ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ БАЛОК И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Мовсисян. Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: балка, цилиндрическая оболочка, начально-неоднородное напряжённое состояние, критические величины.
Key words: cylindrical shell, nonhomoqenous initial stressed state, critical rates.
Բանալի բառեր՝ հեծան, գլանային թաղանթ, նախնական անհամասեռ լարվածային վիճակ, կրիտիկական մեծություններ:

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Առաձգամածուցիկ հեծանի և գլանային թաղանթի կայունության մասին

Հեծանի տատանումների և կայունության խնդիրներում կան դեպքեր, երբ չնայած տարբեր են եզրային պայմանները, ստացվում են նույն հաճախությունները, կամ կրիտիկական ուժերը: Սակայն անհամասեռ նախնական լարվածային վիճակի դեպքում բոլորովին տարբեր են ստացվում այդ մեծությունները:
Ձողի և գլանային թաղանթի համար դիտարկված են կայունության այդպիսի խնդիրներ:

Movsisyan L.A., Nersisyan G.G.
About stability of viscoelastis bars and cylindrical shells

There are cases in the problems concernig the stability and vibrations of bars, when thougt the boundary conditions are different, frequecy or critical forces are achieved. However in the case of nonhomogenous initial stressed state, quite different volumes are achieved.
Such problems concerning the bars and cylindrical shells are also considered.

В задачах колебаний и устойчивости балки есть случаи, когда при различных граничных условиях одинаковыми получаются частоты или критические силы. Однако, при начально-неоднородном напряжённом состоянии совершенно различными получаются эти величины.
Для стержня и цилиндрической оболочки рассмотрены такие задачи по устойчивости.

Введение. В задачах колебаний и устойчивости балок и цилиндрических оболочек существует пара граничных условий, при которых собственное значение (собственные частоты и критические силы) одинаковое, хотя формы колебаний или потери устойчивости различные.

Однако при неоднородном начальном напряжённом состоянии совершенно другими получаются и частоты, и критические параметры.

Здесь рассматриваются именно такие задачи по устойчивости для типично вязкоупругих балок и цилиндрических оболочек.

Постановка задачи.

1. Уравнение устойчивости вязкоупругой балки

$$\tilde{E}J\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \tag{1.1}$$

будем изучать для двух случаев граничных условий:

$$1.\, w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{при} \;\; x=0 \;\; и \;\; x=l$$
$$2.\, \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \quad \text{при} \;\; x=0 \;\; и \;\; x=l \tag{1.2}$$

Первые из (1.2) – известные условия шарнирного опирания, а вторые – так называемая «плавающая заделка» ([1],стр.153). Такие условия вполне корректные, в литературе встречаются не часто, но есть, например, [2]. Решения (1.1) для первого случая граничных условий (1.2) будем искать в виде

$$w=\sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\lambda_m x\,,\;\; \lambda_m=\frac{m\pi}{l}\,, \tag{1.3}$$

а для второго –

$$w=\sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos\lambda_m x\,. \tag{1.4}$$

Тогда, если продольную силу в общем виде представить как

$$P=\frac{a_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\cos\lambda_m x, \tag{1.5}$$

то на основании (1.3)–(1.5) из уравнения (1.1) получим бесконечную систему

$$2\tilde{E}J\lambda_m^3 f_m+\left(a_0\pm a_{2m}\right)\lambda_m f_m+\sum_{q=1}^{m-1}\left(a_{m-q}\pm a_{m+q}\right)\lambda_q f_q+$$
$$+\sum_{q=m+1}^{\infty}\left(a_{q-m}\pm a_{q+m}\right)\lambda_q f_q=0 \tag{1.6}$$

В последней системе знак «$+$» относится к случаю (1.3), а «$-$» – к (1.4).

Кстати, из (1.6) видно, что при однородном начальном состоянии $a_0\neq 0,\, a_m=0\,,\, m\neq 0$ критические параметры получаются одинаковыми при обоих граничных условиях.

В качестве примера возьмём случай типичного материала

$$\tilde{E}u=E\left(u-\frac{E-H}{En}\int_0^t e^{-\frac{1}{n}(1-\tau)}u\,d\tau\right). \tag{1.7}$$

Тогда бесконечную систему (1.6) можно записать относительно производных f_k.

