ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 536.21; 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕСВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Геворкян Р.С.

Ключевые слова: Неклассическая краевая задача, асимптотический метод, внутренняя задача.

Keywords: The non-classical boundary value problem, asymptotic method, the internal task.

Բանալի բառեր. Ոչ դասական եզրայինխնդիր, ասիմպտոտիկ եղանակ, ներքին խնդիր:

Գևորգյան Ռ.Ս.

Երկշերտ սալի ստացիոնար ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության ոչ կապակցված ոչ դասական եզրային պայմաններով խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները

Հաշվի առնելով ոչ դասական խնդիրների կիրառական նշանակությունը երկշերտ օրթոտրոպ սալի համար ասիմպտոտիկ եղանակով կառուցվում են ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության ոչ կապակցված ոչ դասական եզրային պայմաններով խնդիրների լուծումները: Բերված են վերլուծական օրինակներ:

Gevorgyan R.S.

Asymptotic solutions of non-stationary problems of thermal conductivity and thermoelasticity with nonclassical boundary conditions for the two-layer plates

The practical importance of the nonclassical solutions is well known. The solutions of the nonclassical boundary value problems of stationary heat conduction and nonconnected thermoelasticity theory are constructed for the orthotropic two-layer plates. Examples are given with their analysis.

В последние годы проявляется повышенный интерес к неклассическим краевым задачам математической физики, когда по какой-либо причине на одной части поверхности области, занимаемой материальным телом, заданы граничные условия больше,чем необходимы для краевой задачи данного класса, а на другой части – меньше, чем необходимы или вообще не заданы [1–5]. Возникновение таких задач, в частности, связано с изучением НДС литосферных плит Земли [6].

Одним из эффективных методов решения подобных задач является асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений [7,8]. В настоящей работе асимптотическим методом строятся общие интегралы в виде рекуррентных формул для уравнений стационарной задачи теплопроводности и несвязанной теории термоупругости. Удовлетворив неклассическим смешанным граничным условиям, однозначно определены все функции интегрирования, позволяющие вычислить температурную функцию, а также компоненты тензора напряжений и вектора перемещения двухслойной ортотропной пластины переменной толщины. Приведён пример. Задача, в частности, может моделировать напряжённо-деформированное состояние земной коры в зоне коллизии тектонических плит Земли [1,2,6,9].

1. Постановка краевых задач и общий интеграл разрешающих уравнений.

Рассмотрим двухслойный пакет пластин из ортотропных материалов, слои которого ограничены гладкими непересекающимися поверхностями и относительно выбранной прямоугольной системы координат Oxyz удовлетворяют условиям $\varphi_1(x,y) > \varphi_0(x,y) > \varphi_2(x,y),\ h = \operatorname{Sup}|\varphi_1 - \varphi_2| << l,\ -\infty < (x,y) < \infty$, где $l-$ некоторый продольный характерный размер тонкого пакета.

Пусть на лицевой поверхности $z = \varphi_1(x,y)$ двухслойного пакета заданы неклассические граничные условия задачи стационарной теплопроводности (и изменение температуры, и плотность потока теплоты):

$$z = \varphi_1(x,y):\quad \theta = \theta^+,\quad \theta = T - T_0$$
$$-\frac{q_x}{\Lambda_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{q_y}{\Lambda_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{q_z}{\Lambda_1} = q^+_{\vartheta_1}(x,y),\quad q_x = -\lambda_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x}\ (x,y,z;\,1,2,3) \tag{1.1}$$

а также неклассические механические граничные условия одновременно и первой, и второй краевых задач теори упругости:

$$z = \varphi_1(x,y):\ \frac{\sigma_{jx}}{\Lambda_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\sigma_{jy}}{\Lambda_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\sigma_{jz}}{\Lambda_1} = 0$$
$$u_x(\varphi_1) = u_x^+\ \ (x,y,z),\quad \Lambda_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^2},\, i = 0,1,2 \tag{1.2}$$

противоположной лицевой поверхности $z = \varphi_2(x,y)$ пакета никакие условия не заданы. (Задачи с такими или аналогичными граничными условиями считаются неклассическими краевыми задачами теории упругости). Доказана, что всегда существует классическая краевая задача теории упругости, решение которой совпадает с решением неклассической задачи [6]. Требуется определить температурное поле и напряжённо-деформированное состояние пакета, когда между слоями выполняются условия полного теплового

$$z = \varphi_0(x,y):\ \theta^{(1)}(\varphi_0) = \theta^{(2)}(\varphi_0)$$
$$\left(q_x^{(1)} - q_x^{(2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \left(q_y^{(1)} - q_y^{(2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} - \left(q_z^{(1)} - q_z^{(2)}\right) = 0 \tag{1.3}$$

