ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЙ ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ

Аветисян В.В., Степанян В.С.

Ключевые слова: гарантированный поиск, оптимальное управление
Keywords: guaranteed search, optimal control
Բանալի բառեր. Երաշխավորված փնտրում, օպտիմալ ղեկավարում

Վ.Վ. Ավետիսյան, Վ.Ս. Ստեփանյան
Հարթության վրա շարժվող օբյեկտի օպտիմալ երաշխավորած դինամիկական փնտրումը

Դիտարկվում է հորիզոնական հարթության վրա շարժվող օբյեկտի օպտիմալ ըստ նվազագույն երաշխավորված ժամանակի փնտրման դինամիկ խնդիրը, երբ որոնելի օբյեկտի սկզբնական վիճակը հայտնի է տրված բազմության ճշտությամբ: Փնտրումն իրականացվում է տարածության մեջ արագացմամբ ղեկավարվող օբյեկտի կողմից: Մինիմաքսային մոտեցման հիման վրա ցույց է տրվել, որ դիտարկվող խնդիրը բերվում է աջ շարժական ծայրակետով օպտիմալ ըստ արագագործության ղեկավարման խնդրին: Պոնտրյագինի մաքսիմումի սկզբունքի մեթոդի կիրառմամբ՝ բացահայտ տեսքով ստացվել են բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս հաշվարկել օպտիմալ երաշխավորող ղեկավարումն ու երաշխավորված փնտրման համապատասխան նվազագույն ժամանակը, կախված փնտրողի հայտնաբերման շրջանի և որոնելի օբյեկտի անորոշության շրջանի կենտրոնների սկզբնական հեռավորությունից:

V.V. Avetisyan, W.S. Stepanyan
Optimal guaranteed dynamic search of mobile object on the plane

A problem of time-optimal guaranteed dynamic search of moving object with controllable acceleration in plane is observed, where the state of the sought object is known up to a given set. It is shown, that on a basis of minimax approach the problem can be reduced to time-optimal speed control problem with moving right end. Applying Pontryagin's maximum principle gives as a result explicit formulas which allow calculation of optimal guaranteed control and corresponding minimal guaranteed search time, depending on initial distance between the centers of the seeking object's discovery circle and sought object's uncertainty circle.

Рассматривается задача оптимального по минимальному гарантированному времени динамического поиска движущегося на горизонтальной плоскости объекта, начальное состояние которого известно с точностью до заданного множества. Поиск осуществлявтся объектом, управляемым по ускорению в пространстве. Показано, что на основе минимаксного подхода рассматриваемая задача сводится к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым концом. Применением метода принципа максимума Понтрягина в явном виде полученны формулы, позволяющие вычислить оптимальное гарантирующее управление и соответствующее минимальное время гарантированного поиска в зависимости от начального расстояния между центрами круга обнаружения ищущего и круга неопределённости искомого объектов.

Введение. Рассматривается задача построения управляемого по ускорению пространственного движения ищущего объекта, который из заданного начального состояния должен, совершив подходящий маневр, за возможно минимальное время обнаружить целевой движущийся объект, совершающий управляемое по ускорению движение на горизонтальной плоскости и начальное состояние которого известно ищущему объекту с точностью до заданного множества неопределённости. Искомый объект считается обнаруженным в случае его попадания в круговое основание конуса, координаты вершины которого – суть текущие координаты ищущего объекта. Как и в [1-3], при решении рассматриваемой задачи используется подход, состоящий в построении такого управления, при котором круг обнаружения ищущего объекта поглощает расширяющийся во времени область неопределённости искомого объекта за минимальное время. На основе минимаксного подхода, установлено, что для гарантированного обнаружения достаточно рассматривать случай, когда искомый объект в начальный момент времени находится на границе круга неопределенности и движется с максимальной скоростью по радиусу в направлении от центра, что обеспечивает расширение круга неопределенности с наибольшей скоростью. Тем самым, исходная задача поиска сводиться к задаче оптимального по быстродействию управления с подвижным правым концом, которая решается методом принципа максимума Понтрягина [4]. Разработан конструктивный алгоритм определения оптимального гарантирующего управления и соответствующего минимального гарантированного времени поиска, в зависимости от параметров задачи. Главное отличие постановки задачи данной работы от постановок задач гарантированного поиска целевого объекта, рассмотренных в [5-10] состоит в том, что в этих работах 1) ищущий и искомый объекты осуществляют управляемое по скорости движения (простые движения), 2) оба объекта могут перемещаться только в пределах заданной ограниченной плоской области ([5-8]), совпадающей с областью неопределённости искомого объекта, 3) поиск (в [9,10]) на плоскости начинается вне области неопределённости, однако в [9] обнаружение искомого объекта осуществляется с помощью круга постояннго радиуса, а в [10] – полуплоскости. Статья продолжает исследования, начатых в [1-3].

1. Описание поисковой системы и постановка задачи. Пусть имеются два точечных объекта X и Y, из которых X – ищущий, а Y – искомый. Объект X совершает пространственное движение в гравитационном поле Земли, а объект Y – движение на плоскости Земли. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: \quad m_X \ddot{x} = f_X + m_X \mathrm{g}, \quad x(0) = x^0;\ \dot{x}(0) = 0, \quad x, f_X \in R^3, \\ \left| f_X(t) \right| \le F_X, \quad t \ge 0, \tag{1.1}$$

$$Y: \quad m_Y \ddot{y} = f_Y, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad y, f_Y \in R^2, \\ \left| \dot{y}(t) \right| \le V_Y, \quad \left| f_Y(t) \right| \le F_Y, \quad t \ge 0. \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) x, y – векторы координат объектов; f_X, f_Y – векторы управляющих сил объектов, которые являются кусочно-непрерывными функциями от t и по модулю ограничены заданными величинами F_X, F_Y соответственно; V_Y – максимально возможная скорость объекта Y; $\mathrm{g} = (0, 0, -g)$ – постоянный вектор ускорения свободного падения, а m_X, m_Y – массы объектов X и Y соответственно.

Введя новую переменную (с дальнейшим опусканием штриха) и обозначения

$$x' = x - \mathrm{g}t^2 / 2, \quad w_{X,Y} = f_{X,Y} / m_{X,Y}, \quad W_{X,Y} = F_{X,Y} / m_{X,Y}, \tag{1.3}$$

запишем систему (1.1), (1.2) в виде

$$X: \quad \ddot{x} = w_X, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x, w_X \in R^3, \\ \left| w_X(t) \right| \le W_X, \quad t \ge 0, \tag{1.4}$$

$$Y: \quad \ddot{y} = w_Y, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad y, w_Y \in R^2, \\ \left| \dot{y}(t) \right| \le V_Y, \quad \left| w_Y(t) \right| \le W_Y, \quad t \ge 0, \tag{1.5}$$

где w_X, w_Y – векторы управляющих ускорений объектов X, Y, а W_X, W_Y – их максимально возможные ускорения соответственно.