В векторной записи она выглядит как

$$Xf'+Yf=0 \tag{1.8}$$

$$Z_{mm}=a_0\pm a_{2n} \quad , \quad Z_{mq}=\begin{cases} a_{m-q}\pm a_{m+q} & ,\, q<m \\ a_{q-m}\pm a_{m-q} & ,q>m \end{cases}$$
$$X_{mm}=2EJ\lambda_{mm}^3+Z_{mm}\lambda_m\,,\; X_{mq}=Z_{mq} \tag{1.9}$$
$$Y_{mm}=2\frac{HJ}{n}\lambda_m^3+\left(\frac{1}{n}Z_{mm}+Z'_{mm}\right)\lambda_m$$
$$Y_{mq}=\frac{1}{n}Z_{mq}+Z'_{mq}$$

Критические параметры должны быть определены из условия разрешимости системы (1.6). В частности, для неподвижной нагрузки мгновенная критическая сила определится из условия равенства нулю детерминанта бесконечной матрицы $\mathrm{Det}X = 0$, а длительная – $\mathrm{Det}Y = 0 \ \left(a'_m = 0\right)$.

Для подвижной нагрузки один из принятых подходов является критерий $f' = 0$, что приводит к определению критического времени. Последнее определяется из условия равенства нулю $\mathrm{Det}Y = 0, \left(a'_m \neq 0\right)$.

Начальное состояние такое: сосредоточенная сила P_0 движется от одного конца балки к другому с постоянной скоростью. Скорость движения силы (в дальнейшем давления) настолько мала, что пренебрегаем инерционным членом.
В качестве примеров здесь также будем рассматривать два вида граничных условий:

1. $u = 0$ при $x = 0$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x = l$ (1.10)

2. $u = 0$ при $x = 0$ и $x = l$

Для первого случая из (1.10) продольная сила будет

$$P = \begin{cases} -P_0 & \text{при } 0 \pm x \le ct \\ 0 & \text{при } x > ct \end{cases} \tag{1.11}$$

а для второго –

$$P = \begin{cases} -P_0\left(1 - \dfrac{ct}{l}\right), & 0 \le x \le ct \\ P_0 \dfrac{ct}{l}, & ct < x \le l \end{cases} \tag{1.12}$$

И, соответственно, коэффициенты a_k, входящие в систему (1.9), будут

$$a_0 = -2P_0 \frac{ct}{l},\ a_m = -\frac{2P_0}{m\pi} \sin \lambda_m ct$$

$$a_0 = -2P_0\left(\frac{ct}{l} - 0{,}5\right),\ a_m = -\frac{2P_0}{m\pi}\left[\sin \lambda_m ct - \frac{1-(-1)^m}{m\pi}\right] \tag{1.13}$$

Кстати, так как в рассматриваемых примерах продольная сила постоянна на различных интервалах, то приведённые задачи можно решать, как в [3], т.е. вместо бесконечного детерминанта получить трансцендентное уравнение. Соответственно вот как выглядят они:

$$\begin{cases} \left[2 - x_1 - \dfrac{k^2 (1-x_1)^3}{3}\right] \mathrm{tg} k x_1 + k(1-x_1)^2 = 0 \\ \mathrm{tg} k(1-x_1) + k(1-x_1) = 0, \left(k^2 = \dfrac{P_0 l^2}{EJ}, x_1 = \dfrac{ct}{l}\right) \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} \left(1+\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\right)^2 + \dfrac{k_2}{k_1}\left[x_1-(1-x_1)\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\right]\left[k_2\operatorname{cth}k_1(1-x_1)-\right. \\ \left.-k_1\operatorname{ctg}k_2x_1\right]=0 \ , \ k_1^2=k^2x_1 \\ k_2\operatorname{ctg}k_2x_1+k_1\operatorname{cth}k_1(1-x_1)=0,\ k_2^2=k^2(1-x_1) \end{cases} \tag{1.15}$$

В табл.I приведены относительные значения мгновенных критических сил для рассмотренных случаев, т.е. отношение истинного критического значения к критическому значению однородно сжатого шарнирно опёртого стержня: $\lambda=\dfrac{P_{\text{кр}}}{P^0_{\text{кр}}}, P^0_{\text{кр}}=\dfrac{EJ\pi^2}{l^2}$.

Как видно из формул (1.14), при $x_1=1$ оба случая граничных значений дают одинаковые значения для $\lambda(\lambda=1)$ в первой задаче.

Таблица 1

x_1	1.14 (а)	1.14(в)	1.15(а)	1.15(в)
0.9	1,210	1,022	21,16	10,50
0.8	1,437	1,046	12,40	5,892
0.7	1,661	1.144	8,957	4,631
0.6	1,831	1,331	8,356	4,306
0.5	1,891	1,668	8,000	4,533
0.4	1,897	2,303	5,666	5,395
0.3	1,984	3,663	4,070	7,447
0,2	2,343	7,474	3,759	13,11
0.1	3,743	27,18	5,112	40,29

Из приведённой таблицы видно, что критические значения параметра λ в общем случае для второго типа граничных условий (1.2) во много больше, чем для первого.

