

УДК 539.3

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ
СТУПЕНЧАТО ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ С УЧЁТОМ
ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ**

Белубекян Э.В., Погосян А.Г.

Բանալի բառեր. տրանսվերսալ իզոտրոպ սալ, լայնական սահք, օպտիմալ նախագծում:

Ключевые слова: трансверсально-изотропная пластинка, поперечные сдвиги, оптимальное проектирование.

Keywords: transversely isotropic plate, transverse shifts, optimal design.

Բեկուբեկյան Է.Վ., Պողոսյան Ա.Գ.

**Վտոր ևս կտոր հաստատուն հաստության տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի նախագծումը
ծռման դեպքում լայնական սահքերի հաշվառումով**

Սալերի ծռման ճշգրտված տեսության հիման վրա, հաշվի առնելով լայնական սահքերի ազդեցությունը, լուծվում է տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի օպտիմալ նախագծման խնդիրը, երբ այն ուժեղացված է միջին մակերևույթի նկատմամբ համաչափ դասավորված իզոտրոպ նյութից պատրաստված արտաքին շերտերով: Որոշվում են լրացուցիչ շերտերի օպտիմալ երկրաչափական պարամետրերը, որոնք կառուցվածքի հաստատուն կշռի և տրված զաբարիտային չափերի դեպքում ապահովում են նրա մեծագույն կոշտությունը:

Belubekyan E.V., Poghosyan A.G.

Design of a transversely isotropic plate of stepwise variable thickness under bending accounting for transverse shifts

Based on the enhanced theory of plate bending that takes into account the effect of transverse shifts, the problem of optimal design of rectangular transversely isotropic plate, reinforced in its middle part with additional isotropic layers, is solved. The optimal geometric parameters of the additional layers are determined that provide the highest rigidity of the structure for its given dimensions and total weight.

На основе уточнённой теории изгиба пластин, учитывающей влияние поперечных сдвигов, решается задача оптимального проектирования прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки, усиленной в её средней части дополнительными изотропными слоями. Определяются оптимальные геометрические параметры дополнительных слоёв, обеспечивающие при заданных габаритных размерах и общем весе конструкции её наибольшую жёсткость.

Введение.

При расчётах анизотропных пластин переменной толщины факторы, которыми пренебрегают в классической теории оболочек и пластин, могут быть существенными при определении напряжённо-деформированного состояния. В связи с этим, зачастую бывает необходимым использование уточнённых моделей расчёта, учитывающих влияние поперечных сдвигов.

Здесь, на основе уточнённой теории анизотропных пластин С.А. Амбарцумяна [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов, решается задача оптимального проектирования прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки, усиленной в

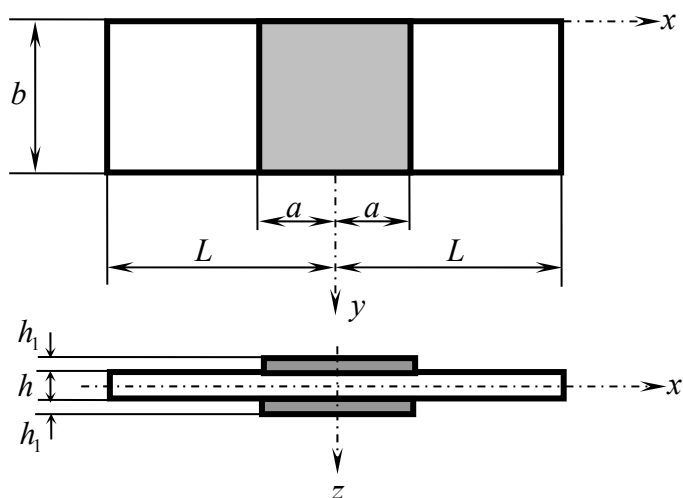
её средней части дополнительными изотропными слоями. Определяются оптимальные геометрические параметры дополнительных слоёв, обеспечивающие при заданных габаритных размерах и общем весе конструкции её наибольшую жёсткость. На основе произведённых числовых расчётов производится анализ результатов, полученных на основе уточнённой и классической теорий.

Вопросы оптимального проектирования пластинки кусочно-постоянной толщины при изгибе на основе классической теории исследовались в работах [2-4].

Постановка задачи.

Рассматривается свободно опёртая по контуру прямоугольная пластинка размерами $2L \times b \times h$, изготовленная из трансверсально-изотропного материала, усиленная дополнительными симметрично расположенными относительно её срединной плоскости изотропными слоями размерами $2a \times b \times h_1$, под действием поперечной нагрузки q (фиг.1).