Будем полагать, что объекту X точно известны свои текущие фазовые координаты $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $t \geq 0$, максимальная величина своего управляющего ускорения W_X, а также максимальные величины управляющего ускорения и скорости обьекта Y – W_Y и V_Y. О фазовых координатах $y, \dot{y}$ объекта Y известно лишь то, что в начальный момент времени $t = 0$, Y находится в заданном множестве неопределенности

$$(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0, \tag{1.6}$$

$$D_0 = \{y^0 \in R^2 : \left|y^0 - y_c^0\right| \leq r_0\}, \quad \dot{D}_0 = \{\dot{y}^0 \in R^2 : \left|\dot{y}^0\right| \leq V_Y\},$$

где $D_0, \dot{D}_0$ – круги с центрами в точках $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0)$, $\dot{y}^0 = (0,0)$ и радиусами r_0, V_Y соответственно.

Возможность определения точных геометрических координат искомого объекта Y осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области

$$G(x(t),C) = \left\{ \begin{array}{l} \xi \in R^2 : \left|\xi(t) - x_c(t)\right| \leq l(t) = Cx_3(t), \quad C = \left|tg\alpha\right| \\ \qquad x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t)), \qquad 0 < \left|\alpha\right| < \pi / 2 \end{array} \right\}, \quad t \geq 0, \tag{1.7}$$

$$G(x(0),C) = G(x_1(0), x_2(0), x_3(0), C) = G(x_c(0), l(0)) = G_0,$$

представляющая собой круговое (с центром $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$) основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения X. В дальнейшем, в записи для круга обнаружения G параметр C будем опускать.

При пространственном движении ищущего объекта эволюция информационного круга (1.7) на плоскости (x_1, x_2) при $t > 0$ определяется плоским движением его центра $x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t))$ с помощью вектора управления $(w_{X1}(t), w_{X2}(t))$ и расширением или сужением круговой области (1.7) путем изменения расстояния x_3 объекта X до плоскости (x_1, x_2) с помощью скалярного управления $w_{X3}(t)$, т.е. изменением её радиуса $l(t) = Cx_3(t)$ с помощью управления $Cw_{X3}(t)$: $\ddot{l}(t) = Cw_{X3}(t),\ l_0 = l(0),\ \dot{l}_0 = \dot{l}(0).$ При $w_{X3}(t) > 0$ круг G (1.7) расширяется, а при $w_{X3}(t) < 0$ сужается.

Пусть параметры y_{c1}^0, y_{c2}^0, r_0 и $x_{c1}^0, x_{c2}^0, x_3^0, C$ (или x_{c1}^0, x_{c2}^0, l_0) кругов неопределённости D_0 и обнаружения G_0 такие, что в начальный момент времени $t = 0$ выполняется условие

$$D_0 \cap G_0 = \varnothing. \tag{1.8}$$

Согласно (1.8), в начальный момент круг неопределенности находится вне начального круга обнаружения ищущего объекта.

Скажем, что положение искомого объекта Y становится точно известным в момент времени $t^* > 0$, когда впервые выполняется условие обнаружения, т.е. условие его попадания в круг обнаружения

$y(t^*) \in G(x(t^*))$, т.е. $\left|y(t^*) - x_c(t^*)\right| \le l(t^*)$, $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$. (1.9)

Определение 1. На плоскости (y_1, y_2) областью неопределенности $D(t,(y^0,\dot{y}^0))$ искомого объекта (1.5) с начальным условием $(y^0,\dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$ при $t \ge 0$ назовем совокупность концов $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ всех траекторий этой системы, начинающихся в момент $t = 0$ в точках начального множества неопределенности $D_0 \times \dot{D}_0$ и построенных с помощью всевозможных кусочно-непрерывных управляющих ускорениях (допустимых управлениях) $w_Y(\tau) = (w_{Y1}(\tau), w_{Y2}(\tau))$, $\left|w_Y(\tau)\right| \le W_Y$, $0 \le \tau \le t$, при соблюдении ограничения на скорость $\left|\dot{y}(t)\right| \le V_Y$, $0 \le \tau \le t$.

Очевидно, что область $D(t, D_0 \times \dot{D}_0)$ является объединением всех областей вида $D(t,(y^0,\dot{y}^0))$, где $(y^0,\dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$:

$$D(t, D_0 \times \dot{D}_0) = \bigcup_{(y^0,\dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} D(t,(y^0,\dot{y}^0)). \qquad (1.10)$$

В дальнейшем, в записи для области неопределенности $D(t, D_0 \times \dot{D}_0)$ декартово произведение $D_0 \times \dot{D}_0$ будем опускать.

Поскольку круг обнаружения $G(x(t))$ (1.7) ищущего объекта X (1.4) в момент t при использовании им всевозможных кусочно-непрерывных управляющих ускорений (допустимых управлений) $w_X(\tau)$, $\left|w_X(\tau)\right| \le W_X$, $0 \le \tau \le t$, представляет собой круг, то условие обнаружения (1.9) гарантированно выполнимо, если существует момент T, $T \ge t^*$ и допустимое управление $w_X(t)$, $0 \le t \le T$, что выполняется включение

$$D(T) \subseteq G(x(T)). \qquad (1.11)$$

Определение 2. Для заданного начального состояния покоя $(x^0, \dot{x}^0 = 0)$ объекта X и заданных начальных кругов обнаружения G_0 (1.7) и неопределенностей D_0 и $\dot{D}_0$ (1.6), (1.8), число $T > 0$ и допустимое управление $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ объекта X назовем гарантированным временем поиска и гарантирующим управлением соответственно, если при любом начальном состоянии $(y^0,\dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0$ и любом допустимом управлении $w_Y(t)$, $0 \le t \le T$ объекта Y гарантируется условие обнаружения (1.9) в некоторый момент времени $t^* > 0$ – не позднее времени T: $t^* \le T$.

Будем полагать, что множество гарантирующих управлений $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ не пусто для всех рассматриваемых состояний покоя. Тогда, при фиксированном

($x^0, \dot{x}^0 = 0$) каждому гарантирующему управлению $w_X(t)$, $0 \le t \le T$ соответствует траектория системы (1.4), приходящая в некоторую точку в момент T, так что выполняется условие поглощения (1.11).

