ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 69, №1, 2016 Механика

УДК 593.3

СВЕРХЗВУКОВОЙ ПАНЕЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, упругая прямоугольная пластинка, сверхзвуковое обтекание, дивергенция, локализованная дивергенция, флаттер, сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Key words: stability, elastic rectangular plate, supersonic overrunning, divergence, localized divergence, flutter, concentrated inertial masses and moments

Բանալի բառեր. Կայունություն, առաձգական ուղղանկյուն սալ, գերձայնային շրջհոսում, դիվերգենցիա, լոկալիզացված դիվերգենցիա, ֆլատեր, կենտրոնացված իներցիոն զանգված և մոմենտ

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.
Գերձայնային պանելային ֆլատերի մի խնդրի մասին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածի և մոմենտի առկայության դեպքում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տված դիվերգենցիայի և ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը: Գտնված են կրիտիկական արագության արժեքները: Կախված խնդրի պարամետրերի հարաբերակցությունից ֆլատերային կրիտիկական արագությունը կարող է լինել մեծ կամ փոքր դիվերգենտ կրիտիկական արագությունից:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.
Supersonic panel flutter in the presence of the concentrated inertial masses and the moments

By analyzing, as an example, a thin elastic rectangular plate streamlined by supersonic gas flows, we study the phenomenon of divergence and of panel flutter of the overrunning of the gas flow at is free edge under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments at the free and fixed edges respectively. Its solution shows that the divergence or the localized divergence and the flutter are possible. The corresponding critical velocities of divergence and panel flutter are obtained. It is shown that depending on the relation between parameters of the problem, the critical flutter velocity can be either smaller or larger than the critical velocity of divergence.

В линейной постановке исследуется динамическое поведение возмущённого движения тонкой упругой прямоугольной пластинки вблизи границ области устойчивости при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край в предположении, что вдоль свободной кромки и шарнирно опёртой противоположной ей кромки приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты соответственно. Найдены критические скорости дивергенции панели, локализованной дивергенции в окрестности свободного края панели и панельного флаттера. Показано, что в зависимости от соотношения параметров задачи критическая скорость флаттера может быть как меньше, так и больше критической скорости дивергенции.

Введение. Среди аэроупругих явлений важное место занимают различные виды потери устойчивости авиаконструкций, в частности, «дивергенция панелей» («выпучивание» панелей) обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, и «панельный флаттер» (интенсивные вибрации панелей обшивки с возрастающей амплитудой). Следствием этого является усталостное разрушение обшивки летательных аппаратов, что приводит к снижению их характеристик и потери управляемости.

Изучению дивергентной и флаттерной неустойчивости пластинок и оболочек посвящено огромное количество работ, всеобщий обзор которых содержится в монографии [3(стр. 210–245)] и в статье [4].

Модельные задачи устойчивости упругой пластинки, обтекаемой потоком газа, являются математической формулировкой условий, при которых невозмущённая форма плоских панелей перестаёт быть устойчивой. Пользуясь линейной теорией, можно найти наименьшее значение скорости потока газа (критическая скорость дивергенции или флаттера), приводящее к неустойчивости возмущённого движения системы «пластинка–поток» в форме дивергентной и флаттерной. Дивергентная и флаттерная неустойчивости отличаются поведением возмущённого движения системы «пластинка–поток» вблизи границы устойчивости: в первом случае возмущения монотонно возрастают, а во втором случае нарастание носит колебательный характер [1, стр. 63]. Как следствие этого, деформации, возникающие при панельном флаттере, более опасны для конструкции, так как быстро приводят к потере прочности и развитию усталостных трещин [2, стр. 175].

Известно [1, (стр. 283)], что критическая скорость, определяемая методами линейной теории аэроупругости, оказывается лишь верхней границей критических скоростей для реальных конструкций. Для реальных конструкций, для которых граница области устойчивости является «опасной» в смысле Н.Н. Баутина [5], явление неустойчивости может наступить при скорости, меньшей, чем найденная на основе линеаризованной теории критическая скорость для идеализированной конструкции.

В предлагаемой статье в линейной постановке исследуется динамическое поведение возмущённого движения тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным краем вблизи границ области устойчивости при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край. При этом предполагается, что вдоль свободного края и противоположного ему шарнирно опёртой кромки приложены, соответственно, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота [1 (стр. 27, 101), 6].