Ставится задача определения на основе уточнённой теории изгиба пластин С.А. Амбарцумяна [1] оптимальных геометрических параметров a и h_1 усиливающих слоёв пластинки, обеспечивающие наибольшую жёсткость пластинки при сохранении их веса, равного весу дополнительных слоёв заданной толщины h_0 , постоянной по всей длине пластинки.



Фиг.1. Расчётная схема пластинки

Решение задачи.

Задача определения напряжённо-деформированного состояния рассматриваемой конструкции решается с учётом влияния поперечных сдвигов. При этом конструкция рассматривается как составленная из отдельных пластин: однослойной на участках $-L \leq x \leq -a$, $a \leq x \leq L$ и трёхслойной на участке $-a \leq x \leq a$ с учётом их совместной работы (условий сопряжения на линиях их раздела $x = \pm a$). Ввиду симметрии рассматривается правая половина пластинки $0 \leq x \leq L$.

Математическая модель рассматриваемой задачи описывается разрешающей системой дифференциальных уравнений для однослойной ($p = 1$) тангсверсально-изотропной пластинки толщиной h и трёхслойной ($p = 2$) пластинки толщиной $h + 2h_1$, условиями симметрии на линии $x = 0$, сопряжения на линии $x = a$ и граничными условиями на сторонах $y = 0$, $y = b$, $x = L$.

Разрешающая система уравнений с учётом поперечных сдвигов [1] для каждой из областей ($p = 1, 2$) пластинки приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} + \frac{\partial \psi_p}{\partial y} &= -\frac{q}{K^{(p)}}, \\ D_{11}^{(p)} \frac{\partial^3 w_p}{\partial x^3} + (D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}) \frac{\partial^3 w_p}{\partial x \partial y^2} - P_{11}^{(p)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \\ - P_{66}^{(p)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (P_{12}^{(p)} + P_{66}^{(p)}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + K^{(p)} \varphi &= 0, \\ D_{22}^{(p)} \frac{\partial^3 w_p}{\partial y^3} + (D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}) \frac{\partial^3 w_p}{\partial y \partial x^2} - P_{11}^{(p)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \\ P_{66}^{(p)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (P_{12}^{(p)} + P_{66}^{(p)}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + K^{(p)} \psi &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия пластинки:

- шарнирного опирания на сторонах $y = 0$ и $y = b$
 $w_p = 0$, $M_y^{(p)} = 0$, $\varphi_p = 0$, $(p = 1, 2)$ при $y = 0$, $y = b$, (2)

- симметрии на линии $x = 0$
 $\varphi_2 = 0$, $\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0$, $M_{xy}^{(2)} = 0$ при $x = 0$, (3)

- шарнирного опирания на стороне $x = L$
 $w_1 = 0$, $M_x^{(1)} = 0$, $\psi_1 = 0$ при $x = L$, (4)

- сопряжения на линии $x = a$
 $w_1 = w_2$, $-\frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3}\right) \varphi_1 = -\frac{\partial w_2}{\partial x} + \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3}\right) \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$
 $M_x^{(1)} = M_x^{(2)}$, $M_{xy}^1 = M_{xy}^{(2)}$, $N_x^{(1)} = N_x^{(2)}$ при $x = a$. (5)

Внутренние усилия в каждой из областей ($p = 1, 2$) пластинки определяются по формулам [1]:

$$M_x^{(p)} = -D_{11}^{(p)} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} - D_{12}^{(p)} \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} + P_{11}^{(p)} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} + P_{12}^{(p)} \frac{\partial \psi_p}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}
M_y^{(p)} &= -D_{11}^{(p)} \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} - D_{12}^{(p)} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} + P_{11}^{(p)} \frac{\partial \Psi_p}{\partial y} + P_{12}^{(p)} \frac{\partial \Phi_p}{\partial x}, \\
M_{xy}^{(p)} &= -2D_{66}^{(p)} \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} + P_{66}^{(p)} \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_p}{\partial x} \right), \\
N_x^{(p)} &= K^{(p)} \Phi_p, \quad N_y^{(p)} = K^{(p)} \Psi_p.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь функции прогибов w_p и функции Φ_p , Ψ_p ($p = 1, 2$) – искомые функции, с помощью которых определяются внутренние усилия (6) в отдельных областях пластинки.

