

УДК 517.97

Письмо в редакцию

**О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ И  
НАБЛЮДЕНИЮ**

**Нерсисян А.Б.**

**Ключевые слова:** Оптимальное управление, наблюдение, колебания струны, колебания балки, системы с распределенными параметрами

**Keywords:** Optimal control, observation, string vibration, beam vibration, systems with distributed parameters

**Բանալի բառեր.** Օպտիմալ, դեկավարում, դիտում, լարի և հեծանի տատանումներ, բաշխված պարամետրերով համակարգեր:

**Nersessian A.B.**

**About some studies on optimal control and observation**

Errors and mistakes in some studies on optimal control and observation published in 1998-2014 is revealed

**Ներսիսյան Հ.Բ.**

**Դիտման և օպտիմալ դեկավարման վերաբերյալ մի քանի աշխատանքների մասին**

Բացահայտվում են դիտման և օպտիմալ դեկավարման վերաբերյալ 1998-2014թթ. տպագրված մի քանի աշխատանքներում տեղ գտած սխալները և մոլորությունները:

Выявляются ошибки и заблуждения в некоторых работах по оптимальному управлению и наблюдению, опубликованных в 1998-2014 г.г.

**Введение**

Обсуждаемые ниже пять работ В.Р.Барсебяна [1-5] (три – в соавторстве с А.А.Степаняном, М.А.Саакяном и Л.А.Мовсисяном соответственно) содержат необоснованные рассуждения, принципиальные ошибки и тривиальности. В них отсутствуют сколь-нибудь значимые новые научные результаты.

Ниже приводятся соответствующие обоснования. Цитаты из указанных работ приведены курсивом и в кавычках.

**1. Наблюдение за колебаниями струны.**

В работе [1] рассматривается (если перейти к безразмерным координатам) классическое уравнение колебания струны с закреплёнными концами

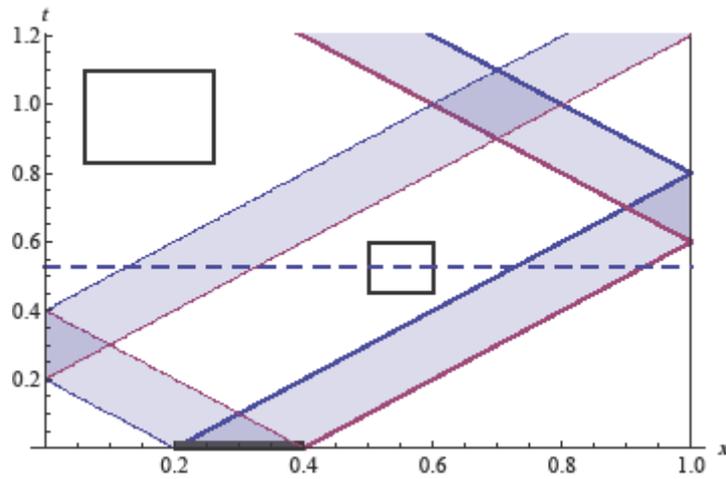
$$Q_{tt}(x,t) - Q_{xx}(x,t) = 0, \quad Q(0,t) = 0, Q(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

**1.1.** Изучается следующая задача наблюдения: "Пусть имеется возможность с помощью измерительных устройств на некоторых участках струны положительной меры измерить некоторую величину, определенную на промежутке времени  $t - \vartheta \leq t \leq t$ , где  $\vartheta > 0$  – постоянное число – длина интервала, в течение которого учитывается некоторая предыстория поступающего сигнала. Число  $\vartheta$  определяется из дополнительных требований, сопровождающих задачу о наблюдении, и зависит от физических возможностей измерительных устройств... Требуется по поступающему сигналу вычислить функцию состояния  $Q(x,t)$  и

скорость  $Q_t(x,t)$  струны для любой точки  $x \in [0,1]$ , каково бы ни было реализованное в процессе (1) значение  $Q(x,t)$ ".

Автор имеет в виду восстановление приближенных значений  $Q(x,t)$  и  $Q_t(x,t)$  во всех точках струны  $0 \leq x \leq 1$  по приближенным же значениям в некоторой области указанного им вида. В резюме к работе утверждается, что "построен универсальный оптимальный функцио нал, позволяющий определить прогиб и скорость всех точек струны в любой момент времени".

**1.2 Однако задача в такой постановке не может быть решена в принципе.** Чтобы в этом убедиться, достаточно производимые измерения считать абсолютно точными и рассмотреть (см. рисунок) частный случай, когда (см. цитату выше) "участок струны положительной меры"— это некоторый отрезок струны, длина которого меньше единицы.