а также полного механического

$$z = \varphi_0:\ \left(\sigma_{jx}^{(1)} - \sigma_{jx}^{(2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \left(\sigma_{jy}^{(1)} - \sigma_{jy}^{(2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} +$$
$$+\sigma_{jz}^{(1)} - \sigma_{jz}^{(2)} = 0,\ \ u_j^{(1)} = u_j^{(2)},\, j = x,y,z \tag{1.4}$$

контактов краевых задач теории упругости.

Для решения поставленных краевых задач приведём уравнения и соотношения теории термоупругости ортотропного тела с учётом объёмных сил $\vec{P} = \{P_x, P_y, P_z\}$ и изменения температурного поля $\theta = T - T_0$ по модели Дюгамеля – Неймана

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + P_x = 0,\frac{\partial u_x}{\partial x} = e_1 + \beta_{11}\theta,\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = a_{44}\sigma_{yz}$$
$$e_m = a_{1m}\sigma_{xx} + a_{2m}\sigma_{yy} + a_{3m}\sigma_{zz},\quad m = 1,2,3\ \ (y,z,x;4,5,6) \tag{1.5}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, u_x, u_y, u_z – компоненты вектора перемещения, a_{ij} – коэффициенты упругой податливости, β_{jj} – коэффициенты теплового линейного расширения.

Допускается возможное медленное изменение во времени заданных функций, при этом не вызывая ощутимых динамических эффектов в пакете слоёв. Исходя из этого, здесь и в дальнейшем в формулах и соотношениях время t не будет фигурировать. Приведём также уравнение стационарной задачи теплопроводности ортотропного тела [10,11]

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}=W,\ \ q_x=-\lambda_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x}\ \ \left(x,y,x;\,1,2,3\right) \tag{1.6}$$

где q_x, q_y, q_z – компоненты вектора плотности теплового потока, $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$ – коэффициенты теплопроводности, W – заданная плотность источников тепла.

В уравнениях и соотношениях (1.5), (1.6) перейдём к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам:

$$\xi=\frac{x}{l},\ \ \eta=\frac{y}{l},\ \zeta=\frac{z}{h}=\varepsilon^{-1}\frac{z}{l},\ u=\frac{u_x}{l},\ v=\frac{u_y}{l},\ w=\frac{u_z}{l},\ \varepsilon=\frac{h}{l} \tag{1.7}$$

где l – некоторый продольный характерный размер слоёв.

Подставив (1.7) в (1.5), (1.6), получаем сингулярно-возмущённую геометрическим малым параметром ε систему уравнений и соотношений, асимптотическое решение которых согласно [7,8] складывается из двух решений. Первое из них, называемое внутренним решением, удовлетворяет граничным условиям, заданным на лицевых поверхностях пакета. Второе решение, называемое решением задачи пограничного слоя, на лицевых поверхностях пластины удовлетворяет соответствующим однородным (нулевым) условиям, а в сумме с внутренним решением должно удовлетворить граничным условиям, заданным на торцах пакета. Поскольку рассматриваются ортотропные слои (пластины бесконечных размеров), следовательно, решается только внутренняя задача, которое ищется в виде асимптотического разложения

$$Q^{(i)}\left(x,y,z\right)=\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{s+\chi_Q}Q^{(i,s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right),\ Q^{(i,m)}=0,\ m<0,\ i=1,2 \tag{1.8}$$

где $Q^{(i)}$ – любая из неизвестных компонент вектора перемещения u_j или тензора напряжений σ_{ij}; χ_Q характеризует асимптотический порядок соответствующей величины, причём $\chi_u=0$ для всех перемещений, $\chi_\sigma=-1$ – для всех напряжений, а для температурной функции и компонент вектора плотности теплового потока должны быть соответственно $\chi_\theta=-1,\ \chi_{q_x}=\chi_{q_y}=-1,\ \ \chi_{q_z}=-2$.