Жёсткости $D_{ik}^{(p)}$ ($p = 1, 2$) пластинки определяются по формулам:

$$D_{ik}^{(1)} = \frac{B_{ik} h^3}{12}, \quad D_{ik}^{(2)} = \frac{1}{12} \left\{ B_{ik} h^3 + B_{ik}^{(1)} \left[(h + 2h_1)^3 - h^3 \right] \right\}$$

где

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}, \quad B_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad B_{66} = G_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\
B_{11}^{(1)} &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2}, \quad B_{12}^{(1)} = \frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2}, \quad B_{66}^{(1)} = G_{12}^{(1)} = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)},
\end{aligned}$$

E , ν , G_{12} – упругие постоянные материала трансверсально-изотропного слоя пластинки в плоскости изотропии, E_1 , ν_1 , $G_{12}^{(1)}$ – упругие постоянные материала изотропного слоя.

Коэффициенты $P_{ik}^{(p)}$, $K^{(p)}$ определяются из выражений:

$$\begin{aligned}
P_{ik}^{(1)} &= \frac{B_{ik} h^5}{120}, \quad K^{(1)} = \frac{G' h^3}{12}, \\
P_{ik}^{(2)} &= 2B_{ik} \left(J_1 + \frac{A}{G'} \frac{h^3}{24} \right) + 2B_{ik}^{(1)} \left[J_2 + \frac{R h_1 (h + h_1)}{2} \right], \\
K^{(2)} &= Ah + 2G' J_3 + 2G_{12}^{(1)} J_4,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \frac{h_1}{2} (h + h_1) (G_{12}^{(1)} - G'), \quad R = \frac{h h_1 (h + h_1)}{4} \left(\frac{G_{12}^{(1)}}{G'} - 1 \right), \\
J_1 &= \frac{h^3}{48} \left[\left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{h^2}{20} \right], \\
J_2 &= \frac{(h/2 + h_1)^2}{6} \left[\left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] - \frac{1}{30} \left[\left[\left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^5 - \left(\frac{h}{2} \right)^5 \right] \right],
\end{aligned}$$

$$J_3 = \frac{h}{4} \left[\left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{h^2}{12} \right], \quad J_4 = \frac{h_1}{2} \left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} \left[\left(h_1 + \frac{h}{2} \right)^3 - \frac{h^3}{8} \right],$$

G' – модуль сдвига материала трансверсально-изотропного слоя пластинки в плоскости нормальной к плоскости изотропии.

Принимая $q = \text{const}$, выражения искомым функций w_p , Φ_p , Ψ_p ($p = 1, 2$), удовлетворяющие уравнениям (1) и условиям (2) и (3), принимаются в виде [1]:

- для области $a \leq x \leq L$ (однослойная пластинка, $p = 1$)

$$w_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \frac{4q(1+f\lambda_n^2)}{\pi n D_{11}^{(1)} \lambda_n^4} + C_{1n}^{(1)} \text{ch } \lambda_n x + C_{2n}^{(1)} x \text{sh } \lambda_n x + C_{3n}^{(1)} \text{sh } \lambda_n x + C_{4n}^{(1)} x \text{ch } \lambda_n x \right\} \sin \lambda_n y,$$

$$\Phi_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2B_{11}}{G'} \lambda_n^2 (C_{2n}^{(1)} \text{sh } \lambda_n x + C_{4n}^{(1)} \text{ch } \lambda_n x) + \\ & + \frac{\lambda_n}{\omega_n^{(1)}} (C_{5n}^{(1)} \text{ch } \omega_n^{(1)} x + C_{6n}^{(1)} \text{sh } \omega_n^{(1)} x) \end{aligned} \right\} \sin \lambda_n y, \quad (7)$$

$$\Psi_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4q}{\pi n \lambda_n G' h^3} - \frac{2B_{11}}{G'} \lambda_n^2 (C_{2n}^{(1)} \text{ch } \lambda_n x + C_{4n}^{(1)} \text{sh } \lambda_n x) + \\ & + (C_{5n}^{(1)} \text{sh } \omega_n^{(1)} x + C_{6n}^{(1)} \text{ch } \omega_n^{(1)} x) \end{aligned} \right\} \cos \lambda_n y.$$

- для области $0 \leq x \leq a$ (трёхслойная пластинка, $p = 2$)

$$w_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \frac{4q(1+f_1\lambda_n^2)}{\pi n D_{11}^{(2)} \lambda_n^4} + C_{1n}^{(2)} \text{ch } \lambda_n x + C_{2n}^{(2)} x \text{sh } \lambda_n x \right\} \sin \lambda_n y,$$

$$\Phi_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ -\frac{2D_{11}^{(2)}}{K^{(2)}} \lambda_n^2 C_{2n}^{(2)} \text{sh } \lambda_n x + \frac{\lambda_n}{\omega_n^{(2)}} C_{6n}^{(2)} \text{sh } \omega_n^{(1)} x \right\} \sin \lambda_n y, \quad (8)$$