Рисунок

Пусть в начальный (условно) момент времени  $t=0$  известны отклонения  $Q(x,0)$  и скорости  $Q_t(x,0)$  всех точек струны  $x \in [0,1]$ , как известно, однозначно описывающие весь колебательный процесс (см., например, [5], гл. 2, §2 и [7], гл. 1, §5). При росте  $t$  начальные данные  $Q(x,0)$  и  $Q_t(x,0)$  с отрезка  $0.2 \leq x \leq 0.4$  струны (отмеченного на приводимом рисунке жирной чертой) распространяются по выделенным затемненным полосам, определяемыми характеристиками  $x \pm t = const$ , с учетом отражения от закрепленных концов струны (полоса данных, распространяющихся при малых  $t$  вправо, обведена жирной чертой).

Допустим теперь, что, при этом, вне упомянутого отрезка, в начальный момент  $t=0$ , струна находится в покое (т.е.  $Q(x,0) \equiv 0$  и  $Q_t(x,0) \equiv 0$  при  $x \notin [0.2, 0.4]$ ), а на самом отрезке выполнено условие

$$\int_{0.2}^{0.4} (Q(x,0)^2 + Q_t(x,0)^2) dx > 0.$$

Очевидно, что при измерениях в любой части рисунка, но вне затемненных полос (скажем, внутри одного из двух отмеченных прямоугольников), точки струны будут находиться в полном покое и **любой прибор зарегистрирует там нулевые показания** (или зафиксирует только "шум"). В то же время сама струна не может находиться в покое никогда (см. указанное на рисунке пунктиром состояние струны,

когда энергия колебаний положительна на множестве её пересечения с тёмными полосами).

Отсюда следует, что необходимо, чтобы промежуток времени  $\vartheta > 0$ , в течение которого проводятся наблюдения, был достаточно велик. Из приводимого рисунка следует, что необходимо, чтобы, **по крайней мере**, было  $\vartheta \geq 2$ , ибо в описанной на рисунке ситуации возможно, например, что полоса данных, распространяемых "влево", отсутствует (т.е. при малых  $t$   $Q(x, t) = Q(x - t)$ ).

**1.3.** Обратимся теперь подробно к рассуждениям и выкладкам работы [1], чтобы выявить допущенные в ней ошибки и заблуждения. Применяя стандартный метод разделения переменных, автор исходит из представления

$$Q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sin \pi k x, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и считает, что применяемое им измерительное устройство наделено способностью приближенно распознавать сигналы  $Z_k(\tau)$  вида<sup>1</sup>

$$Z_k(\tau) = f_k Q_k(\tau) + g_k \lambda_k \dot{Q}_k(\tau) + \Delta_k(\tau), \quad \lambda_k = \pi k, \quad f_k^2 + g_k^2 \neq 0, \quad k \geq 1, \quad (3)$$

где  $f_k$  и  $g_k$  – синус-коэффициенты Фурье заранее известных функций  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $x \in [0, 1]$  соответственно,  $\dot{Q}_k(\tau) = dQ_k(\tau)/d\tau$ , а погрешность  $\Delta_k(\tau)$  удовлетворяет оценке

$$\int_{t-\vartheta}^t \Delta_k^2(\tau) d\tau \leq \delta_k^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

где  $\{\delta_k\}$  – положительные постоянные (их поведение по  $k$  в работе **никак не уточняется**).

Алгоритм работы описанного устройства, якобы распознающий отдельные гармоники (3), приведен в конце п.1 работы в идеальном случае  $\Delta_k = 0$ ,  $k \geq 1$  и отмечено, что

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(\tau) = \int_0^1 (f(x)Q(x, \tau) + g(x)\dot{Q}(x, \tau)) dx, \quad (5)$$

а упомянутый в постановке задачи "*участок струны положительной меры*" – это множество тех  $x$ , для которых  $f(x)^2 + g(x)^2 \neq 0$  (почти всюду). Наблюдаемый сигнал фактически является интегралом в (5) справа (см. также ниже, п. 2.2).

Автор никак не разъясняет, как, зная сумму в (5), можно выделить отдельные её слагаемые (3). На самом деле, как это следует из контрпримера в п. 1.1 выше, при произвольном  $\vartheta > 0$  **это невозможно**.

**1.4. На сказанном можно было бы остановиться.** Однако примем ( на время) что, при некоторых дополнительных предположениях (например, при  $\vartheta \geq 2$ , можно выделить величины (3) из (5). Проследим дальнейшие рассуждения автора.