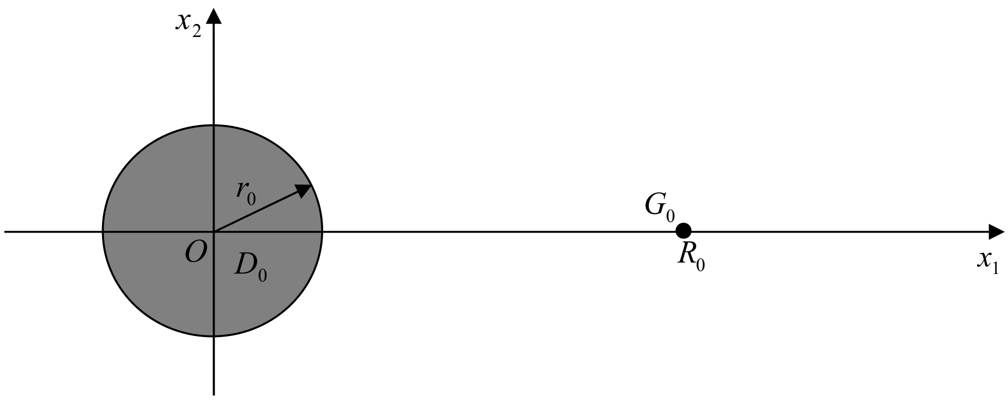
Сформулируем задачу о минимальном гарантированном обнаружении искомого подвижного объекта Y (1.5).

Задача. Найти минимальное гарантированное время быстродействия $T^*(x^0)$ и допустимое управление w_X^*, доставляющее минимум

$$T^*(x^0) = \min_{|w_X| \le W_X} \max_{|w_Y| \le W_Y} \max_{(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} T(x^0, w_X, w_Y, y^0, \dot{y}^0). \tag{1.12}$$

2. Сведение к задаче оптимального быстродействия с подвижным правым концом. Не нарушая общности, положим, что центр $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$ круга неопределенности $D_0 \subset R^2$ искомого объекта Y совпадает с началом декартовой системы координат Ox_1x_2, а ищущий объект X в начальный момент времени с нулевой скоростью (1.4) находится в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x_1^0 = R_0 > 0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$, т.е. круг обнаружения – точка $x_c^0 = (R_0,\ 0)$ на оси Ox_1 (фиг.1). Положим, что выполняется соотношение $R_0 > r_0$, которое полностью описывает начальное расположение (1.8) кругов G_0 и D_0:

$$G_0 = (R_0, 0), \quad D_0 = \left\{ (y_1, y_2) :\ y_1^2 + y_2^2 \le r_0^2 \right\} \tag{2.1}$$



Фиг.1

Обозначим через ∂D_0 и $\partial \dot{D}_0$ границы областей непределенности D_0 и $\dot{D}_0$ (1.6) соответственно:

$$\partial D_0 = \left\{ y^0 \in R^2 : \left| y^0 \right| = r_0 \right\}, \quad \partial \dot{D}_0 = \left\{ \dot{y}^0 \in R^2 : \left| \dot{y}^0 \right| = V_Y \right\}. \tag{2.2}$$

Утверждение. Искомый объект (1.5) в момент времени t может оказаться на максимальном расстоянии от начала координат, если в начальный момент $t = 0$

находится на границе круга неопределенности D_0: $y^0 \in \partial D_0$, имеет максимальную по модулю начальную вектор–скорость $\dot{y}^0 \in \partial \dot{D}_0$, направленная по радиусу круга D_0 в сторону от центра

$$\dot{y}^0 = (\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0) = \left(V_Y y_1^0 r_0^{-1},\ V_Y y_2^0 r_0^{-1}\right) \tag{2.3}$$

и движется с нулевым ускорением

$$w_Y(\tau) \equiv 0,\ \ 0 \le \tau \le t\,. \tag{2.4}$$

Действительно. Используя решения уравнения (1.5)

$$y_i(t) = y_i^0 + t\dot{y}_i^0 + \int\limits_0^t (t-\tau) w_{Yi}(\tau) d\tau\,, \quad \dot{y}_i(t) = \dot{y}_i^0 + \int\limits_0^t w_{Yi}(\tau) d\tau\,, \quad i = 1,2\,, \tag{2.5}$$

где управляющие ускорения $w_{Yi}(\tau),\ 0 \le \tau \le t$ из класса кусочно-непрерывных функций, представим формулу для вычисления расстояния объекта Y от начала координат $r(t) = \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}$ в виде:

$$r(t) = \sqrt{\left|y^0\right|^2 + t^2\left|\dot{y}^0\right|^2 + 2t < y^0, \dot{y}^0 > +2 < y^0 + t\dot{y}^0, Q(t) > + \left|Q(t)\right|^2}\,, \tag{2.6}$$

а ограничение на скорость $\sqrt{\dot{y}_1^2(t) + \dot{y}_2^2(t)} \le V_Y$ – в виде:

$$\dot{y}_1^2(t) + \dot{y}_2^2(t) = 2 < P(t), \dot{y}^0 > + \sum_{i=1}^{2}\left[\left(\int\limits_0^t w_{Yi}(\tau) d\tau\right)^2 + (\dot{y}_i^0)^2\right] \le V_Y^2\,, \quad t \ge 0\,. \tag{2.7}$$

В (2.6), (2.7) введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} Q(t) = \left(\int\limits_0^t (t-\tau) w_{Y1}(\tau) d\tau,\ \int\limits_0^t (t-\tau) w_{Y2}(\tau) d\tau\right)^{\mathrm{T}}, \\ P(t) = \left(\int\limits_0^t w_{Y1}(\tau) d\tau,\ \int\limits_0^t w_{Y2}(\tau) d\tau\right)^{\mathrm{T}}, \quad y^0 = \left(y_1^0, y_2^0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \dot{y}^0 = \left(\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0\right)^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

где символом $<.\,,.>$ обозначено скалярное прозведение двух векторов, а символом $()^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования.