С целью получения возможности аналитического исследования и выявления новых механических эффектов, к рассматриваемой задаче панельного флаттера применён подход, в соответствии с которым распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота [1(стр. 27, 101), 6]. На основе этого подхода разработан удобный в применении новый метод нахождения аналитического решения для класса неконсервативных задач линейной устойчивости, подробно изложенный в работе [7]. В частности, с помощью этого метода исследован эффект дестабилизации в задаче панельного флаттера при различных моделях конструкционного трения в опорах пластинки [8], а так же, решена задача сверхзвукового панельного флаттера, в которой пластинка имеет два свободных края [9].

В работе получена зависимость, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего её потока газа, позволяющая в пространстве «существенных» параметров задачи выделить область устойчивости и области дивергентной, флаттерной и локализованной дивергентной неустойчивости.

Для различных значений параметров задачи найдены наименьшие значения скорости потока газа – критические скорости дивергенции, локализованной дивергенции и флаттера, при превышении которых система теряет устойчивость.

В задачах панельного флаттера в линейной постановке, как правило, критическая скорость дивергенции меньше критической скорости флаттера [1–4, 7-9,12]. В данной работе получен неожиданный результат. Оказалось, что в зависимости от соотношения параметров задачи критическая скорость флаттера может быть как меньше, так и больше критической скорости дивергенции.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V.

Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А также, будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромка $x = 0$ пластинки свободна, а кромки $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. Вдоль кромок $x = 0$ и $x = a$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c соответственно [1 (с.27,101), 6].

Под влиянием каких-либо причин невозмущённое состояние равновесия пластинки может быть нарушено и пластинка начнёт совершать возмущённое движение с прогибом $w = (x, y, t)$. Прогиб w вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [10,11]: $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы w малы по отношению к толщине пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль кромок пластинки $x = 0$ и $x = a$ сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c соответственно. При этом, влиянием распределённой массы пластинки и сил сопротивления пренебрегаем в соответствии с предлагаемым методом аналитического исследования.

Тогда, малые изгибные колебания точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [10,11] описываются дифференциальным уравнением [1 (стр. 245), 12]

$$D\Delta^2 w + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

где $\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [1(стр.27,101), 6]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D^{-1} m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \; x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_c D^{-1} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0\,,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,,\quad y = 0 \text{ и } y = b\,; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшее значение скорости потока газа – критическую скорость V_{cr}, приводящую к неустойчивости: при $V \geq V_{cr}$ устойчивое возмущённое движение системы «пластинка–поток» становится неустойчивым. Иными словами, требуется определить значения скорости V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2)-(1.4).

2. Общее решение задачи. Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot \sin(\mu_n y) \cdot \exp(\lambda t)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}\,, \tag{2.1}$$

n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Тогда, в соответствии с выражением (2.1), рассматриваемая задача о флаттере пластинки (1.1) – (1.4) сводится к следующей краевой задаче на собственные значения λ несамосопряжённого оператора для обыкновенного дифференциального уравнения относительно форм колебания $f_n(x)$:

$$f_n^{IV}(x) - 2\mu_n^2 f_n^{II}(x) + a_0\rho_0 V D^{-1} f_n^{I}(x) + \mu_n^4 f_n(x) = 0\,, \tag{2.2}$$

$$f_n^{II}(x) = 0\ ,\ f_n^{III} - \mu_n^2(2-\nu) f_n^{I}(x) = -m_c D^{-1}\lambda^2 f_n(x)\,,\quad x = 0\,; \tag{2.3}$$

$$f_n(x) = 0\,,\quad f_n^{II} - \mu_n^2 \nu f_n(x) = -I_c D^{-1}\lambda^2 f_n^{I}(x)\,,\ x = a\,. \tag{2.4}$$

Система «пластинка–поток», описываемая соотношениями (1.1) – (1.4), асимптотически устойчива, если все собственные значения λ краевой задачи (2.2) – (2.4) для обыкновенного дифференциального уравнения имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$). Критическая скорость V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения системы «пластинка-поток», определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$).

Частное решение дифференциального уравнения (2.2) будем искать в виде

$$f_n(x) = C_n \exp(\mu_n p x)\,, \tag{2.5}$$

C_n – произвольные постоянные.