**1.4.1.** Предлагается усовершенствование известной процедуры, основанной на использовании решения проблемы моментов (см., например, §§30-34 из [6]). Этот подход, видимо, является основой упомянутого выше "*построения оптимального универсального функционала*". Его суть состоит в следующем.

---

<sup>1</sup> В оригинале допущена небольшая неточность

При каждом  $k = 1, 2, \dots$  вместо "идеальных" (при  $\Delta_k = 0$  **реальных сигналов**  $\{Z_k\}$ ) рассматриваются следующие (см. стр. 74) "**усиленные**" сигналы

$$y_k(\tau) = \lambda_k^\alpha (f_k Q_k(\tau) + g_k \dot{Q}_k(\tau)), \quad \alpha = 1 + \epsilon, \quad \epsilon > 0 \text{ — "малое число"}. \quad k \geq 1 \quad (6)$$

Неизвестные же величины  $\{Q_k(t)\}$  и  $\{\dot{Q}_k(t)\}$  ищутся в виде

$$Q_k(t) = \int_{t-9}^t y_k(\tau) V_{k1}(t, \tau) d\tau, \quad \dot{Q}_k(t) = \int_{t-9}^t y_k(\tau) V_{k2}(t, \tau) d\tau, \quad k \geq 1, \quad (7)$$

при условиях оптимальности

$$\int_{-9}^0 (V_{k1}(t, t-\tau)^2 + V_{k2}(t, t-\tau)^2) d\tau \rightarrow \min, \quad k \geq 1. \quad (8)$$

**1.4.2.** Однако, во-первых, можно насколько угодно усиливать сигнал, но это будет иметь отношение только к измерительному устройству, а не к самому наблюдаемому процессу. Во-вторых, при такой **дополнительной процедуре, ровно настолько же** (если не больше) увеличиваются и ошибки  $\Delta_k(\tau)$ .

У автора же оказывается (см. последние две формулы работы), что квадрат  $L_2$  нормы "*оптимального*" вектора  $V^0$

$$\|V^0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-9}^0 (V_{k1}(t, t-\tau)^2 + V_{k2}(t, t-\tau)^2) d\tau \quad (9)$$

имеет вид

$$\|V^0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{9\lambda_k^{2\alpha} (f_k^2 + g_k^2) (1 - \lambda_k^{-2} 9^{-2} \sin^2 \lambda_k 9)} \quad (10)$$

а равномерные ошибки операций (см. в работе (1.11), (2.4) и обозначения на стр. 73-74), восстанавливающих значения  $Q_k(t)$   $\dot{Q}_k(t)$ , удовлетворяют оценкам

$$|\varphi_{ki}[t, \Delta_k(\tau)]| \leq \frac{2\delta_k}{\lambda_k^\alpha \sqrt{9(f_k^2 + g_k^2) (1 - \lambda_k^{-2} 9^{-2} \sin^2 \lambda_k 9)}}, \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

Видимо, считая, что тем самым цель работы достигнута, автор заключает: "*Подставляя полученные значения  $Q_k(t)$  в (1.3), будем иметь функцию состояния струны  $Q(x, t)$  (аналогично и для  $\dot{Q}(x, t)$ ) для любой точки  $x \in (0, 1)$ . Отметим, что сходимость полученного ряда следует из сходимости нормы (3.3)*" (то есть, нормы в (10) выше).

**1.4.3.** Но дело в том, что оценка (11) ошибочна: не учтено, что ошибка  $x \in (0, 1)$

$\Delta_k$  также "*усиливается*". Поэтому в знаменателе оценки (11) множитель  $\lambda_k^\alpha$  не должен участвовать. Величины же (10) непосредственного отношения к задаче не имеют и являются лишними промежуточными звеньями в известном методе моментов (см., например, [6] и [8]).

Действительно, представления (7) можно переписать в виде

$$Q_k(t) = \int_{t-9}^t Z_k(\tau) U_{k1}(t, \tau) d\tau, \quad \dot{Q}_k(t) = \int_{t-9}^t Z_k(\tau) U_{k2}(t, \tau) d\tau, \quad k \geq 1, \quad k \geq 1$$

где  $U_{ki}(t, \tau) = \lambda_k^\alpha V_{ki}(t, \tau)$ . Именно величины  $U_{ki}$  являются ядрами представлений (7) на основе **поступающих**, а не "*усиленных*" (а значит - **искаженных**) сигналов.

Наконец, сама декларируемая автором сходимость ряда (10) ничем не обоснована, коль скоро в работе нет никакой информации о величинах  $(f_k^2 + g_k^2)$ .