Так как максимум подкорневого выражения (2.6) относительно $y^0, \dot{y}^0$ достигается в такой граничной точке $(y^0, \dot{y}^0) \in \partial D_0 \times \partial \dot{D}_0$ (2.2), что векторы $y^0 = \left(y_1^0, y_2^0\right)^{\mathrm{T}}$, $\dot{y}^0 = \left(\dot{y}_1^0, \dot{y}_2^0\right)^{\mathrm{T}}$ коллинеарны и одинаково направлены: $\dot{y}_i^0 = V_Y y_i^0 r_0^{-1}$, $i = 1,2$, то при такой начальной вектор–скорости из (2.7) получим неравенство

$$2V_Y r_0^{-1} < P(t), y^0 > + < P(t), P(t) > \le 0\,, \quad t \ge 0\,. \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) будет заведомо выполнено, если выполняется

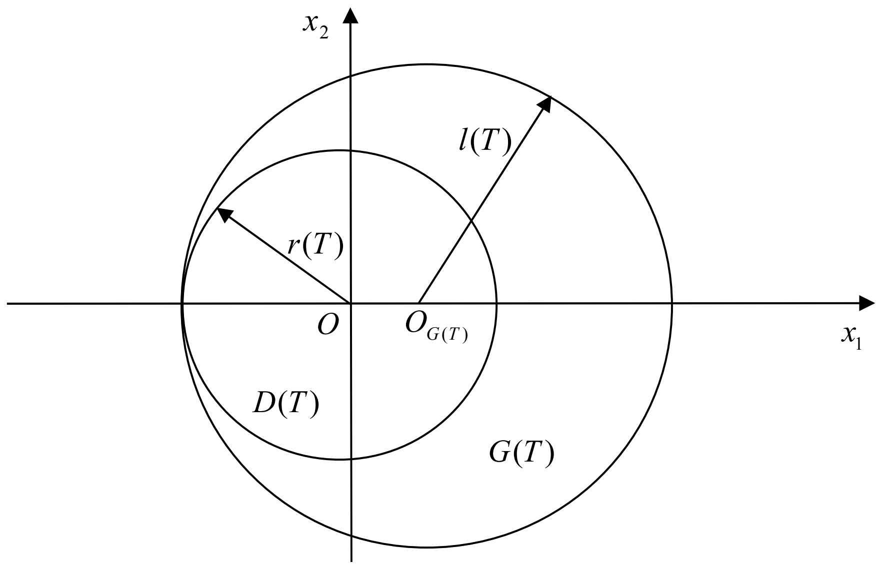
$$2V_Y \left[t\int_0^t [w_{Y1}^2(\tau) + w_{Y2}^2(\tau)]d\tau \right]^{1/2} + t\int_0^t [w_{Y1}^2(\tau) + w_{Y2}^2(\tau)]d\tau \le 0\,, \quad t \ge 0\,, \qquad (2.10)$$

которое получается после последовательного применения к левой части (2.9) неравенств Коши – Буняковского и Шварца. Очевидно, что (2.10) имеет место только при $w_{Yi}(\tau) \equiv 0$, $0 \le \tau \le t$, $i = 1,2$. С учётом этого, из (2.8) получим $Q(t) \equiv 0$, $t \ge 0$ и тогда максимальное значение $r(t)$ (2.6) будет следующим:

$$\max_{|w_Y(t)| \le W_Y} \max_{(y^0, \dot{y}^0) \in D_0 \times \dot{D}_0} r(t) = r_0 + tV_Y\,. \qquad (2.11)$$

Таким образом, для гарантированного поглощения (1.11) ищущий объект должен строить управление поиском с расчетом на то, что искомый объект в начальный момент времени находится на границе области неопределенности D_0 и имеет начальную скорость (2.3), что обеспечивает расширение круга неопределенности с наибольшей скоростью V_Y. Такой подход гарантирует успешный поиск, так как управление поиском строится с расчетом на движение искомого объекта в любом, в том числе наихудшем для ищущего объекта, направлении.

Из доказанного утверждения и геометрии взаимного расположения двух окружностей следует, что в момент времени $t = T$ одно из допустимых расположений кругов $G(x(T))$ и $D(T)$, отвечающее условию поглощения (1.11), является расположение, изображенное на фиг. 2 и характеризуемое следующими условиями:



Фиг.2

$$G(T) = \left\{ (x_1, x_2): \ (x_1 - R(T))^2 + x_2^2 \le l^2(T) \right\}, \qquad (2.12)$$

$$D(T) = \left\{ (y_1, y_2): \ y_1^2 + y_2^2 \le r^2(T) \right\}, \quad r(T) = r_0 + V_Y T\,, \qquad (2.13)$$

$$R(T) \geq 0, \quad R(T) = l(T) - r(T). \tag{2.14}$$

При переходе изменяющегося во времени круга обнаружения из начального положения (2.1) в конечное положение (2.12) в момент $t = T$, условие (2.14) в переменных x_1, x_3 запишется в следующем виде:

$$x_1(T) \geq 0, \quad x_1(T) = Cx_3(T) - r_0 - V_Y T. \tag{2.15}$$

Если ввести фазовые переменные $\dot{x}_i = v_i$ и записать уравнения (1.3) относительно x_i, v_i в виде

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = w_{Xi}, \ i = 1,2,3, \tag{2.16}$$

то придем к следующей задаче оптимального управления:
найти управляющее ускорение $w_X^*(t) = (w_{X1}^*(t), w_{X2}^*(t), w_{X3}^*(t))$, $t \in [0,T]$ (1.4), обеспечивающее приведение объекта X (2.16) из заданного начального состояния

$$\begin{matrix} x_1(0) = R_0, & x_2(0) = 0, & x_3(0) = 0, \\ v_1(0) = 0, & v_2(0) = 0, & v_3(0) = 0 \end{matrix} \tag{2.17}$$

в множество

$$S(x(T),T) = \left\{ x \in R^3 : \begin{array}{c} g_1(x(T),T) = x_1(T) \geq 0, \\ g_2(x(T),T) = x_2(T) = 0, \\ g_3(x(T),T) = x_1(T) - Cx_3(T) + r_0 + V_Y T = 0 \end{array} \right\} \tag{2.18}$$

за минимальное время T.

Задача (2.16)–(2.18) является задачей оптимального по быстродействию управления с закрепленным левым (17) и подвижным правым концами (2.18). К ней применим метод принципа максимума [4], дающего необходимые условия оптимальности управления $w_X(t)$ из достаточно широкого для приложений класса кусочно–непрерывных функций.

Покажем, что в классе постоянных управлений в задаче (2.16)–(2.18) существует гарантирующее управление и соответствующее гаратированное время поиска. Действительно, искомое ограниченное управление $w_X = (w_{X1}, w_{X2}, w_{X3})$ (1.4) выберем со следующими компонентами:

$$w_{X1} = w_{X2} = 0, \quad w_{X3} = W_X. \tag{2.19}$$

Проинтегрируем уравнения (2.16) при управлениях (2.19) и начальных условиях (2.17). Затем, полученные выражения при $t = T$ подставим в конечные условия в (2.18). Первое и второе соотношения выполняются автоматически, а третье соотношение преобразуется к квадратному уравнению относительно времени T:

$$-Cw_{X3}T^2 + 2V_Y T + 2(R_0 + r_0) = 0. \tag{2.20}$$

Уравнение (2.20) имеет один положительный корень:

$$T = \frac{2V_Y}{Cw_{X3}} + \sqrt{\left(\frac{2V_Y}{Cw_{X3}}\right)^2 + \frac{2(R_0 + r_0)}{Cw_{X3}}}. \tag{2.21}$$

Таким образом, управление $w_X = (w_{X1}, w_{X2}, w_{X3})$ с компонентами (2.19), в частности, является гарантирующим, а время (2.21) – гарантированным временем поиска, так как в этот момент выполняются краевые условия (2.18), равносильные условию поглощения, т.е. условию гарантированного обнаружения.