Подставляя решение (2.5) в дифференциальное уравнение (2.2), получаем характеристическое уравнение, являющееся алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0\,,\quad \alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}\,,\quad \alpha_n^3 > 0\,. \tag{2.6}$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (2.6) имеет два отрицательных действительных корня $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ и пару комплексно-сопряжённых корней $p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$. Следовательно, общее решение уравнения (2.2), в соответствии с выражением (2.5), запишется в виде суммы

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\exp(\mu_n p_k x), \qquad (2.7)$$

C_{nk} – произвольные постоянные, p_k – корни характеристического уравнения (2.6).

Корни характеристического уравнения (2.6) определяются выражениями [12]:

$$p_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)}\ ,\ p_1<0\ ,\ p_2<0\ ; \qquad (2.8)$$

$$p_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)}\quad . \qquad (2.9)$$

Здесь q – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(1+q)^2(q-1)=\alpha_n^6,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}, \qquad (2.10)$$

который удовлетворяет условию [13]

$$q>1\,. \qquad (2.11)$$

Из соотношений (2.10) легко получить выражение зависимости скорости потока газа V от параметров системы

$$V=2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1}, \qquad (2.12)$$

или

$$V=2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}, \qquad (2.13)$$

где через γ обозначен параметр отношения ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma=ab^{-1}\,. \qquad (2.14)$$

В соответствии с выражениями (2.7), корням (2.8), (2.9) характеристического уравнения (2.6) соответствует следующее общее решение дифференциального уравнения (2.2):

$$\begin{aligned} f_n(x)= {} & C_{n1}\exp(-0.5\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x+ \qquad (2.15)\\ & +C_{n2}\exp(-0.5\sqrt{2(q+1)}+\sqrt{\sqrt{(q^2-1)}-0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x+\\ & +\exp(0.5\sqrt{2(q+1)})\pi nb^{-1}x\cdot\left(C_{n3}\cos(\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)})\cdot\pi nb^{-1}x)+\right.\\ & \left.+C_{n4}\sin(\sqrt{\sqrt{(q^2-1)}+0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x\right),\quad q>1\,. \end{aligned}$$

Подставляя решение (2.15) дифференциального уравнения (2.2) в граничные условия (2.3) и (2.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\chi_n\delta_n A_0\lambda^4+(\chi_n A_1+\delta_n A_2)\lambda^2+A_3=0\,. \qquad (2.16)$$

Здесь

$$\delta_n=m_c D^{-1}b^3(\pi n)^{-3},\ \chi_n=I_c D^{-1}b(\pi n)^{-1}, \qquad (2.17)$$

приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, соответственно, приложенных на кромках $x=0$ и $x=a$ пластинки;

$$A_0=A_0(q,n,\gamma)= \qquad (2.18)$$

$$= 2\sqrt{2(q+1)}\cdot\big\{(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot B_1B_2 +$$
$$+\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\cdot$$
$$\cdot\Big[(\sqrt{2(q-1)}-\sqrt{2(q+1)})\cdot B_1\cdot\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)-$$
$$-(\sqrt{2(q-1)}+\sqrt{2(q+1)})\cdot B_2\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)\Big]\big\};$$

$$A_1 = A_1(q,n,\gamma) = 2\Big\{\big[2(q+1)(q-\sqrt{(q^2-1)}-\nu)-(1-\nu)^2\big]B_1B_2 + \tag{2.19}$$
$$+\big[2(q+1)(q+\sqrt{(q^2-1)}-\nu)-(1-\nu)^2\big]B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$
$$+2\Big[(q+1)\sqrt{(q^2-1)}\cdot(\sqrt{2(q-1)}+\sqrt{2(q+1)})\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$
$$+(4q^2+2q-1+2q\nu+\nu^2)B_1\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot$$
$$\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+$$
$$+\big[((2q^2+3q-1)-2(3q^2+3q-2)\nu+(3q+1)\nu^2)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$
$$+2(q+1)\cdot\sqrt{(q^2-1)}\cdot(\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{2(q-1)})B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\big]\cdot$$
$$\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\Big\};$$

$$A_2 = A_2(q,n,\gamma) = 4(q+1)\cdot\Big[(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot B_1B_2 - \tag{2.20}$$
$$-2B_1B_2\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+$$
$$+3(q-1)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\Big];$$