В конечном счёте, важны сходимость ряда (2) для решения задачи и соответствующая оценка **итоговой погрешности. Именно это в работе отсутствует.**

**1.5. Заключение.** Работа [1] содержит принципиальные ошибки, а поставленная в ней задача наблюдений ни в коей степени не решена. Утверждения автора об эффективности метода "*универсального оптимального функционала*" являются его заблуждением.

## 2. Восстановления состояния систем с распределёнными параметрами

Через шесть лет после публикации работы [1] вышла работа того же автора [2], в которой, по сути, обобщаются результаты предыдущей, с применением вполне аналогичных методов. Как увидим ниже, при этом повторяются те же ошибки. Поэтому рассмотрим это исследование менее подробно.

**2.1.** Рассматривается следующая граничная задача общего вида<sup>2</sup>

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = A_x w(x,t) + u(x,t), \quad t \geq 0, \quad x \in X, \quad \alpha_x w(s,t) = 0, \quad \alpha_x w(s,t) = 0, \quad (12)$$

$$\alpha_x w(s,t), \quad s \equiv x \in S,$$

"в области  $X$ , с граничными условиями на границе  $S$  области  $X$  ... Здесь  $w(x,t)$  и  $u(x,t)$  – векторы состояния и управления,  $A_x$  и  $\alpha_x$ , – матрицы линейных дифференциальных операторов, характеризующих объект и его воздействие на окружающую среду".

Ни о размерности, связности или иных свойствах  $X$  и его границы  $\partial X = S$  ничего не сказано<sup>3</sup>. Абсолютно не пояснены и свойства дифференциальных операторов  $A_x$  и  $\alpha_x$ . Судя по дальнейшему, можно только предположить, что это – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Неопределенность незначительно проясняется (см. начало п.2 работы [2]) предположением, что существует " $\Phi_i(x)$  – некоторая полная система ортонормированных собственных функций оператора  $A_x$  с дискретными и простыми собственными числами  $\lambda_i$ ".

Предполагается, что "*наблюдаемый  $m$ -мерный сигнал  $Z(\tau)$* " имеет вид

$$Z(\tau) = \int_X N(x, \tau) [w(x, \tau) + \omega(x, \xi(\tau))] dx, \quad \tau \in [t - \vartheta, t], \quad 0 < \vartheta = \text{const}, \quad (13)$$

где "*матрица  $N(x, \tau)$  характеризует способ и участки объекта, подлежащие измерению*"; а  $\omega(x, \xi(\tau))$  – погрешность измерения. Автор не исключает, что

<sup>2</sup> Обозначения оригинала сохранены.

<sup>3</sup> Без таких разъяснений не имеет смысла говорить, например, о существовании операции  $\alpha_x$ .

$N(x, \tau)$  может быть по  $x$  распределением. Разлагая функции в (13) (под интегралом) в ряд по системе  $\{\Phi_i(x)\}$  и обозначив

$$N_i(\tau) = \int_x N(x, \tau) \Phi_i(x) dx, \quad \Delta_i(\tau) = N_i(\tau) \omega_i(\tau), \quad i \geq 1, \quad (14)$$

автор заключает: "Таким образом, для каждой гармоники поступающий реальный сигнал можно представить в следующем виде":

$$Z_i(\tau) = N_i(\tau) \omega_i(\tau) + \Delta_i(\tau), \quad i \geq 1 \quad (15)$$

Далее автор оперирует "усиленными" сигналами (13) вида  $y_i(\tau) = \lambda_i^\alpha e^{\lambda_i \tau} Z_i(\tau)$ , где  $\alpha = 1 + \epsilon$ ,  $\epsilon$  (как и в работе [1], см. п. 1.4 выше) – малое число.

В заключительном п.3 работы приведено решение задачи и представлены формулы (3.7)-(3.8), вполне аналогичные формулам (10)-(11) (см. выше).

Отмечается, что (стр. 71): "В частном случае уравнение (7) будет описывать управляемый процесс теплопроводности. Тогда в однородном случае ( $0 \leq x \leq l$ ), объект – стержень конечной длины, задается одно из краевых условий "

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad w_x(0, t) = w_x(l, t) = 0, \quad (16)$$

$$w_x(0, t) + \lambda w(0, t) = 0, \quad w_x(l, t) + \mu w(l, t) = 0. \quad (17)$$

**2.2.** Однако на самом деле разложение по  $\{\Phi_i(x)\}$  приводит, всего лишь (см. начало стр. 73), к связи  $Z(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\tau)$  но автор (как и в работе [1], см. п. 1.3 выше)

**никак не разъясняет**, как он обнаруживает отдельные "гармоники"  $Z_i(\tau)$  по наблюдаемому сигналу  $Z(\tau)$ .

**2.3.** В резюме к работе [2] читаем: "Для каждой гармоники усиливая поступающий сигнал, строится универсальная оптимальная операция, позволяющая восстановить состояние всех точек в любой момент времени".