Перейдем к решению задачи (2.16) –(2.18). Введем сопряженные соответственно x_i, v_i переменные p_i, q_i и составим функцию Гамильтона [4]

$$H = p_0 + \sum_{i=1}^{3} (p_i v_i + q_i w_{Xi}), \qquad p_0 = \text{const} . \tag{2.22}$$

Определим оптимальное управление $w_X^* = (w_{X1}^*, w_{X2}^*, w_{X3}^*)$ из принципа максимума

$$H^* = \max_{|w_X| \le W_X} H, \quad \left| w_X^* \right| = W_X, \quad w_{Xi}^* = q_i W_X \left[\sum_{i=1}^{3} q_i^2 \right]^{-1/2} \tag{2.23}$$

и выпишем двухточечную краевую задачу для гамильтоновой системы вида

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = w_{Xi}^*, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad i = 1,2,3, \tag{2.24}$$

$$x_1(0) = R_0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = 1,2,3, \tag{2.25}$$

$$p_i(T) = \sum_{j=1}^{3} \mu_j \frac{\partial g_j(x(T),T)}{\partial x_i}, \quad q_j(T) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{\partial g_i(x(T),T)}{\partial v_j}, \quad j = 1,2,3, \tag{2.26}$$

$$\mu_1 g_1(x(T),T) = 0, \quad \mu_1 \le 0, \quad g_2(x(T),T) = 0, \quad g_3(x(T),T) = 0, \tag{2.27}$$

$$H^*(T) = -\sum_{i=1}^{3} \mu_i \frac{\partial g_i(x(T),T)}{\partial T}. \tag{2.28}$$

В условиях трансверсальности (2.26) – (2.28) функции g_j задаются из (2.18), а $\mu_j = const$ – множители Лагранжа, которые вместе с постоянной $p_0 \le 0$ одновременно не равняются нулю.

3. Решение краевой задачи принципа максимума. Найдем сопряженные переменные путем интегрирования сопряженных уравнений (2.24) при условиях (2.26) с учетом (2.18), (2.22):

$$q_i(t) = (T - t) p_i(t), \quad i = 1,2,3, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.1}$$

$$p_1(t) = -\mu_1 + \mu_3, \quad p_2(t) = \mu_2, \quad p_3(t) = -\mu_3 C, \quad 0 \le t \le T.$$

Используя решения (3.1), получим важный для дальнейших построений вывод о постоянстве во времени оптимальных управлений w_{Xi}^*, $i = 1,2,3$

$$w_{X1}^* = W_X \frac{-\mu_1 + \mu_3}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}}, \; w_{X2}^* = W_X \frac{\mu_2}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}},$$

$$w_{X3}^* = W_X \frac{-C\mu_3}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + \mu_2^2 + C^2 \mu_3^2}}. \tag{3.2}$$

Интегрируя уравнения движения (2.24) при управлениях (3.2) с начальными условиями (2.25), получим:

$$x_1(t) = w^*_{X1}\frac{t^2}{2} + R_0, \quad x_2(t) = w^*_{X2}\frac{t^2}{2}, \quad x_3(t) = w^*_{X3}\frac{t^2}{2}, \tag{3.3}$$

$v_i(t) = w^*_{Xi}t,\ i = 1,2,3$.

Подставив (3.3) в условия (2.27), (2.28), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $T, p_0, \mu_i,\ i = 1,2,3$:

$$\mu_1(x_1(T)) = \mu_1(w^*_{X1}\frac{T^2}{2} + R_0) = 0, \tag{3.4}$$

$$x_2(T) = w^*_{X2}\frac{T^2}{2} = 0, \tag{3.5}$$

$$x_1(T) - Cx_3(T) + r_0 + V_Y T = (w^*_{X1} - Cw^*_{X3})\frac{T^2}{2} + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \tag{3.6}$$

$$p_0 + (-\mu_1 + \mu_3)w^*_{X1}T + \mu_2 w^*_{X2}T - \mu_3 C w^*_{X3}T = -\mu_3 V_Y. \tag{3.7}$$

Так как $T > 0$, то из (3.5)((3.2)) получаем $w^*_{X2} = 0$ ($\mu_2 = 0$), т.е. движение по координате x_2 отсутствует. Таким образом, имеем систему из трех нелинейных уравнений (3.4), (3.6), (3.7) относительно четырех неизвестных p_0, μ_1, μ_3, T. Из постановки задачи следует, что $\mu_3 < 0$, так как в противном случае круг обнаружения не может расширяться и задача теряет смысл. Согласно методу принципа максимума, рассмотрению подлежат случаи $p_0 = 0$ и $p_0 = -1$, а для каждого из этих случаев необходимо последовательно рассматривать два варианта удовлетворения условию дополняющему нежёсткости (2.27): $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 < 0$. Покажем, что в случае $p_0 = 0$ краевая задача (2.24) – (2.28) (или (3.4), (3.6), (3.7)) не имеет решения, т.е. из принципа максимума оптимальное управление не определяется.

Действительно, пусть $p_0 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$. Тогда из (3.2) получим

$$w^*_{X1} = -\frac{W_X}{\sqrt{1+C^2}}, \quad w^*_{X3} = -Cw^*_{X1} = \frac{C\,W_X}{\sqrt{1+C^2}}. \tag{3.8}$$

При управлениях (3.8) уравнения (3.6), (3.7) запишутся в виде

$$-\frac{W_X\sqrt{1+C^2}}{2}T^2 + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \tag{3.9}$$

$$\mu_3[-W_X T\sqrt{1+C^2} + V_Y] = 0. \tag{3.10}$$

Разрешив (3.10) относительно T и подставив найденное в (3.9), получим соотношение

$$\frac{V_Y{}^2}{2W_X\sqrt{1+C^2}} + R_0 + r_0 = 0,$$

которое не имеет место в силу положительности левой части .