$$A_3=A_3(q,n,\gamma,\nu)=2\sqrt{2(q+1)}\big\{\big[2(q+1)(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\big]B_1B_2- \tag{2.21}$$
$$-\Big[2(q+1)(q+\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]\cdot B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$
$$+\big\{\big[(4q^2+2q-1)\sqrt{2(q-1)}-(2q^2-4q+1)\sqrt{2(q+1)}-$$
$$-2((2q-1)\sqrt{2(q+1)}-q\sqrt{2(q-1)})\nu+(\sqrt{2(q+1)}+\sqrt{2(q-1)})\nu^2\big]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$
$$+4(q+1)\sqrt{q^2-1}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\big\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$
$$+\big[-B_1\cdot\big((4q^2+2q-1)\sqrt{2(q-1)}+(2q^2-4q+1)\sqrt{2(q+1)}+$$
$$+2((2q-1)\sqrt{2(q+1)}+q\sqrt{2(q-1)})\nu-(\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{2(q-1)})\nu^2\big)\mathrm{ch}(\pi\gamma B_1)-$$
$$-6(q^2-1)\sqrt{(q^2-1)}\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\big]\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\big\};$$

$$B_1(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)},\; B_2(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)}, \tag{2.22}$$

где q – параметр скорости потока газа – единственный действительный корень кубического уравнения (2.10); γ – параметр отношения сторон пластинки, определяемый выражением (2.14); ν – коэффициент Пуассона.

В силу условия (2.11), из выражений (2.22) следует, что $B_1(q)>0$, $B_2(q)>0$.

Дисперсионное уравнение (2.16), устанавливающее зависимость собственного значения λ от «существенных» параметров a, b, n, ν, m_c, I_c, q (или V) исходной задачи устойчивости (1.1)-(1.4), не что иное как характеристическое уравнение краевой задачи (2.2)-(2.4). Поэтому для выяснения свойств возмущённого движения системы «пластинка–поток», необходимо изучить характер влияния её параметров на поведение собственных значений λ – корней уравнения (2.16).

Таким образом, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия прямоугольной пластинки в потенциальном сверхзвуковом потоке газа сводится к исследованию поведения корней характеристического уравнения (2.16) краевой задачи (2.2)–(2.4) в зависимости от «существенных» параметров задачи устойчивости пластинки (1.1)-(1.4).

3. Разбиение пространства параметров системы на области устойчивости и неустойчивости. Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}, \tag{3.1}$$

перепишем характеристическое уравнение (2.16) в виде

$$A_0\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2)\chi_n^{-1}\lambda^2 + \chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_3 = 0,\ \gamma \in (0,\infty),\ \chi_n > 0,\ \delta_n > 0. \tag{3.2}$$

где γ, k_n и A_i, $i=\overline{1,4}$ определяются выражениями (2.14), (2.23) и (2.18)-(2.21) соответственно.

Исследуем поведение корней характеристического уравнения (3.2) в пространстве «существенных» параметров M исходной задачи устойчивости.

Существенное влияние на поведение возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1)-(1.4) оказывают следующие параметры: $\gamma = ab^{-1}$, $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$, коэффициент Пуассона ν, параметр скорости обтекающего пластинку потока газа q и n – число полуволн вдоль стороны b.

Значения остальных («несущественных») параметров принимаются фиксированными.

В пространстве параметров M введём в рассмотрение области M_0, M_1, M_2 и M_3, в которых, соответственно, либо все корни характеристического уравнения (3.2) находятся в левой части комплексной плоскости, либо среди корней имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно-сопряжённых корней с положительной вещественной частью. Ясно, что возмущённое движение системы «пластинка–поток» в области M_0 устойчиво, а в областях M_1, M_2 и M_3 – неустойчиво.

Область устойчивости возмущённого движения пластинки $M_0 \in M$ рассматриваемой динамической системы определяется соотношениями

$$A_0 > 0,\quad k_n A_1 + A_2 > 0,\quad A_3 > 0,\quad \Delta > 0. \tag{3.3}$$

Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.2):

$$\Delta = \Delta(n,\gamma,\nu,k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \tag{3.4}$$

При условиях (3.3) уравнение (3.2) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$. При этом пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия.