Действительно, в данной работе повторяется (со ссылкой на работу [1], см. стр. 34-36) та же **бесполезная** (см. выше, п. 1.4) процедура метода "усиленного" сигнала. Здесь возникает естественный вопрос: если автор действительно верит в декларируемую им в [1] и [2] эффективность этого метода, то по какой причине он выбирает коэффициентом "усиления" именно  $\lambda_k^\alpha$ , а не, скажем, гораздо более эффективную величину  $100 \exp(100 \lambda_k)$ ?

**2.4.** Что касается упомянутого процесса теплопроводности (не говоря даже об общем случае (12)), то "восстановление состояния всех точек в любой момент времени", быть не может – хотя бы потому, что, даже зная, при  $t < t_0$ , приближенные значения  $w(x, t_0), \forall x$ , на практике невозможно восстановить значения  $w(x, t), \forall x$ . Такая задача, как хорошо известно (см., например, [6], гл. 1, §8), некорректна и поэтому итоговая погрешность "восстановления биографии процесса", практически не контролируема.

Более того, при краевых условиях (17), если  $\mu \neq \nu$ , задача эта не самосопряженная и, следовательно, никакой полной системы " $\Phi_i(x)$  ортонормированных собственных функций оператора  $A_x$ " **не существует**.

**2.5.** Кроме ошибок, аналогичных ошибкам работы [1], в данной работе содержатся и другие. Так (см. стр. 71),  $\{w_j(t)\}$  –  $m$ -мерные векторы,  $\{N_j(\tau)\}$  –  $m \times m$  матрицы, а  $\{N_j\}$  – постоянные  $m \times m$  матрицы,  $j \geq 1$ . Но при  $m \geq 2$  некоторые формулы автора содержат операции, которые в линейной алгебре не существуют. Например, формулы (3.2), (3.5) и (3.8) имеют, соответственно, следующий вид:

$$\lambda_j^\alpha e^{\lambda_j \theta} \int_{t=\theta}^t V_j(t, \tau) N_j(\tau) e^{\lambda_j(\tau-t)} d\tau = 1, \quad V_j(t, \tau) = \frac{2e^{\lambda_j(\tau-t)+\theta}}{\lambda_j^\epsilon N_j (e^{2\lambda_j \theta} - 1)},$$

$$\|V^0\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|V_j^0\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_j^{1+2\epsilon} N_j^2 (e^{2\lambda_j \theta} - 1)} \quad (18)$$

При  $m \geq 2$  абсолютно непонятно:  $\{V_j(t, \tau)\}$  и  $V^0$  – скаляры, векторы или матрицы? В любом из этих случаев хотя бы одна из указанных формул бессмысленна. То же относится и к выражениям (3.3), (3.4) и (3.6) работы.

**2.6. Заключение.** Работа [2] изложена крайне небрежно. В ней повторяются ошибки работы [1], а поставленная задача не решена даже в случае процесса теплопроводности.

### 3. Колебания струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени

**3.1.** Авторская постановка задачи в работе [3] следующая: "Рассмотрим однородную, упругую струну длиной  $l$ , края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью  $u(x, t)$ . Ограничимся рассмотрением малых колебаний струны и предположим, что участок, на который действуют распределенные силы, имеет положительную меру по Лебегу. Пусть  $Q(x, t)$  при  $0 \leq x \leq l$  и  $t \geq 0$  есть прогиб струны, подчиненный следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + u(x, t) \quad (19)$$

с начальными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (20)$$

и однородными граничными условиями

$$Q(0, t) = 0, \quad Q(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (21)$$

где  $\alpha^2 = T_0 / \rho$ ,  $T_0$  – натяжение,  $\rho$  – плотность однородной струны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = T$  заданы значения состояния и скорости любой точки струны

$$Q(x, t_j) = \varphi_j(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

Задача оптимального управления колебаниями струны ставится следующим образом: среди возможных управлений  $u(x, t)$  при  $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$  требуется

найти оптимальное управление  $u^0(x, t)$ , переводящее струну из заданного начального состояния (20) через промежуточные состояния (22) в конечное состояние

$$Q(x, T) = 0, \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (23)$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T \int_0^l u(x, t)^2 dx dt. \quad (24)$$

**3.2.** Решение данной задачи очевидно: надо последовательно (по отрезкам  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ) решать  $n$  хорошо изученных (см. например, [7] и [9])

классических задач, соответствующих минимизациям частей  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_0^l u(x, t)^2 dx dt$ ,

функционала (24). Полученное при этом минимальное значение итогового функционала (24) **уменьшить невозможно**.