Пусть $p_0 = 0$, $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$. Тогда из условия трансверсальности (3.7) получим

$$T = \frac{-\mu_3 V_Y}{-\mu_1 w^*_{X1} + \mu_3 (w^*_{X1} - C w^*_{X3})}. \tag{3.11}$$

Используя (3.2), можно (3.11) представить в виде:

$$\begin{aligned} T &= \frac{-\mu_3 V_Y}{W_X \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}} = \\ &= \frac{-C \mu_3 V_Y}{C {W_X}^2 \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2}} W_X = \frac{V_Y}{C {W_X}^2} w^*_{X3}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Подставим (3.12) в равносильное (3.4) уравнение

$$\frac{w^*_{X1}}{2} T^2 + R_0 = 0 \tag{3.13}$$

и в уравнение (3.6). Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{w^*_{X1}}{2} \left(\frac{V_Y}{C {W_X}^2} w^*_{X3} \right)^2 + R_0 = 0, \\ &\frac{w^*_{X1} - C w^*_{X3}}{2} \left(\frac{V_Y}{C {W_X}^2} w^*_{X3} \right)^2 + \frac{{V_Y}^2}{C {W_X}^2} w^*_{X3} + R_0 + r_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Исключив из системы (3.14) параметр R_0 и разрешив полученное уравнение относительно r_0, найдем

$$r_0 = \frac{{V_Y}^2}{C {W_X}^2} w^*_{X3} \left(\frac{{w^*_{X3}}^2}{2 {W_X}^2} - 1 \right). \tag{3.15}$$

Поскольку по условию задачи $r_0 > 0$, то из (3.15) следует неравенство ${w^*_{X3}}^2 > 2{W_X}^2$, которое невозможно согласно второму соотношению в (2.23).

Теперь рассмотрим второй случай $p_0 = -1$. Как и в предыдущем случае, для системы (3.4), (3.6), (3.7) исследуем следующие варианты, удовлетворяющие условию дополняющей нежесткости (3.4): А) $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$ и В) $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$.

Случай А) $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$.

Из (3.2) следует, что оптимальные управления w^*_{X1} и w^*_{X3} определяются по формулам (3.8) и система (3.4), (3.6), (3.7) запишется в виде:

$$-\frac{W_X}{\sqrt{1 + C^2}} \frac{T^2}{2} + R_0 \geq 0, \tag{3.16}$$

$$-W_X \sqrt{1 + C^2} \frac{T^2}{2} + V_Y T + R_0 + r_0 = 0, \tag{3.17}$$

$$\mu_3 (V_Y - W_X T \sqrt{1 + C^2}) = 1. \tag{3.18}$$

Для заданных параметров C, W_X, V_Y, r_0 выясним, при каких значениях $R_0 > 0$ система (3.16)–(3.18) разрешима относительно $T > 0$. В случае существования более одного положительного корня T, оптимальным будет наименьший из них – $T = T_1^{\min}\left(R_0\right)$.

Сначала рассмотрим уравнение (3.17). Оно имеет один положительный корень

$$T_1^{\min}\left(R_0\right) = \frac{V_Y + \sqrt{\left(V_Y\right)^2 + 2W_X(R_0 + r_0)\sqrt{1 + C^2}}}{W_X\sqrt{1 + C^2}}, \tag{3.19}$$

который должен удовлетворять равенству (3.18) при некотором $\mu_3 < 0$ и, следовательно, следующему ограничению:

$$T_1^{\min}\left(R_0\right) = -\frac{1 - \mu_3 V_Y}{\mu_3 W_X\sqrt{1 + C^2}} > \frac{V_Y}{W_X\sqrt{1 + C^2}}, \tag{3.20}$$

вытекающему из (3.18), а также неравенству (3.16), т.е. ограничению

$$T_1^{\min}\left(R_0\right) \le \sqrt{\frac{2R_0\sqrt{1 + C^2}}{W_X}}. \tag{3.21}$$

Из (3.20), (3.21) следует, что для существования решения $T_1^{\min}\left(R_0\right)$ системы (3.16)–(3.18) необходимо и достаточно, чтобы относительно $R_0 > 0$ было разрешимо неравенство

$$\frac{V_Y}{W_X\sqrt{1 + C^2}} < \sqrt{\frac{2R_0\sqrt{1 + C^2}}{W_X}}. \tag{3.22}$$

Разрешая неравенство (3.22), найдем

$$R_0 > R_0^* = \frac{{V_Y}^2}{2W_X(1 + C^2)\sqrt{1 + C^2}}. \tag{3.23}$$

При условии (3.23) и с учётом (3.19) рассмотрим неравенство (3.21), которое можно преобразовать к виду

$$\sqrt{V_Y^4 + 2W_X V_Y^2\left(R_0 + r_0\right)\sqrt{1 + C^2}} \le W_X\left(R_0 C^2 - r_0\right)\sqrt{1 + C^2} - V_Y^2.$$

Это неравенство имеет положительную правую часть при значениях

$$R_0 > R_0^{**} = \frac{W_X r_0\sqrt{1 + C^2} + V_Y^2}{W_X C^2\sqrt{1 + C^2}} \tag{3.24}$$

и после несложных преобразований приводится к виду

$$R_0^2 W_X(1 + 2C^2)^2 - 2R_0[W_X(1 + 2C^2)r_0 + 4V_Y^2\sqrt{1 + C^2}] + W_X r_0^2 \ge 0. \tag{3.25}$$

Решение квадратного неравенства (3.25) относительно параметра R_0 следующее:

$$R_0 \in (-\infty, R_0^-] \cup [R_0^+, \infty), \qquad R_0^-, R_0^+ > 0,$$

где R_0^-, R_0^+ определяются через известные параметры W_X, V_Y, r_0, C:

$$R_0^{\pm} = \frac{W_X C^2 r_0 + V_Y^2\sqrt{1 + C^2} \pm \sqrt{2W_X r_0 V_Y^2 C^2\sqrt{1 + C^2} + V_Y^4(1 + C^2)}}{W_X C^4}. \tag{3.26}$$

Отметим, что для любого $r_0 \geq 0$ между R_0^* (2.16), R_0^{**} (2.17), R_0^-, R_0^+ (3.26) имеют место следующие соотношения:

$$R_0^- < R_0^{**} < R_0^+ \ , \quad R_0^* < R_0^{**} \ . \tag{3.27}$$

Из (3.27) следует, что оптимальные управления (3.8) реализуются для любого $R_0 \in [R_0^+, \infty)$. Соответствующее оптимальное гарантированное время определяется по формуле (3.19), а параметр $\mu_3 = \dfrac{1}{V_Y - W_X T\sqrt{1+C^2}}$ из (3.18) при $T = T_1^{\min}\left(R_0\right)$, в силу (3.20), – отрицательный.