Из способа разбиения пространства параметров M задачи на области устойчивости и неустойчивости возмущённого движения пластинки следует, что области неустойчивости M_1, M_2, M_3 определяются, соответственно, следующими соотношениями: $A_0 > 0$, $A_3 < 0$, $\Delta > 0$; $A_0 > 0$, $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, $\Delta > 0$; $A_0 > 0$, $A_3 > 0$, $\Delta < 0$. В области M_1 характеристическое уравнение (3.2) имеет два действительных корня разных знаков и два чисто мнимых корня.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров M при условии

$$A_0 > 0, \quad k_n A_1 + A_2 > 0 \tag{3.5}$$

являются гиперповерхности:

$$A_3 = 0, \tag{3.6}$$

$$\Delta = 0. \tag{3.7}$$

На гиперповерхности (3.6) характеристическое уравнение (3.2) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2 и пару чисто мнимых корней, а на гиперповерхности (3.7) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

На границе области устойчивости M_0

$$A_0 > 0, \quad k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 = 0, \quad \Delta > 0 \tag{3.8}$$

возмущённое движение системы теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости дивергенции $V_{cr.div} = V_{cr.div}(n, \gamma, \nu)$ – скорости, найденные подстановкой первого корня $q_{cr.div} = q_{cr.div}(n, \gamma, \nu)$ уравнения (3.6) в формулу (2.13), разграничивают области устойчивости M_0 и дивергентной неустойчивости M_1 возмущённого движения прямоугольной пластинки. При значениях скорости потока газа $V \geq V_{cr.div}$, происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2)–(2.4), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к дивергентной неустойчивости. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения пластинки: в пластинке, совершающей гармонические колебания, возникают напряжения, приводящие к изменению её формы – пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс, т.е. как дивергенция.

На границе области устойчивости M_0

$$A_0 > 0, \; k_n A_1 + A_2 > 0, \; A_3 > 0, \; \Delta = 0 \tag{3.9}$$

возмущённое движение пластинки теряет динамическую устойчивость: возникает явление панельного флаттера, имеющее характер колебаний по нарастающей амплитуде. Критические скорости флаттера $V_{cr.fl} = V_{cr.fl}(n, \gamma, \nu, k_n)$ – скорости, найденные подстановкой первого корня $q_{cr.fl}$ уравнения (3.7) в формулу (2.13), разграничивают область устойчивости M_0 и область флаттерной неустойчивости M_3. При значениях скорости потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ происходит «мягкий» (плавный) переход от гармонических колебаний к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям.

Легко показать, что в предельном случае, в котором $\gamma \to 0$ ($b \to \infty$), уравнение (3.6) тождественно равно нулю при всех $q > 1$ и ν. Отсюда следует, что невозмущённая форма равновесия пластинки, являясь статически неустойчивой изначально, остаётся такой же и при обтекании её потоком газа. А в предельном случае, в котором $\gamma \to \infty$ ($a \to \infty$), уравнение (3.6) приводится к виду

$$2(q+1)\cdot(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2=0\,,\;\; \gamma\to\infty\,, \qquad (3.10)$$

тождественному дисперсионному уравнению, полученному при исследовании явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающее в окрестности свободного края упругой полубесконечной пластины–полосы ($0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края $x=0$ к закреплённой кромке $x=a$ [13]. Это означает, что при значениях скорости потока газа $V \ge V_{loc.div}$ имеет место локализованная дивергенция в окрестности свободного края $x=0$ пластинки, при которой возникают напряжения, приводящие к монотонному «выпучиванию» узкой полосы поверхности пластинки в окрестности её свободного края.

Очевидно, что решение $q_{loc.div}$ уравнения (3.10) зависит только от коэффициента Пуассона ν: $q_{loc.div}=q_{loc.div}(\nu)$. А значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $\tilde{V}_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (или $V_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$), найденные подстановкой $q_{loc.div}$ в формулу (2.12) (или (2.13)), зависят от числа полуволн n и от коэффициента Пуассона ν. При этом приведённая скорость локализованной дивергенции достигает наименьшего значения при значении $n=1$ [13].

Таким образом, критические скорости дивергенции $V_{cr.div}(n,\gamma,\nu)$, панельного флаттера $V_{cr.fl}(n,\gamma,\nu,k_n)$ и локализованной дивергенции $V_{loc.div}(n,\nu)$ возмущённого движения системы «пластинка–поток», соответствующие, соответственно, первым корням $q_{cr.div}=q_{cr.div}(n,\gamma,\nu)$, $q_{fl}=q_{cr.fl}(n,\gamma,\nu,k_n)$ уравнений (3.6), (3.7) и решению $q_{loc.div}=q_{loc.div}(\nu)$ уравнения (3.10), определяются по формулам (2.12) или (2.13) с достаточной точностью.