**3.3** Авторы избрали неоправданно усложненный и излишне ограничительный путь решения элементарной задачи. Так (стр.53), почему-то предполагается, что  $u_k(t) \neq 0$ . На стр. 56 величины  $\delta_k, \delta_{jk}$  и  $A_k$  должны быть отличны от нуля (что авторами не оговорено). У авторов нет оснований делать выводы о скорости сходимости полученных рядов (см. стр. 58), ибо ими не получена оценка по  $k$  для  $u_k(t)$ .

**3.4. Заключение.** Решение поставленной в работе [3] задачи абсолютно тривиально.

#### 4. Парето-оптимальная встреча управляемых аппаратов

Резюме к работе [4]: "Рассматривается задача встречи нескольких управляемых космических аппаратов, когда движение происходит в тонком сферическом слое, двигатели управления работают непрерывно и кроме сил притяжения Земли все возмущающие силы пренебрегаются. Учитывая индивидуальные интересы управляющих сторон, сформулирована векторная функция выигрыша и построено парето-оптимальное решение. Приведен пример для встречи трех объектов."

**4.1.** Приведем постановку задачи со всеми деталями<sup>4</sup>: "Рассмотрим процесс управления одновременной встречи нескольких сотрудничающих космических аппаратов. Предполагаем, что все космические аппараты встречаются с фиктивным неманеврирующим объектом (точкой), который находится на фиктивной орбите и является целью. Для описания относительного движения космических аппаратов и цели, считая их материальными точками, пренебрегая возмущениями от несферичности Земли, атмосферным сопротивлением и притяжением других небесных тел, запишем векторные уравнения движения для цели и каждого космического аппарата (управляемого объекта), участвующего в сближении:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{\mu}{r_0^3} \mathbf{r}_0 = 0, \quad \ddot{\mathbf{r}}_a^{(i)} + \frac{\mu}{r_a^{(i)3}} \mathbf{r}_a^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.1)$$

<sup>4</sup> Авторская нумерация формул здесь сохранена.

где  $\mathbf{r}_y$  и  $\mathbf{r}_a^{(i)}$  – геоцентрические радиус-векторы цели и  $i$ -ого космического аппарата,  $\mathbf{u}^{(i)}$  – равнодействующий вектор ускорения от тяги двигателей  $i$ -ого аппарата,  $\mu$  – гравитационная постоянная Земли. Вычитая из второго уравнения (1.1) первое и определяя вектор дальности от цели до космических аппаратов  $\mathbf{D}^{(i)} = \mathbf{r}_a^{(i)} - \mathbf{r}_0$ , получим:

$$\ddot{\mathbf{D}}^{(i)} + \frac{\mu}{r_{\text{ц}}^3} [(\mathbf{r}_{\text{ц}} + \mathbf{D}^{(i)})(1 + \mathbf{D}^{(i)2} / r_{\text{ц}}^2 + 2\mathbf{r}_{\text{ц}} \mathbf{D}^{(i)} / r_{\text{ц}}^2)^{-3/2} - \mathbf{r}_{\text{ц}}] = \mathbf{u}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Пусть заданы начальные положения (в момент  $t_0$ ) всех космических аппаратов

$$\mathbf{D}^{(i)}(t_0) = \mathbf{D}_0^{(i)}, \quad \dot{\mathbf{D}}^{(i)}(t_0) = \dot{\mathbf{D}}_0^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.3)$$

Предположим, что на интервале времени  $[t_0, T]$  затраты на управление каждого космического аппарата определяются величиной

$$\mathfrak{J}_i(\mathbf{u}^{(i)}) = \left( \int_{t_0}^T \mathbf{u}^{(i)}(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

Каждый космический аппарат стремится к встрече с остальными, определяемой конечным положением (в момент времени  $T$ ) с заданными параметрами

$$\mathbf{D}^{(i)}(T) = \mathbf{D}_T(\alpha, \beta), \quad \dot{\mathbf{D}}^{(i)}(T) = \dot{\mathbf{D}}_T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

перелетая при этом с наименьшими затратами на управление. Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые величины, предстоящие определению.

В рассматриваемой задаче о встрече предполагается, что все управляемые объекты имеют одинаковую информацию и у них есть возможность совместного выбора управлений. Исходя из непротивоположности интересов, можно составить кооперацию всех управляемых объектов с векторной функцией выигрыша. Решение полученной задачи должно учитывать как индивидуальные интересы управляющих объектов, так и интересы любых коалиций, которые могут быть образованы внутри кооперации.

