\sin n\varphi_n\cos m\varphi_0\right) \qquad (1.15)$$

$$C_{mn}^{(2)}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{m^2-n^2}\left(n\sin m\varphi_0\cos n\varphi_0-m\sin n\varphi_0\cos m\varphi_0\right)$$

$$C_{mm}^{(1)}=\frac{1}{\pi}\left(\varphi_0+\frac{1}{2m}\sin 2m\varphi_0\right),\; C_{mm}^{(2)}=\frac{1}{\pi}\left(\varphi_0-\frac{1}{2m}\sin 2m\varphi_0\right)$$

Так как минимальные критические значения получаются при симметричных относительно $\xi=0$ форм потери устойчивости, то подобная система при антисимметричных формах потери устойчивости не приводится.

Значения критического давления с удовлетворительной точностью получены из детерминантов восьмого-десятого порядков и так как минимальная $\lambda_{kp}=1$ получается при $k=0$ и $n=2,7\cdot l_i^{1/2}\cdot h_i^{-1/4}$, то детерминанты взяты выше, чем этот номер.

В табл. 1 приведены значения λ_{kp} для некоторых параметров и значений φ_0. Следует отметить, что, в общем, ничего неожиданного нет.

Таблица 1

	l_1^{-1}	0,5				1,0			
h_1^{-1}	φ_0 / k_1	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
100	0	1,304	1,372	1,507	1,544	1,120	1,197	1,408	1,525
	10^{-6}	1,308	1,376	1,511	1,549	1,121	1,198	1,409	1,526
	10^{-5}	1,344	1,408	1,544	1,582	1,132	1,208	1,418	1,533
200	0	1,218	1,297	1,488	1,516	1,119	1,183	1,394	1,547
	10^{-6}	1,235	1,312	1,504	1,532	1,123	1,188	1,398	1,532
	10^{-5}	1,383	1,453	1,641	1,668	1,164	1,226	1,432	1,558
300	0	1,115	1,179	1,381	1,515	1,098	1,162	1,333	1,514
	10^{-6}	1,161	1,219	1,415	1,549	1,109	1,171	1,342	1,523
	10^{-5}	1,566	1,582	1,728	1,854	1,203	1,259	1,420	1,601

2. Для одномерного случая (кольцо с наполнителем) будем изучать задачу устойчивости точно, в предположении, что наполнитель из типичного вязкоупругого материала:

$$\sigma=\tilde{E}_0\varepsilon=E_0\left(\varepsilon-\frac{E_0-H}{E_0 n}\int_0^t e^{-\frac{1}{n}(t-\tau)}\varepsilon d\tau\right). \qquad (2.1)$$

Если наполнитель сплошной, для начального состояния под равномерным давлением кольцевое усилие будет иметь вид (коэффициент Пуассона постоянен)

$$T_2^0 = \frac{Rq}{1 + \dfrac{\tilde{E}_0}{1-\nu_0} \cdot \dfrac{R}{hE}} \tag{2.2}$$

Так как нас интересует поведение систем при $t = 0$ и $t = \infty$, то в выражении T_2^0 в первом случае вместо $\tilde{E}_0$ надо брать E_0, а во втором – H. Точно так же систему уравнений возмущённого состояния во избежание длинных (и ненужных записей) запишем в одном виде. Система уравнений устойчивости в предположении, что в кольцевом направлении отсутствует сдвиговое напряжение, будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \tilde{h}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = 0 \quad , \quad \tilde{h} = \frac{h^2}{12R^2} \\ \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + w + \tilde{h}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{T_2^0}{Eh}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = -\frac{R^2}{Eh}Z \end{gathered} \tag{2.3}$$

В предположении сплошности наполнителя функцию напряжения возмущённого состояния можно брать в виде:

$$\Phi = \left(A_m r^m + B_m r^{m+2}\right)\cos m\varphi \tag{2.4}$$

Напряжения через Φ выражаются известным образом:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \ \sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) \tag{2.5}$$

Условия контакта кольца с наполнителем $(r = R)$ при отсутствии сдвигового напряжения будут:

$$u_r = w, \ \sigma_r = Z, \ \sigma_{r\varphi} = 0. \tag{2.6}$$

В окончательном виде для величин наполнителя получим (для случая $t = 0$)

$$\begin{gathered} u_r \Big|_{r=R} = \frac{2B_m}{E_0}\left(1-\nu_0\right)R^{m+1}\left(m+1\right)\cos m\varphi \\ \sigma_r \Big|_{r=R} = 2B_m R^m \left(m+1\right)\cos m\varphi \end{gathered} \tag{2.7}$$

что вместе с условием (2.6) даёт

$$Z = \frac{E_0}{1-\nu_0}\overline{w}\cos m\varphi \tag{2.8}$$

Если искать решение (2.3) в виде

$$w = \overline{w}\cos m\varphi \quad \text{и} \quad u = \overline{u}\sin m\varphi \tag{2.9}$$

с учётом (2.8), то критическое давление определяется из уравнения

$$\overline{h}\left(m^2 - 1\right) + \frac{A}{m^2} = \frac{\lambda}{1+A}, \ \lambda = \frac{q}{E}\frac{R}{h}, \ A = \frac{E_0}{E}\frac{R}{h}\frac{1}{1-\nu_0}. \tag{2.10}$$

Отсюда относительное мгновенное критическое давление –

$$\bar{\lambda} = \frac{q_{kp}}{q_{kp}^{0}} = \frac{1}{3}(1+A)\left[2\left(\frac{A}{\bar{\bar{h}}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \tag{2.11}$$

и потери устойчивости по форме –

$$m_k = \left(\frac{A}{\bar{\bar{h}}}\right)^{1/4}, \quad q_{kp}^{(0)} = \frac{1}{4}\frac{Eh^3}{R^3}. \tag{2.12}$$

Для длительной потери устойчивости в выражении A надо E_0 заменить на H. Наличие наполнителя существенно увеличивает значение критического давления и формы потери устойчивости.

Для длительной потери устойчивости в формулах (2.11) и (2.12) в A надо E_0 заменить на H. Естественно, в последнем случае и давление будет меньше, чем в первом, и количество волн.

Заключение. Показано влияние вязкоупругого наполнителя на значения критического давления в зависимости от физических и геометрических параметров.

Для первой задачи были произведены вычисления, подробно приведённые в табл.1, но при k – в два раза больше, чем там, т.е., если в первом случае можно считать данные для длительной, то в последнем случае будут данные мгновенной потери устойчивости. И самая большая разница между ними – порядка 20%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саченков А.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием равномерного поперечного давления. // Изв. Казан. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн.наук. 1958. №12. С.127-132.
2. Алфутов Н.А. О зависимости значения верхнего критического давления цилиндрической оболочки от граничных условий для касательных составляющих перемещений. Теория оболочек и пластин (Тр.IV Всесоюзн. конф.). Ереван: 1964, с.193-198.
3. Мовсисян Л.А. Об устойчивости цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями. //ПМ. Т.XIV. №10. 1978. С.52-57.
4. Мовсисян Л.А. Две задачи по устойчивости для цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями при внешнем давлении. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №1. С.31-36.
5. Ильгамов М.А., Иванов Б.А., Гулин Б.В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М.: Наука, 1977. 288с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович,
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2. **Тел.:** (+37410). 568201
E-mail: mechins@sci.am

Поступила в редакцию 30.03.2016