Случай В) $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$.

Тогда оптимальные управления w_{X1}^* и w_{X3}^* определяются по соответствующим формулам (3.2). Далее, из (3.4) получим $x_1(T) = 0$, а из (3.3) при $t = T$ – следующие выражения для w_{X1}^*, w_{X3}^*:

$$w_{X1}^* = -\frac{2R_0}{T^2}, \qquad w_{X3}^* = \frac{2x_3(T)}{T^2}, \tag{3.28}$$

где $x_3(T)$ определяется из (3.6) следующим образом:

$$x_3(T) = \frac{r_0 + V_Y T}{C} . \tag{3.29}$$

Используя (3.28) и (3.29), для заданных параметров $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$ из условия $\left|w_X^*\right| = W_X$ (2.23) получим следующее алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно искомого T :

$$-T^4 + \frac{4V_Y^2}{C^2 W_X^2} T^2 + \frac{8 r_0 V_Y}{C^2 W_X^2} T + \frac{4(C^2 R_0^2 + r_0^2)}{C^2 W_X^2} = 0 \,, \qquad r_0 < R_0 < \infty \,, \tag{3.30}$$

наименьший положительный корень которого обозначим через $T_2^{\min}\left(R_0\right)$.

Далее, из (3.2), (3.28) и (3.29) при $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ получим следующие соотношения для определения множителелей μ_1 и μ_3 :

$$\frac{w_{X1}^*}{w_{X3}^*} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 C}, \qquad \frac{w_{X1}^*}{w_{X3}^*} = -\frac{CR_0}{r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right)}, \tag{3.31}$$

откуда следует, что

$$\left[r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right)\right](\mu_1 - \mu_3) + C^2 R_0 \mu_3 = 0 \, . \tag{3.32}$$

Условие трансверсальности (3.7) при управлениях (3.2) и $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ примет вид:

$$W_X T_2^{\min}\left(R_0\right)\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2} = 1 - \mu_3 V_Y \, . \tag{3.33}$$

Разрешая систему (3.32), (3.33) относительно параметров μ_1 и μ_3, получим:

$$\mu_1 = A_\mu \mu_3, \qquad \mu_3 = -\frac{V_Y}{B} - \sqrt{\left(\frac{V_Y}{B}\right)^2 + \frac{1}{B}}, \tag{3.34}$$

$$B = \left[W_X T_2^{\min}\left(R_0\right)\right]^2 \left[(A_\mu - 1)^2 + C^2\right] - V_Y^2, \qquad A_\mu = \frac{r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right) - C^2 R_0}{r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right)}.$$

Численно-аналитическое исследование знаков множителей μ_1, μ_3 (3.34) по отношению параметра R_0 показывает, что если $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$, то $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$, если $R_0 = R_0^+$, то $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$, если $R_0 \in \left(R_0^+, \infty\right)$, то $\mu_1 > 0$, $\mu_3 < 0$. Следовательно, при значениях $R_0 \in \left[R_0^+, \infty\right)$ приходим к противоречию по отношению знака множителя μ_1.

Таким образом, для заданных параметров $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$, случай B) реализуем только при $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$: сначала находится наименьший положительный корень $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ уравнения (3.30), затем из (3.32), (3.33) определяются множители $\mu_1\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right) < 0$, $\mu_3\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right) < 0$ по формулам (3.34) и в конце вычисляются оптимальные управляющие ускорения w_{X1}^* и w_{X3}^* (3.2).

Подытожив результаты, полученные в случаях A) и B), получаем, что оптимальное (минимальное) гарантированное время обнаружения искомого объекта и соответствующие оптимальные гарантирующие управления w_{X1}^*, w_{X3}^*, соответственно, определяются следующим образом:

$$T^*(R_0) = \begin{cases} T_2^{\min}\left(R_0\right), & \text{если} \quad r_0 < R_0 < R_0^+, \\ T_1^{\min}\left(R_0\right), & \text{если} \quad R_0^+ \le R_0 < \infty, \end{cases} \tag{3.35}$$

$$w_{X1}^*(R_0) = \begin{cases} \dfrac{(-\mu_1 + \mu_3)W_X}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2\mu_3^2}}, & \text{если} \quad R_0 \in \left(r_0,\, R_0^+\right), \\ -\dfrac{W_X}{\sqrt{1 + C^2}}, & \text{если} \quad R_0 \in \left[R_0^+,\, \infty\right). \end{cases} \tag{3.36}$$

$$w_{X3}^*(R_0) = \begin{cases} \dfrac{-C\mu_3 W_X}{\sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2\mu_3^2}}, & \text{если} \quad R_0 \in \left(r_0,\, R_0^+\right), \\ -\dfrac{C W_X}{\sqrt{1 + C^2}}, & \text{если} \quad R_0 \in \left[R_0^+,\, \infty\right). \end{cases} \tag{3.37}$$

В (3.35)–(3.37) R_0^+ и $T_1^{\min}\left(R_0\right)$, $R_0 \in \left[R_0^+, \infty\right)$ вычисляются формулами (3.26) и (3.19) соответственно, $T_2^{\min}\left(R_0\right)$, $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения (3.30), а постоянные множители

$\mu_1\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right)<0$, $\mu_3\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right)<0$, $R_0\in\left(r_0,\, R_0^+\right)$ находятся в результате решения системы (3.32), (3.33).

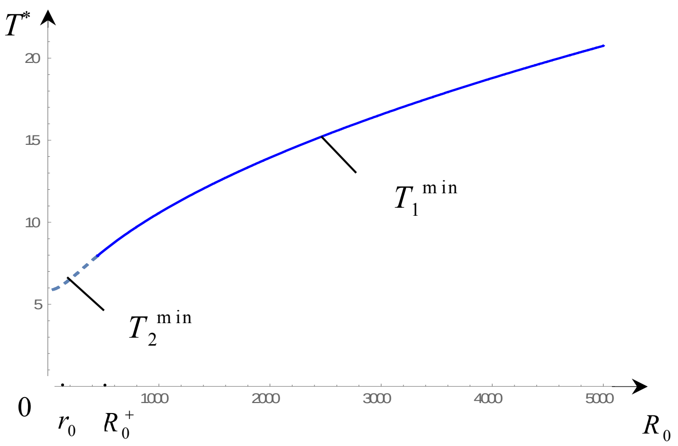
4. Результаты численного расчета оптимального гарантированного времени и оптимальных гарантирующих управлений. Для системы (1.4)–(1.6) со следующими параметрами:

$$W_X=20\,\text{мсек}^{-2},\quad V_Y=50\,\text{мсек}^{-1},\quad r_0=50\,\text{м},\qquad C=1 \tag{4.1}$$