Одним из способов решения такой задачи является выбор управляющими объектами парето-оптимальных управлений [2]. Управляемые объекты должны выбрать управляющие воздействия, доставляющие выигрыши, близкие к идеальной точке

$$\mathfrak{J}^* = \{\mathfrak{J}_i^*, i = 1, 2, \dots, n | \mathfrak{J}_i^* = \min_{\mathbf{u}} \mathfrak{J}_i(\mathbf{u}^{(i)})\} \quad (1.6)$$

и в качестве меры “близости” используется следующая норма:

$$\|\mathfrak{J}\| = \sum_{i=1}^n |\mathfrak{J}_i(\mathbf{u}^{(i)})^2 - \mathfrak{J}_i^{*2}| \quad (1.7)$$

Величина  $|\mathfrak{J}_i(\mathbf{u}^{(i)})^2 - \mathfrak{J}_i^{*2}|$  составляет величину дополнительных затрат на управление  $i$ -ого управляемого объекта, а норма  $\|\mathfrak{J}\|$  характеризует “групповую потерю” объектов.

Сформулируем следующую задачу. Требуется найти оптимальные управляющие воздействия  $\mathbf{u}^{(i)0}(t) = \{u_1^{(i)0}(t), u_2^{(i)0}(t), u_3^{(i)0}(t)\}$  и значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , переводящие сотрудничающие объекты (2) из начальных фазовых состояний (1.3) в

конечное фазовое состояние (1.5) так, чтобы затраты (1.7) на управляющие воздействия  $u^{(i)}(t)$  были наименьшими."

В дальнейшем (начиная со стр.73) авторы используют, вместо нелинейного уравнения (1.2), его известный, линеаризированный вариант.

4.2 Из смысла поставленной задачи немедленно следуют следующие выводы:

4.2.1. Аппараты **встречаются в заданное время  $T$**  и (поскольку уравнение движения цели всем аппаратам известно) **в заданной** точке, т.е.  $D^{(i)}(T) = r_a^{(i)}(T) - r_{ц}(T) = 0$ . Следовательно, условие (1.3) на самом деле **зафиксировано**. Непонятно, откуда взялась у авторов зависимость  $D^{(i)}(T)$  от  $\alpha$  и  $\beta$  и **какая задача решается** в формулах (2.4)-(2.7) рассмотренного примера (стр. 76-78).

4.2.2. Это необъяснимое упущение авторов не только приводит к излишне усложненному и **ошибочному** решению (см. стр. 73-78), но и делает задачу **тривиальной**.

Действительно (как это следует из 4.1 выше), в работе решаются *n* хорошо изученных **независимых классических задач** оптимального управления (см., например, [6], [8]). Ясно, что, например (см. (1.6) и (1.7) и выше),  $\|\tilde{J}\| = 0$  и у аппаратов нет никакой нужды сотрудничать.

4.3. Известно, что оптимальность по Парето – это такое состояние системы, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других (**Википедия**). Таким образом, в поставленной задаче **парето-оптимальность отсутствует**.

4.4. **Заключение**. Постановка задачи в работе [4] содержит серьёзную логическую ошибку, исправление которой тривиализирует исследование. Решенный частный пример не соответствует смыслу задачи встречи аппаратов.

## 5. Оптимальное управление и наблюдение колебаний балки

Работа [5] посвящена процессу, описываемому классическим уравнением малых, поперечных, вынужденных, упругих колебаний однородной балки на шарнирных опорах, при наличии сжимающей осевой силы.

5.1 В стандартных обозначениях речь идет об уравнении с постоянными коэффициентами

$$EJ \partial^4 W / \partial x^4 + P \partial^2 W / \partial x^2 + \rho S \partial^2 W / \partial t^2 = f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (25)$$

где  $u(x, t) = f(x, t) / (\rho S)$  – управляющее воздействие. Заданы начальные

$$W(x, 0) = \varphi(x), \quad W_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l \quad (26)$$

и граничные условия

$$W(0, t) = W_{tt}(0, t) = 0, \quad W(l, t) = W_{tt}(l, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (27)$$

обеспечивающие (при определенных ограничениях, налагаемых на  $\varphi, \psi$  и  $u$ )

существование и единственность решения  $W(x, t)$  при  $0 \leq x \leq l, 0 < t < T$ .

Рассматриваются следующие две задачи.