4. Численные результаты. В данной работе с помощью аналитических методов и методов численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,k_n)\}$, параметризованных надлежащим образом в многопараметрическом пространстве M задачи. Ограниченность размера статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. В таблицах 1–6 приведены лишь только результаты численных исследований типичных случаев, в которых выделены наиболее представительные из семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,k_n)\}$.

Численные расчёты, проведённые для различных n, показали, что при фиксированных значениях остальных параметров критические скорости дивергенции и панельного флаттера достигают наименьшего значения при значении $n=1$, аналогично критической скорости локализованной дивергенции.

При всех $\gamma \in (0,2)$ имеет место дивергенция панели. Приведённая критическая скорость дивергенции $V_{cr\,div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ зависит от коэффициента Пуассона ν и параметра γ: $V_{cr\,div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а с возрастанием γ критическая скорость дивергенции растёт (табл. 1, 2).

Таблица 1

γ \ ν	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
0.01	$0.345\cdot10^{-2}$	$0.297\cdot10^{-2}$	$0.268\cdot10^{-2}$	$0.243\cdot10^{-2}$	$0.197\cdot10^{-2}$
0.1	0.352	0.306	0.273	0.240	0.197
0.2	1.511	1.290	1.163	1.063	0.882
0.3	3.650	3.324	2.912	2.721	2.619
0.4	7.789	6.758	5.985	5.507	4.478
0.5	14.945	13.503	11.078	10.778	9.056
0.6	26.284	21.790	19.146	18.608	13.889
0.7	45.587	37.826	31.267	29.552	25.011

Как оказалось, начиная с $\gamma = 2$, значения первого корня $q_{cr.div}$ уравнения (3.6) не зависят от параметра γ, а зависят только от коэффициента Пуассона ν. Подставляя значения $q_{cr.div}$ в формулу (2.12), получаем критические скорости дивергенции $V_{cr.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$, которые с точностью порядка 10^{-4} равны критическим скоростям локализованной дивергенции $\tilde{V}_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$, найденных для различных значений коэффициента Пуассона при исследовании задачи локализованной дивергенции в окрестности свободного края полубесконечной пластины–полосы в работе [13] .

Таблица 2

γ \ ν	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
0.9	473.50	96.90	78.72	70.05	53.15
1.0	522.80	157.17	117.21	101.74	70.21
1.2	613.51	320.02	225.85	194.87	133.24
1.4	830.05	495.72	367.77	315.35	214.99
1.5	980.85	595.80	448.61	388.36	269.25
1.6	1166.20	704.47	544.44	470.73	326.25
1.8	1695.90	992.18	762.25	695.12	440.54
2.0	2598.09	1382.02	1045.62	953.53	604.31

Тем самым, при значениях $\gamma \geq 2$ прямоугольная пластинка в потоке газа при скоростях потока $V \geq V_{cr\,div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) \approx \tilde{V}_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (табл. 3) теряет статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ прямоугольной пластинки, что аналогично потере статической устойчивости полубесконечной пластины–полосы со свободным краем [13]. Критическая скорость локализованной дивергенции прямоугольной пластинки $V_{cr\,div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ зависит только от коэффициента Пуассона ν: она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл.3).

Таблица 3

ν	0.125	0.25	0.33	0.375	0.5
$V_{loc.div}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$	324.761	173.371	130.702	120.741	77.398

Отсюда следует, что для значений $\gamma \geq 2$ первый корень $q_{cr.div}$ уравнения (3.6) может быть найден проще, а именно, из уравнения (3.10).

В случае, в котором $n = 1$, для значений параметров $\gamma \in [10^{-3}, 0.7]$, $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ и $\gamma \in [0.9, 2.0]$, $k_1 \in [4, \infty)$ при всех $\nu \in (0, 0.5)$ имеет место панельный флаттер. Приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, полученная подстановкой первого корня $q_{cr.fl} = q_{cr.fl}(1, \gamma, \nu, k_1)$ уравнения (3.7) в формулу (2.13), зависит от параметров γ, k_1 и ν. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ происходит плавный переход из области M_0 в область M_3: возмущённое движение системы от гармонических колебаний «мягко» переходит к колебаниям по нарастающей амплитуде.