расчёт оптимального гарантированного времени поиска (3.35) и соответствующих управлений (3.36), (3.37) по изложенному в предыдущем пункте алгоритму производится по следующей последовательности:

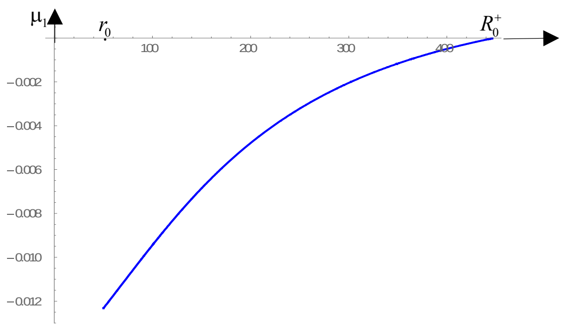
1) вычисляется значение $R_0^+=447.937$ м по формуле (3.26),

2) строится зависимость оптимального гарантированного времени $T^*(R_0)$, $R_0\in\left(r_0,\infty\right)$ согласно (3.35) (фиг. 3),

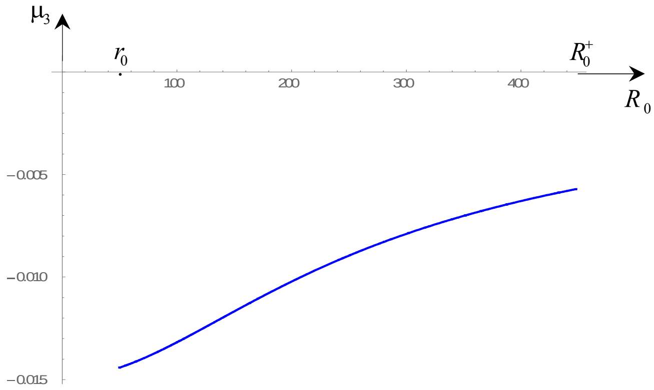


Фиг.3

3) определяются зависимости множителей $\mu_1\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right)$(фиг.4) и $\mu_3\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right)$(фиг.5) от параметра $R_0\in\left(r_0,R_0^+\right)$ путем использования формул (3.34),



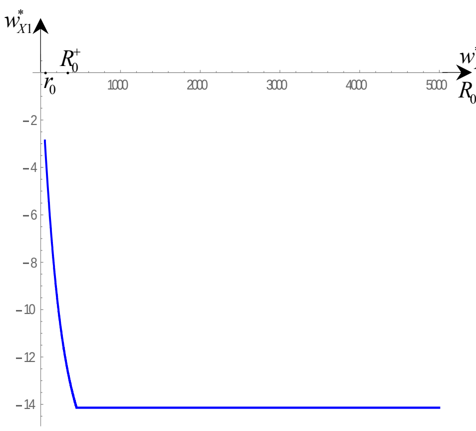
Фиг. 4

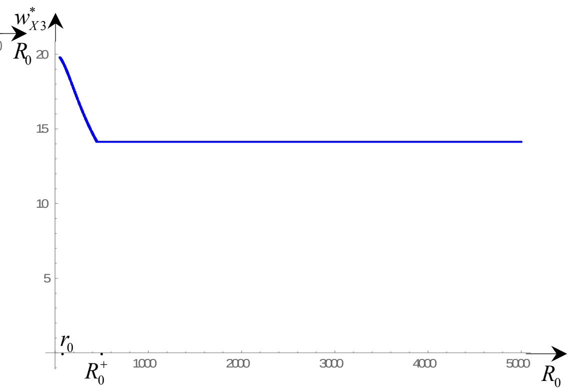


Фиг. 5

4) по формулам (3.36) и (3.37) вычисляются оптимальные гарантирующие управления $w_{X1}^{*}\left(R_0\right)$ (фиг. 6) и $w_{X3}^{*}\left(R_0\right)$ (фиг. 7)

Таким образом, установлено существование такого контрольного расстояния, вычисляемое по формуле (3.26), что для любого начального расстояния не меньше





Фиг. 6 Фиг.7

контрольного, наискорийший гарантированный поиск искомого объекта реализуется при одном и том же постоянном управляющем ускорении и, при этом, в наименьший гарантированный момент обнаружения, круг неопределенности искомого объекта содержится в круге обнаружения, имея с последним внутреннее касание. Для начальных расстояний меньше контрольного, в момент оптимального гарантированного обнаружения искомого объекта круги неопределенности и обнаружения совмещаются. При этом, к достижению ситуации совмещения, чем величина начального расстояния близка к величине радиуса начального круга неопределенности, тем круг обнаружения расширяется с большим ускорением, а прямолинейное движение центра круга обнаружения происходит с меньшим абсолютным значением ускорения.

Заключение. В задаче гарантированного динамической поиска подвижного объекта разработан конструктивный алгоритм управления, позволяющий ищущему объекту осуществить поиск за минимальное гарантированное время. Исходная задача, как задача построения управления, при котором круг обнаружения ищущего объекта поглощает расширяющийся во времени круг неопределённости искомого объекта, на основе минимаксного подхода сведена к задаче оптимального быстродействия с подвижным правым концом. Путем использования метода принципа максимума Понтрягина в явном виде получены формулы, позволяющие вычислить оптимальное гарантирующее управление и соответствующее минимальное время гарантированного поиска в зависимости от начального расстояния между центрами круга обнаружения ищущего и круга неопределённости искомого объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальное гарантирующее управление поиском движущегося на плоскости целевого объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С.3-9.
2. Аветисян В.В. Оптимизация гарантирующего управления поиском подвижного объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 2. С.68-78.
3. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск подвижного объекта на плоскости // Изв. НАН РА. Механика. 2015. Т.60. № 1. С.68-80.
4. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1988. 344с.
5. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Вып.1. С.3-12.
6. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Вып. 4. № 1. С.827-862.
7. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Гарантированное управление поиском подвижного объекта в прямоугольной области //Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С.58-66.
8. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С.31-39.
9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: 1987. 76с.
10. Меликян А.А. Задача оптимального быстродействия с поиском целевой точки // ПММ. 1990. Т.54. Вып.1. С.3-11.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович – д.ф.-м.н., профессор факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 94) 44 95 60;
E-mail: vanavet@yahoo.com

Степанян Ваан Сейранович – аспирант факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 98) 900846;
E-mail: nop144d@gmail.com

Поступила в редакцию 01.10.2015