Одновременно представим заданные объёмные силы и плотности источников тепла W в виде асимптотичеких разложений:

$$P_x=\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{-2+s}l^{-1}P_x^{(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\ \ (x,y,z),\ W=\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{-3+s}l^{-1}W^{(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)$$
$$Q^{(0)}=Q,\ Q^{(s)}=0,\ s\neq 0,\ Q=\left\{P_j,W\right\} \tag{1.9}$$

Это означает, что объёмные силы и источник тепла могут влиять на напряжённо-деформированное состояние пакета слоёв, начиная с первого шага итерационного процесса, если их асимптотические порядки будут, соответственно, ε^{-2} и ε^{-3}.

Подставив (1.8), (1.9) в систему сингулярных уравнений и приравняв коэффициенты при $\varepsilon^s\left(s=0,1,2,\ldots,S\right)$ в левых и правых частях уравнений, получим непротиворечивую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.8), что свидетельствует о правильности выбранной асимптотики. После интегрирования полученной системы разрешающих уравнений для температурной функции, компонент тензора напряжений и вектора перемещения получаются рекуррентные формулы, которым присвоим номер соответствующего слоя ($i=1,2$) пакета и представим в размерных координатах и перемещениях. Для температурной функции будет:

$$\theta_i^{(s)}=zA^{(i,s)}+B^{(i,s)}+\frac{1}{\lambda_{33}^{(i)}}\Psi^{(i,s)}$$
$$\Psi^{(i,s)}=-\int_0^z\left[\int_0^\beta\left(\lambda_{11}^{(i)}\frac{\partial^2\theta_i^{(s-2)}}{\partial x^2}+\lambda_{22}^{(i)}\frac{\partial^2\theta_i^{(s-2)}}{\partial y^2}+W_i^{(s)}\right)d\alpha\right]d\beta \tag{1.10}$$

и для компонент тензора напряжений и вектора перемещения

$$\sigma_{jz}^{(i,s)}=\sigma_{jz0}^{(i,s)}(x,y)+\sigma_{jz*}^{(i,s)}(x,y,z),\quad j=x,y,z$$
$$\sigma_{xx}^{(i,s)}=A_{13}^{(i)}\sigma_{zz0}^{(i,s)}(x,y)+\sigma_{xx*}^{(i,s)}(x,y,z)\ (xx,yy;\,1,2)$$
$$u_x^{(i,s)}=u_{x0}^{(i,s)}\left(x,y\right)+zA_{55}^{(i)}\sigma_{xz0}^{(i,s)}+u_{x*}^{(i,s)}(x,y,z)\quad (x,y,z;5,4,3),\ i=1,2$$
$$\sigma_{xy}^{(i,s)}=\frac{1}{a_{66}^{(i)}}\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial y}+\frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial x}\right),\ \Delta^{(i)}=a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)}-a_{12}^{(i)2}$$
$$\sigma_{jz*}^{(i,s)}=-\int_0^z\left(\frac{\partial\sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{jy}^{(i,s-1)}}{\partial y}+P_j^{(i,s)}\right)dz,\quad j=x,y,z$$
$$\sigma_{xx*}^{(i,s)}(x,y,z)=A_{13}^{(i)}\sigma_{zz*}^{(i,s)}+B_{11}^{(i)}\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x}+B_{12}^{(i)}\frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial y}+\gamma_{11}^{(i)}\theta_i^{(s)}\ \left(x,y;1,2\right)$$
$$u_{x*}^{(i,s)}=\int_0^z\left(a_{55}^{(i)}\sigma_{xz*}^{(i,s)}-\frac{\partial u_z^{(i,s-1)}}{\partial x}\right)dz\quad (x,y;5,4) \tag{1.11}$$
$$u_{z*}^{(i,s)}=\int_0^z\left(A_{33}^{(i)}\sigma_{zz*}^{(i,s)}-A_{13}^{(i)}\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x}-A_{23}^{(i)}\frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial y}+\gamma_{33}^{(i)}\theta_i^{(s)}\right)dz$$

$$A_{33}^{(i)} = a_{13}^{(i)} A_{13}^{(i)} + a_{23}^{(i)} A_{23}^{(i)} + a_{33}^{(i)}, \qquad A_{kk}^{(i)} = a_{kk}^{(i)},\ k = 4,5,6$$

$$A_{j3}^{(i)} = -a_{13}^{(i)} B_{j1}^{(i)} - a_{23}^{(i)} B_{j2}^{(i)},\ \ j = 1,2;\ \ B_{11}^{(i)} = \frac{a_{22}^{(i)}}{\Delta^{(i)}},\ B_{12}^{(i)} = -\frac{a_{12}^{(i)}}{\Delta^{(i)}} \ \ (1,2)$$

$$\gamma_{11}^{(i)} = \frac{a_{12}^{(i)}\beta_{22}^{(i)} - a_{22}^{(i)}\beta_{11}^{(i)}}{\Delta^{(i)}} \quad (1,2), \quad \gamma_{33}^{(i)} = A_{13}^{(i)}\beta_{11}^{(i)} + A_{23}^{(i)}\beta_{22}^{(i)} + \beta_{33}^{(i)}$$