Значения длительных критических сил получим соответственно, если данные табл.1 умножим на $\dfrac{H}{E}$ (H – длительный модуль).

Для подвижной нагрузки, соответственно, есть необходимость понятия критического времени. Один из принятых в литературе подходов является условие $f'=0$. Это условие сводится к тому, что в (1.8) $\operatorname{Det}Y=0$ (но уже $a'_m\neq 0$):

$$\begin{gathered} 2m^2f_n+\lambda\Big\{\left[a_0+a_{2m}+\alpha\left(b_0+b_{2m}\right)\right]mf_m+ \\ +\sum_{q=1}^{m-1}\left[a_{m-q}+a_{m+q}+\alpha\left(b_{m-q}+b_{m+q}\right)\right]qf_q+ \\ +\sum_{q=m+1}^{m-1}\left[a_{q-m}+a_{q+m}+\alpha\left(b_{q-m}+b_{q+m}\right)\right]qf_q\Big\}=0 \end{gathered} \tag{1.16}$$

Для первой задачи (1.11) коэффициенты будут $a_0 = -2x_1$, $a_m = -\frac{2}{m\pi}\sin m\pi x_1$,

$b_0 = -2$, $\quad b_m = -2\cos m\pi x_1$, $x_1 = \frac{ct}{l}$.

В табл. 2 приведены некоторые значения λ (здесь уже $\lambda = \frac{P_{k0}}{P'_{\text{кр}}}$, $\bar{P}_{\text{кр}} = \frac{HJ\pi^2}{l^2}$) для некоторых α и x_1, а $\alpha = cn/l$ (n – время релаксации).

Из табл.2 видно, что чем больше n, тем меньше критическая сила (время).

Таблица 2

x_1 \ α	0	0,3	0,5
0,5	1,891	1,819	1,685
0,6	1,831	1,459	1,231
0,7	1,662	1,149	0,928
0,8	1,437	0,909	0,711
0,9	1,209	0,718	0,547
1,0	1	0,565	0,423

2. Устойчивость цилиндрической оболочки будем изучать при граничных условиях, т.е. в данном случае имеются такие условия:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^3} = u = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = l \tag{2.1}$$

Одномерные уравнения осесимметричного начального состояния –

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + v\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \\ \tilde{D}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^4} + \frac{\tilde{E}h}{R\left(1-v^2\right)}\left(\frac{w_0}{R} + v\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = -Z\left(x\right) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Решения системы (2.2) должны удовлетворять первым трём условиям (2.1). Если искать его в виде рядов, удовлетворяющих этим условиям:

$$\begin{gathered} u_0 = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m \sin\lambda_m x,\ w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos\lambda_m x \\ Z\left(x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\lambda_m x,\ \lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

то для начальных усилий получим выражения:

$$\begin{gathered} T_1^0 = -vC_0,\ \mathrm{T}_2^0 = -C_0 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{KC_m}{K+\lambda_m^4} \\ C_m = Ra_m,\ K = \frac{12\left(1-v^2\right)}{R^2h^2}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Заметим, что при классических граничных условиях свободного опирания $T_1^0 \equiv 0$. Решение уравнения устойчивости

$$\tilde{D}\Delta^4 w+\frac{\tilde{E}h}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\Delta^2\left(T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0 \tag{2.5}$$

будем искать в виде

$$w=\cos\mu_k y\sum_{m=0}^{m} f_m\cos\lambda_m x,\ \mu_k=\frac{k}{R},\ \lambda_m=\frac{m\pi}{R}\ , \tag{2.6}$$

удовлетворяющем условиям (2.1).

Тогда, бесконечная система, аналогичная (1.9), будет

$$Af'+Bf=0 \tag{2.7}$$

$$a_{mm}=EL_{mk}+a_m\ ,\ a_{mp}=\frac{1}{2}\mu_k^2\begin{cases}C_{m-p}+C_{m+p},\ p<m\\ C_{p-m}+C_{m+p}\ ,\ p>m\end{cases}$$

$$L_{mk}=\frac{h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\Delta_{mk}^2+\frac{h}{R^2}\frac{\lambda_m^4}{\Delta_{mk}^2},\ a_m=\left(\nu\lambda_m^2+\mu_k^2\right)C_0+\frac{1}{2}\mu_k^2 C_{mm}$$

$$b_{mm}=\frac{H}{n}L_{mk}+\frac{1}{n}a_m+ad_m,\ b_{mk}=\frac{1}{n}a_{mk}+a'_{mk}\ ,\ \Delta_{mk}^2=\left(\lambda_m^2+\mu_k^2\right)^2$$