$$\Psi_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \left\{ \frac{4q}{\pi n \lambda_n K^{(2)}} - \frac{2D_{11}^{(2)}}{K^{(2)}} \lambda_n^2 C_{2n}^{(2)} \text{ch } \lambda_n x + C_{6n}^{(2)} \text{ch } \omega_n^{(2)} x \right\} \cos \lambda_n y.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{b}, \quad \omega_n^{(1)} = \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{20G'(1+\nu)}{Eh^2}}, \quad \omega_n^{(2)} = \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{K^{(2)}}{P_{66}^{(2)}}},$$

$$f = \frac{Eh^2}{10(1-\nu^2)G'}, \quad f_1 = \frac{P_{11}^{(2)}}{K^{(2)}}.$$

Коэффициенты $C_{in}^{(p)}$ ($p = 1, 2$; $i = 1, 2, \dots, 6$) определяются из условий (4) и (5), после чего из (7) и (8) определяются значения функций, w_p , Φ_p , Ψ_p ($p = 1, 2$), а из (6) – значения внутренних усилий.

Поставленная задача оптимизации приводится к определению оптимальных геометрических параметров a или h_1 , при которых наибольший прогиб пластинки при неизменном весе усиливающих слоёв достигнет наименьшего значения, т.е. к следующей задаче нелинейного программирования:

найти:

$$w = \min_x \max_p w_p, \quad \bar{x} = \{a\}, \quad (p = 1, 2), \quad (9)$$

при ограничениях:

$$h_1 = h_0 L/a \quad (10)$$

$$0.01\delta_1 \leq h_1 \leq 0.25\delta_1, \quad 0.01\delta_2 \leq h + 2h_1 \leq 0.25\delta_2. \quad (11)$$

Ограничение (10) обеспечивает условие постоянства веса пластинки, а ограничения (11) обусловлены пределами применимости уточнённой теории. Здесь принимается: $\delta_1 = L - a$, когда $L - a \leq b$; $\delta_1 = b$, когда $L - a \geq b$; $\delta_2 = 2a$, когда $2a \leq b$, $\delta_2 = b$, когда $2a \geq b$.

Задача решается методом деформируемого многогранника [5].

Числовые результаты и выводы.

Числовые расчёты произведены для случая, когда на пластинку действует равномерно распределённая нагрузка $q = \text{const}$ при $\xi = 2L/b = 1, 2$, $\bar{h} = h/b = 0.05, 0.10, 0.20$, $h_0 = 0.1h$, и следующих приведённых характеристиках материала пластинки:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{12} &= B_{12}/B_{11} = \nu = 0.3, \quad \bar{G}_{12} = G_{12}/B_{11} = (1-\nu)/2 = 0.35, \\ \bar{G}' &= G'/B_{11} = (1-\nu^2)G'/E \quad (E/G' = 0, 2.6, 5, 10), \quad \bar{B}_{11}^{(1)} = B_{11}^{(1)}/B_{11} = 2, \\ \bar{B}_{12}^{(1)} &= B_{12}^{(1)}/B_{11} = 0.6, \quad \bar{G}'_1 = \bar{G}_{12}^{(1)} = \bar{G}_{13}^{(1)} = G'_1/B_{11} = 0.7. \end{aligned}$$

Случай $E/G' = 0$ соответствует расчёту изотропной пластинки по классической теории, а $E/G' = 2.6, 5, 10$ – по уточнённой теории. Полученные значения оптимальных параметров $\bar{a} = a/2L$, $\bar{h}_1 = h_1/b$, а также соответствующее значение наибольшего приведённого прогиба пластинки $\bar{w} = wB_{11}h^3/12q_0b^4$ приведены в таблице. Для сравнения в таблице приведены значения приведённых максимальных прогибов \bar{w}_0 пластинки постоянной толщины, а также значения отношения максимального прогиба, полученного по уточнённой теории к соответствующему прогибу, полученному по классической теории $k = w_{cor}/w_{cl}$.