Полученный общий интеграл (1.10), (1.11) системы уравнений (1.5), (1.6) содержит по восемь функций интегрирования для каждого слоя $A^{(i,s)}, B^{(i,s)}$, $\sigma_{xz0}^{(i,s)}, \sigma_{yz0}^{(i,s)}, \sigma_{zz0}^{(i,s)}, u_{x0}^{(i,s)},\ u_{y0}^{(i,s)}, u_{z0}^{(i,s)},\ \ i = 1,2$, которые однозначно определяются из неклассических тепловых и механических граничных условий (1.1)–(1.4) и условий контакта слоёв под номерами $i = 1$ и $i = 2$.

2. Решение поставленных краевых задач. Удовлетворив неклассическим граничным условиям (1.1), (1.2), получаем значения восьми функций интегрирования для первого слоя:

$$A^{(1,s)} = -\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} \left(\Lambda_1 q_{\vartheta_1}^{+(s)}(x,y) - q_{1x}^{(s-2)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - q_{1y}^{(s-2)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi^{(1,s)}}{\partial z} \right) \Bigg|_{z=\varphi_1}$$

$$B^{(1,s)} = \theta^{+(s)} - \frac{1}{\lambda_{33}} \Psi^{(1,s)}\left(x, y, \varphi_1\right) +$$

$$+ \frac{\varphi_1}{\lambda_{33}^{(s)}} \left(\Lambda_1 q_{\vartheta_1}^{+(s)}(x,y) - q_{1x}^{(s-2)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - q_{1y}^{(s-2)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi^{(1,s)}}{\partial z} \right) \Bigg|_{z=\varphi_1}$$

(2.1)

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)}(x,y) = F_x^{(s)} + \frac{A_{13}^{(1)}}{\Delta_1^{(1)}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \left(F_x^{(s)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + F_y^{(s)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + F_z^{(s)} \right) \ (x, y; 1, 2)$$

$$\sigma_{zz0}^{(1,s)}(x,y) = \frac{1}{\Delta_1^{(1)}} \left(F_x^{(s)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + F_y^{(s)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + F_z^{(s)} \right)$$

$$u_{x0}^{(1,s)}\left(x,y\right) = u_x^{+(1,s)} - A_{55}^{(1)} \varphi_1 \sigma_{xz0}^{(1,s)} - u_{x*}^{(1,s)}(z = \varphi_1) \quad (x, y; 5, 4)$$

$$u_{z0}^{(1,s)}\left(x,y\right) = u_z^{+(1,s)} - A_{33}^{(1)} \varphi_1 \sigma_{zz0}^{(1,s)} - u_{z*}^{(1,s)}(z = \varphi_1)$$

$$F_x^{(s)} = \Lambda_1 \Phi_{\vartheta x}^{+(s)} + \sigma_{xx*}^{(1,s)}\left(z = \varphi_1\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sigma_{xy}^{(1,s)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \sigma_{xz*}^{(1,s)}\left(z = \varphi_1\right) \quad (x, y)$$

$$F_z^{(s)} = \Lambda_1 \Phi_{\vartheta z}^{+(s)} + \sigma_{xz*}^{(1,s)}\left(z = \varphi_1\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sigma_{yz*}^{(1,s)}\left(z = \varphi_1\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \sigma_{zz*}^{(1,s)}\left(z = \varphi_1\right)$$

$$\Delta_k^{(i)} = 1 - A_{13}^{(i)} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right)^2 - A_{23}^{(i)} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right)^2, \ \ i = 1,2; \ \ k = 0,1,2$$

$$\Phi_{\vartheta x}^{+(0)}=\Phi_{\vartheta x}^{+},\ \ u_x^{+(1,0)}=u_x^{+},\ \Phi_{\vartheta x}^{+(s)}=u_x^{+(1,s)}=0,\ \ s\neq 0\qquad (x,y,z)$$