При всех $\gamma \in [10^{-3}, 0.3)$ и $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ не зависит от коэффициента Пуассона; критическая скорость флаттера при значениях $\gamma \in [0.3, 0.7]$ и $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ больше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл. 4, 5), а при значениях $\gamma \in [0.9, 2]$ и $k_1 \in [4, \infty)$ она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν (табл.6). Значения критических скоростей флаттера при всех $\gamma \in [0.3, 0.7] \cup [0.9, 2]$, приведённые в табл. 4–6, соответствуют $\nu = 0.33$.

Таблица 4

γ \ k_1	0.0001	0.01	0.1	0.5	1.0
0.01	88.89	131.03	152.89	156.55	157.66
0.1	–	88.01	92.91	124.34	134.81
0.2	–	–	81.41	101.67	116.95
0.3	–	–	108.24	95.76	108.24
0.4	–	–	–	103.02	107.54
0.5	–	–	–	131.35	121.88
0.6	–	–	–	–	151.92
0.7	–	–	–	–	–

При всех $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ критическая скорость флаттера в интервале $\gamma \in [10^{-3}, 0.3)$ убывает (табл.4, 5), а в промежутках $\gamma \in [0.3, 0.7]$ и $\gamma \in [0.9, 2]$ возрастает (табл.6). При этом критическая скорость $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ достигает минимального значения в интервалах $\gamma \in (0.2, 0.3)$ и $\gamma \in [0.9, 1.2]$. К примеру, при значениях $\gamma = 0.9$ и $k_1 = 15$ приведённая критическая скорость флаттера равна $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ ≈ 60.94.

Из сопоставления значений приведённых критических скоростей дивергенции $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, соответствующим одним и тем же значениям параметров γ и ν, следует, что в промежутке $\gamma \in [10^{-3}, 0.7]$ при всех $k_1 \in [10^{-4}, \infty)$ критическая скорость дивергенции $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, по крайней мере, на порядок больше критической скорости флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл.1,4,5). А в промежутке $\gamma \in [0.9, 2.0]$ при всех $k_1 \in [4, 10^4)$, наоборот, критическая скорость дивергенции $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ примерно на порядок больше критической скорости флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл.2,6). При значениях $\gamma \in [0.9, 1.6]$ и $k_1 \geq 10^4$ критические скорости флаттера и дивергенции равны с точностью порядка 10^{-2}: $V_{cr.fl.}D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \geq V_{cr\,div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл.2,6). Это означает, что при значениях $\gamma \in [0.9, 1.6]$ и $k_1 \geq 10^4$ одновременно имеют место потери статической и динамической устойчивости. При значениях $\gamma \in (1.6, 2]$ и $k_1 \geq 10^4$ имеет место только дивергенция, а флаттер отсутствует.

Таблица 5

γ \ k_1	4.0	10.0	15.0	100.0	10000.0
0.01	159.27	160.07	160.23	160.55	–
0.1	148.69	153.42	153.42	158.19	161.40
0.2	140.85	147.05	147.05	159.72	166.19
0.3	136.02	149.96	155.67	170.23	174.68
0.4	138.35	153.39	163.69	182.24	193.13
0.5	146.95	167.19	175.51	201.23	218.98
0.6	157.83	182.11	194.62	226.98	–
0.7	191.48	213.71	227.36	274.54	–

Таблица 6

γ \ k_1	4.0	10.0	15.0	100.0	10000.0
0.9	–	–	60.94	68.27	73.56
1.0	–	71.52	77.01	94.87	105.64
1.2	82.87	116.21	133.07	178.48	206.64
1.4	115.80	196.26	225.82	315.15	352.53
1.5	135.47	250.75	290.78	403.25	446.36
1.6	166.13	311.01	363.25	498.67	541.72
1.8	257.70	472.35	553.33	–	–
2.0	358.15	689.25	–	–	–