Таблица

Оптимальные параметры и соответствующие значения максимальных прогибов пластинки

ξ	\bar{h}	E/G'	\bar{a}	\bar{h}_1	$\bar{w}_0 \cdot 10^2$	$\bar{w} \cdot 10^2$	k
1	0.05	0	0.337	0.00742	0.1654	0.1457	1
		2.6	0.2915	0.00858	0.1708	0.1526	1.047
		5.0	0.2915	0.00858	0.1710	0.1530	1.050
		10.0	0.2915	0.00858	0.1711	0.1538	1.056
	0.1	0	0.337	0.01484	0.1654	0.1457	1
		2.6	0.334	0.01498	0.1745	0.1631	1.119
		5.0	0.332	0.01506	0.1786	0.1644	1.128
		10.0	0.323	0.01548	0.1796	0.1669	1.145
	0.2	0	0.4	0.025	0.1654	0.1492	1
		2.6	0.4	0.025	0.2017	0.1942	1.301
		5.0	0.4	0.025	0.2083	0.1994	1.336
		10.	0.4	0.025	0.2233	0.2107	1.412
2	0.05	0	0.05	0.05	0.4124	0.2909	1
		2.6	0.05	0.05	0.4180	0.2986	1.026
		5.0	0.05	0.05	0.4188	0.2987	1.027
		10.0	0.05	0.05	0.4214	0.2989	1.027
	0.1	0	0.1	0.05	0.4124	0.32186	1
		2.6	0.2635	0.01897	0.4320	0.3374	1.048
		5.0	0.2635	0.01897	0.4336	0.3389	1.053
		10.0	0.2625	0.01905	0.4375	0.3422	1.064
	0.2	0	0.267	0.03745	0.4124	0.3245	1
		2.6	0.262	0.03817	0.4684	0.3743	1.153
		5.0	0.26	0.03846	0.4829	0.3803	1.172
		10.0	0.256	0.03906	0.5017	0.3935	1.212

Как показывают приведённые в таблице значения коэффициента $k = w_{cor} / w_{cl}$, учёт поперечных сдвигов в случае тонких пластин практически не влияет на результаты, полученные по классической теории, в то время как при увеличении толщины пластинки поперечные сдвиги оказывают существенное влияние на её прогибы (до 40% при $\xi = 1$ и до 20% при $\xi = 2$).

Из результатов таблицы также следует, что оптимальное распределение материала дополнительных слоёв пластинки по её поверхности приводит к значительному уменьшению максимального прогиба пластинки по сравнению с трёхслойной пластинкой постоянной толщины, причём это уменьшение тем значительнее, чем больше толщина пластинки. Так, при $\bar{h} = 0.20$, $E/G' = 2.6$ разница составляет 20%.

Следует отметить, что если не учитывать ограничения (11), обусловленные пределами применимости уточнённой теории изгиба пластин, при $\xi = 1$ и для сравнительно тонких пластин $\bar{h} \leq 0.10$ при $\xi = 2$, оптимальные проекты получаются при значительно малой длине дополнительных слоёв ($\bar{a} = 0.05$). Следовательно, в этих случаях целесообразнее пластинку усилить расположенным в её середине ребром жёсткости, равным по весу её дополнительным слоям.

Следует отметить также, что при $\xi = 2$ и $\bar{h} = 0.05$ максимальный прогиб получается в точке с координатой: $\bar{x} = 0.272$, в остальных случаях $\bar{x} = 0$.

В сравнительно длинных и толстых пластинках оптимальным будет проект с усиливающими слоями, расположенными в её средней части. Аналогичный результат получен в работе [4], где на основе классической теории изгиба исследованы вопросы оптимального проектирования ортотропной пластинки, усиленной дополнительными слоями или рёбрами жёсткости.

Заключение. На основе полученных в работе результатов можно заключить, что при расчёте анизотропных пластин ступенчато переменной толщины учёт поперечных сдвигов необходим для сравнительно толстых пластин, так как они дают существенные поправки к результатам классической теории изгиба пластин. Кроме того, оптимальным перераспределением материала усиливающих слоёв пластинки по её поверхности можно значительно увеличить жёсткость конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала при изгибе. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65, № 1. С.35-42.
3. Погосян А.Г., Аветисян Г.Р. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины при изгибе. // Вестник Инженерной Академии Армении, Ереван, 2012, Т.9, № 1, С.127-131.
4. Belubekyan E.V. Poghosyan A.G., Khanikyan V.M. Bending of the rectangular plate made of composite material, strengthened by additional layers or stiffening ribs. //Proceedings of 3rd international conference on contemporaru problems in architecture and construction Beijing, China Nov.20-24, 2011, P. 2-1 - 2-6.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 266с.

Сведения об авторах:

Белубекян Эрнест Вагаршакевич – доктор технических наук, профессор.

E-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Погосян Аревшат Гургенович – к.ф.-м.н., доц. каф.«Алгоритмические языки и программирование», Национальный политехнический университет Армении (НПУА) фонд. **Адрес:** 0009, Ереван, ул.Теряна, 105. **Тел.:** (+37499) 099662335

E-mail: arevpoghosyan@mail.ru

Поступила в редакцию 06.10.2015