**Задача 1 (гашение колебаний)**. Найти управление  $u = u^0(x, t)$ , переводящее, в заданное время  $T > 0$ , решение  $W$  задачи (1)–(3) из состояния (2) в состояние

$$W(x, T) = 0, \quad W_t(x, T) = 0, \quad 0 < x < l \quad (28)$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T \int_0^l |u(x,t)|^2 dx dt \quad (29)$$

*Задача 2.* (наблюдение за колебаниями). Предполагается, что в момент времени  $t = t_1 > 0$  известны значения  $W(x, t_1)$  и  $W_t(x, t_1)$ ,  $x \in [0, l]$ , решения  $W$  уравнения (25) с граничными условиями (27). Требуется восстановить начальные значения (26).

**5.2.** Решение указанных задач очевидно, ибо уравнение (25) допускает разделение переменных в простейшем, явном виде. Решение подобных задач на основе метода моментов общеизвестно. Например, рассуждения и выкладки (для случая колебания струны), приведенные в книге [8] (стр. 171-175), здесь можно повторить с соответствующими, очевидными коррекциями деталей.

Тем не менее, авторы допустили ряд просчетов в простейшей ситуации. Именно:

**5.2.1.** При решении *Задачи 1.*:

1). В коэффициентах формулы (2.17) есть ошибки. Так, в знаменателе величины  $X_k$  должно быть  $\sinh^2 \Omega_k' T / \Omega_k'^2 - T^2$ , а для  $Y_k$ , соответственно,  $T^2 - \sin^2 \Omega_k T / \Omega_k^2$ .

2) Не исследован случай, когда последние величины обращаются в нуль.

3) Оценка (2.19) ошибочна, ибо, во-первых, знаменатель справа должен содержать величину  $(1 - P/P_k)$ , а во-вторых, вместо множителя  $\lambda_k$  должно быть  $\lambda_k^2$ .

4) Наконец, указанные авторами условия для того, чтобы функция (2.12) работы была решением уравнения (25) выше, недостаточны. Действительно, даже бесконечной дифференцируемости функции  $\Psi$  недостаточно, ибо ни одно из граничных условий не выполнено. Что же касается  $\varphi$ , то к приведенным условиям необходимо добавить еще два:  $\varphi'''(0) = \varphi'''(l) = 0$ .

**5.2.2.** При решении *Задачи 2.*:

1) Авторы фактически используют функцию  $u(x, t)$  (не отмечая в постановке задачи, что она задана) и при этом не замечают, что решают не задачу наблюдения, а хрестоматийную для метода разделения переменных начально-краевую задачу. Решение последней, как известно, неустойчиво (так как практически не поддается определению при малых  $P - P_k$ ). При этом авторы забывают, что (см. (2.12) в работе сами уже, по сути, использовали в *Задаче 1* явное представление (с заменой  $t$  на  $-t$ ) (3.3) решения  $W$ .

2). Представления (3.3) работы чисто формальны и для того, чтобы подставить в них  $t = t_1$  (как это делают авторы) надо доказать, что соответствующие ряды сходятся равномерно. А для того, чтобы  $W$  из (3.3) было решением уравнения (1), надо наложить дополнительные условия на  $W(x, t_1)$ ,  $W_t(x, t_1)$  и  $u(x, t)$ . При решении *Задачи 1* авторы, в какой-то степени, учли это обстоятельство, а здесь такими вопросами они вообще не озабочены.

3). В отличие от *Задачи 1*, здесь случай непериодичной амплитуды (при  $P = P_k$ ) необходимо предусмотреть. Он отнюдь не тривиален, как это (см. начало стр. 72) считают авторы.

4). Наличие критических точек  $P = P_k$  ставит под сомнение возможность практического применения решения *Задачи 2*, ибо отсутствует учет погрешностей у используемого для наблюдения устройства.

5). Формулы (3.5) работы не вытекают из соотношений на стр.76, в которых содержится ряд ошибок.

**5.3. Заключение.** Работа [5] изложена крайне небрежно, а рассматриваемые в ней задачи (при правильной постановке, исключающей определенные окрестности значений  $P_k$ ) абсолютно тривиальны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барсегян В.Р. Задача наблюдения колебаниями струны. //Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. № 1. С.72 – 78.
2. Барсегян В.Р. Задача оптимального восстановления состояния систем с распределенными параметрами при наличии погрешностей в неполных измерениях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №1. С.70–75.
3. Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С.52–60.
4. Барсегян В.Р., Степанян А.А. Задача о парето-оптимальной встрече нескольких управляемых космических аппаратов. //Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.63 №4. С.71–78.
5. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. Об оптимальном управлении и наблюдении упругих колебаний балки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.69 – 78.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
7. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
8. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
9. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.

#### Сведения об авторе:

**Нерсисян Анри Барсегович**, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом Института математики НАН Армении, академик НАН Армении.

**E-mail:** nerses@instmath.sci.am

Поступила в редакцию 26.07.2015