Таблица 3

	$\pi R/l$					
	1,25			1,5		
	h/R					
x_1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
1,0	0,0390	0,0121	0,0037	0,0531	0,0145	0,0045
	0,0745	00232	0,0071	0,1023	0,0276	0,0087
0,9	0,0474	0,0148	0,0046	0,0648	0,0176	0,0056
	0,0806	0,0253	0,0076	0,1109	0,0298	0,0093
0,8	0,0568	0,0179	0,0054	0,0779	0,0212	0,0067
	0,0862	0,0269	0,0082	0,1190	0,0320	0,0101
0,7	0,0660	0,0209	0,0064	0,0909	0,0246	0,0077
	0,0912	0,0287	0,0087	0,1260	0,0338	0,0106
0,6	0,0724	0,0227	0,0070	0,0996	0,0260	0,0085
	0,0960	0,0301	0,0092	0,1330	0,0356	0,0112
0,5	0,0748	0,0234	0,0070	0,1024	0,0276	0,0086
	0,1020	0,0320	0,0096	0,1415	0,0377	0,0118
0,4	0,0754	0,0235	0,0071	0,1037	0,0278	0,0087
	0,1115	0,0351	0,0106	0,1554	0,0413	0,0131
0,3	0,0798	0,0249	0,0076	0,1107	0,0295	0,0093
	0,1299	0,0412	0,0123	0,1823	0,0484	0,0153
0,2	0,0967	0,0306	0,0092	0,1354	0,0359	0,0114
	0,1720	0,0549	0,0163	0,2432	0,0645	0,0204
0,1	0,1617	0,0521	0,0154	0,2296	0,0609	0,0193
	0,3102	0,1004	0,0298	0,4431	0,1171	0,0373

Для случая свободного опирания краёв оболочки бесконечная система будет выглядеть так, как и в (1.8) и (1.9).

Здесь также рассмотрим два примера.

1) Постоянное давление q_0 распространяется от одного конца оболочки в другой с постоянной скоростью c :

$$Z = \begin{array}{l} -q_0 \, , \, 0 \le x \le ct \\ 0 \, , \, ct \le x \le l \end{array} \tag{2.8}$$

Коэффициенты a_m, входящие в выражения начальных усилий по (2.4), будут:

$$a_0 - q_0 x_1 \ , \ a_k = q_0 \frac{2}{k\pi} \sin \lambda_n x_1 \, , \ x_1 = \frac{ct}{l} \tag{2.9}$$

2) Вторая задача, когда давление в виде

$$Z = \begin{cases} -q_0 \left(1 - \dfrac{x}{ct}\right), & 0 \le x \le ct \\ 0 & , \ ct \le x < l \end{cases} \tag{2.10}$$

$$a_0 = -\frac{1}{2} q_0 x_1 \ , \ a_k = -q_0 \frac{2}{(k\pi)^2 x_1} \left(1 - \cos \lambda_k x_1\right) \tag{2.11}$$

В табл.3 приведены критические значения для безразмерного параметра $\lambda = \dfrac{q_0}{E} \left(\dfrac{h}{R}\right)^2$ при различных геометрических параметрах.

В каждой клетке первые числа относятся к (2.9), а вторые – к (2.11).

В общем, ничего неожиданного. Критический параметр для второй задачи больше, чем для первой и с увеличением интервала действия нагрузки он уменьшается (зависимость нелинейная).

Заключение. В задачах устойчивости и колебаний балки есть пара граничных условий, при которых одинаковыми получаются критические силы и собственные частоты (формы различные). Однако, если начальное напряжённое состояние неоднородное, то совершенно различными получаются эти величины. Здесь рассматриваются именно такие две задачи устойчивости для балки и цилиндрической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрация в технике. Т.I. М.: Машиностроение, 1978. 352с.
2. Белубекян М.В. Локализованная неустойчивость сжатой пластинки. Проблема механики тонких деформируемых тел. //В сб., посв. 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С.61-67.
3. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. //Изв. НАН Армении. Механика. 1991. Т.44. №4. С.3-12.

Сведения об авторах:

Мовсисян Лаврентий Александрович,
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2,**Тел.:** (+37410). 56821
E-mail: mechins@sci.am

Нерсисян Гриша Геворкович, К.ф.н., доцент, Ар.Г.А.У.
Адрес: г.Ереван, пр.Азатутян, 7^б, кв.37.**Тел.:** 20-68-79.

Поступила в редакцию 29.04.2015