В известных основополагающих работах, посвящённых исследованию панельного флаттера в линейной постановке, в случае, в котором имеют место потери устойчивости обоих видов: дивергенция панели и панельный флаттер, как правило, критическая скорость дивергенции панели на порядок меньше критической скорости панельного флаттера при одних и тех же значениях параметров задачи. Тем самым, система «пластинка–поток» теряет статическую устойчивость при более малых скоростях потока газа, нежели динамическую. В данном исследовании, можно сказать, что получен неожиданный результат. При малых значениях параметра отношения сторон $\gamma \in [10^{-3}, 0.7]$ прямоугольной пластинки – пластинка более удлинённая в направлении, перпендикулярном к потоку газа, дивергенция панели имеет место раньше панельного флаттера. А при умеренных значениях параметра $\gamma \in [0.9, 2.0]$ – пластинка почти квадратная – наоборот, флаттер наступает раньше дивергенции.

При больших значениях параметра $\gamma \in [2, \infty)$ – пластинка более удлинённая по направлению потока газа – имеет место только потеря статической устойчивости в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки.

Таким образом, «опасными» границами области устойчивости M_0 в смысле терминологии работы Н.Н. Баутина [5] являются значения параметра $V_{cr.fl.}$, разграничивающие область устойчивости M_0 и область флаттерной неустойчивости M_3 (табл. 4–6).

Заключение. Пользуясь аналитическим методом исследования поставленной задачи панельного флаттера, проведено разбиение пространства существенных параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости.

Исследована граница области устойчивости. При этом выявлен ряд новых механических эффектов.

Показана возможность статической потери устойчивости не только в традиционном смысле – в виде дивергенции панели, но и в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края панели.

Найдены критические скорости дивергенции, флаттера и локализованной дивергенции, которые разграничивают область устойчивости и области неустойчивости.

Как оказалось, в зависимости от соотношения параметров задачи критическая скорость флаттера может быть как меньше, так и больше критической скорости дивергенции. Так, при малых значениях параметра отношения сторон панели и при всех значениях параметра отношения инерционных момента поворота и массы имеют место потери устойчивости в виде дивергенции панели и в виде панельного флаттера. При этом критическая скорость дивергенции, примерно, на порядок меньше критической скорости флаттера. А при умеренных значениях параметров отношения сторон панели и отношения инерционного момента поворота и масс, наоборот, критическая скорость дивергенции на порядок больше критической скорости флаттера.

При умеренных значениях параметров отношения сторон панели и достаточно больших значениях параметра отношения инерционных момента поворота и массы критические скорости флаттера и дивергенции равны.

При больших значениях параметра отношения сторон панели имеет место только статическая потеря устойчивости в виде локализованной дивергенции панели в окрестности ее свободного края.

Значения критической скорости флаттера, разграничивающие область устойчивости и область флаттерной неустойчивости определяют «опасные» границы области устойчивости в смысле терминологии работы Н.Н.Баутина [5]. При переходе через них возникает явление панельного флаттера, приводящее к потере прочности и возникновению усталостных трещин в материале пластинки.

Заметим, что решение задач панельного флаттера в линейной постановке позволяет находить скорость потока, при которой невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» перестаёт быть устойчивым по отношению к малым возмущениям и позволяет оценить лишь тенденцию колебаний. Но при этом не удаётся предсказать дальнейшее развитие процесса, в то время, как нелинейная теория позволяет определить характеристики переходного процесса [2,3,14,15]. Несмотря на это, рассмотрение задачи панельного флаттера в линейной постановке, допускающее аналитическое исследование, имеет смысл: её результаты ценны, так как предвосхищают результаты исследования задачи панельного флаттера в нелинейной постановке.

Результаты работы могут быть использованы при исследовании задач панельного флаттера в нелинейной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твёрдых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С. 67–122.
5. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
6. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагружённый следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44.
7. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. № 2. С.12–42.
8. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the Destabilizing Effect of Constructional Friction in Supports on the Stability of a Plate in a Supersonic Gas Flow. // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 205, № 4, Mart, 2015; 1072-3374/13/1714-01, Springer Science+Business Media New Jork.
9. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями в сверхзвуковом потоке газа, набегающим на её свободный край.// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. № 4. С.55–64.
10. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755.
11. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. №12. P.1109–1118.
12. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. //Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С. 211–222.
13. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29–34.
14. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. №1. С.92–98.
15. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24–38

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – к.ф.м.н., проф., главный н.с. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – к.ф.м.н., ведущий н.с. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редацию 18.11.2015