а из условий полного контакта слоёв (1.3),(1.4) получаем значения остальных восьми функций интегрирования для второго слоя:

$$A^{(2,s)}=\frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}}\left[\left(q_{1x}^{(s-2)}-q_{2x}^{(2,s-2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\left(q_{1y}^{(s-2)}-q_{2y}^{(s-2)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-q_{1z}^{(s)}-\frac{\partial\Psi^{(2,s)}}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=\varphi_0}$$

$$B^{(2,s)}=\varphi_0\left(A^{(1,s)}-A^{(2,s)}\right)+B^{(1,s)}+\left(\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}}\Psi^{(1,s)}-\frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}}\Psi^{(2,s)}\right)\Bigg|_{z=\varphi_0}$$

$$\sigma_{xz0}^{(2,s)}=W_{xz}^{(s)}+A_{13}^{(2)}\sigma_{zz0}^{(2,s)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\qquad (x,y;13,23)$$

$$\sigma_{zz0}^{(2,s)}=\frac{1}{\Delta_0^{(2)}}\left(W_{zz}^{(s)}+W_{xz}^{(s)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+W_{yz}^{(s)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)\tag{2.2}$$

$$u_{x0}^{(2,s)}=u_{x0}^{(1,s)}+\varphi_0\left(A_{55}^{(1)}\sigma_{xz0}^{(1,s)}-A_{55}^{(2)}\sigma_{xz0}^{(2,s)}\right)+u_{x*}^{(1,s)}(z=\varphi_0)-u_{x*}^{(2,s)}(z=\varphi_0)$$

$$(x,y,z;u,v,w;5,4,3)$$

$$W_{xz}^{(s)}=\sigma_{xz}^{(1,s)}-\sigma_{xz*}^{(2,s)}-\left(\sigma_{xx}^{(1,s-1)}-\sigma_{xx*}^{(2,s-1)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-\left(\sigma_{xy}^{(1,s-1)}-\sigma_{xy}^{(2,s-1)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\quad (x,y)$$

$$W_{zz}^{(s)}=\sigma_{zz}^{(1,s)}-\sigma_{zz*}^{(2,s)}-\left(\sigma_{xz}^{(1,s-1)}-\sigma_{xz*}^{(2,s-1)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-\left(\sigma_{yz}^{(1,s-1)}-\sigma_{yz*}^{(2,s-1)}\right)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}$$

Таким образом, рекуррентные расчётные формулы (1.10), (1.11) при учёте (2.1),(2.2) позволяют вычислить температурную функцию, а также компоненты тензора напряжений и вектора перемещения в слоях пластины с любой асимптотической точностью $O(\varepsilon^S)$ в размерных координатах и перемещениях

$$Q^{(i)}\left(x,y,z\right)=\sum_{s=0}^{S}Q^{(i,s)}\left(x,y,z\right)\ .\tag{2.3}$$

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда двухслойная пластина состоит из слоёв постоянной толщины $\varphi_k\left(x,y\right)=h_k=\mathrm{const}$, $k=0,1,2$, постоянной плотности $\rho_k=\mathrm{const}$, с источниками тепла постоянной интенсивности $W_k=\mathrm{const}$, с постоянными граничными условиями:

$$\theta_1^{+}=\mathrm{const},\ \ \left(\theta_1^{+},q_1^{+},u_j^{*+}\right),\ \ j=x,y,z\tag{2.4}$$

Ограничиваясь исходным приближением с учётом (2.1)–(2.4) по рекуррентным расчётным формулам (1.10)–(1.11), вычислив значения температурных функций, компонент векторов плотностей потоков теплоты, а также компонент тензоров напряжений и векторов перемещений для первого слоя, получим:

$$\theta_1=\theta_1^{+}+\frac{h_1-z}{\lambda_{33}^{(1)}}q_1^{+}-\frac{\left(h_1-z\right)^2}{2\lambda_{33}^{(1)}}W_1,\qquad q_1=q_1^{+}+(h_1-z)W_1$$

$$u_x^{(1)}=u_x^+,\quad u_y^{(1)}=u_y^+,\quad \sigma_{xz}^{(1)}=\sigma_{yz}^{(1)}=\sigma_{xy}^{(1)}=0$$
$$\sigma_{zz}^{(1)}=\rho_1 g\left(z-h_1\right),\quad \sigma_{xx}^{(1)}=\rho_1 g A_{13}^{(1)}\left(z-h_1\right)+\gamma_{11}^{(1)}\theta_1\quad (x,y;1,2) \tag{2.5}$$
$$u_z^{(1)}=u_z^+ +\frac{\left(z-h_1\right)^2}{2}\left(\rho_1 g A_{33}^{(1)}-\frac{\gamma_{33}^{(1)}}{\lambda_{33}^{(1)}}q^+\right)+\gamma_{33}^{(1)}\left(z-h_1\right)\left(\theta_1^+-\frac{\left(z-h_1\right)^2}{6\lambda_{33}^{(1)}}W_1\right)$$

а для второго слоя –

$$\theta_2=\theta_1^+ +\left(\frac{h_0-z}{\lambda_{33}^{(2)}}+\frac{h_1-h_0}{\lambda_{33}^{(1)}}\right)q^+ +\left[\frac{\left(h_0-z\right)\left(h_1-h_0\right)}{\lambda_{33}^{(2)}}-\frac{\left(h_1-h_0\right)^2}{2\lambda_{33}^{(1)}}\right]W_1-$$
$$-\frac{\left(h_0-z\right)^2}{2\lambda_{33}^{(2)}}W_2,\qquad q_2=q_1^+ +\left(h_1-h_0\right)W_1+(h_0-z)W_2 \tag{2.6}$$
$$\sigma_{xz}^{(2)}=\sigma_{yz}^{(2)}=\sigma_{xy}^{(2)}=0,\ \sigma_{zz}^{(2)}=\rho_1 g\left(h_0-h_1\right)+\rho_2 g\left(z-h_0\right),\ u_x^{(2)}=u_x^+$$
$$\sigma_{xx}^{(2)}=\rho_1 g A_{13}^{(2)}\left(\rho_1 g\left(h_0-h_1\right)+\rho_2 g\left(z-h_0\right)\right)+\gamma_{11}^{(2)}\theta_2,\ (x,y;1,2),\ u_y^{(2)}=u_y^+$$
$$u_z^{(2)}=\overline{u}_z+\frac{\left(z-h_0\right)^2}{2}\left(\rho_2 g A_{33}-\frac{\gamma_{33}^{(2)}}{\lambda_{33}^{(2)}}\overline{q}\right)+\gamma_{33}^{(2)}\left(z-h_0\right)\left(\overline{\theta}-\frac{\left(z-h_0\right)^2}{6\lambda_{33}^{(2)}}W_2\right)$$
$$\overline{u}_z=u_z^{(1)}(z=h_0),\ \ \overline{\theta}=\theta_1(z=h_0),\ \ \overline{q}=q_1(z=h_0)$$

Заметим, что решение (2.5), (2.6) с неклассическими граничными условиями (2.4) математически точное (замкнутое), поскольку следующие шаги итерации дают нули. Учитывая это, на поверхности $z=\varphi_2(x,y)=h_2=\text{const}$ по формулам (2.6) вычислим

$$Q^{-cal}=Q(z=h_2),\quad Q=\left\{\theta^{(2)},q^{(2)},\ \sigma_{xz}^{(2)},\sigma_{yz}^{(2)},\sigma_{zz}^{(2)},\ u_x^{(2)},u_y^{(2)},u_z^{(2)}\right\} \tag{2.7}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться [2,6,9,10], что решение (2.5), (2.6) краевой задачи с неклассическими граничными условиями (2.4) одновременно является решением задачи с классическими граничными условиями:

$$z=\varphi_1=h_1:\quad \theta_1^+=\text{const},\quad u_j^+(x,y)=\text{const},\quad j=x,y,z$$
$$z=\varphi_2=h_2:\ q_2^-=q_2^{-cal},\sigma_{xz}^{-(2)}=\sigma_{xz}^{-cal}=0\quad (x,y),\ \sigma_{xz}^{-(2)}=\sigma_{zz}^{-cal} \tag{2.8}$$

Таким образом, асимптотическое решение каждой задачи стационарной теплопроводности и несвязанной теории термоупругости с асимптотической точностью $O(\varepsilon^S)$ совпадает с решением определённой краевой задачи с классическими граничными условиями.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКНМОНРА в рамках научного проекта № SCS13–2C0009SCS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян А.Г., Тоноян В.С., Хачикян А.С. Распределение деформаций в зоне взаимодействия Аравийской и Евразиатской плит на основе данных GPS/ Изв.НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №3. С.3-13.
2. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. Mathematical simulation of collision of arabian and euroasian plates on the base of GPS data // Изв.НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №4. С.3-9.
3. Хачикян А.С. О гармонических и бигармонических задачах для уравнений с неклассическими граничными условиями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №4. С.24-31.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
5. Геворкян Р.С. Об асимптотическом анализе решений корректных и «некорректных по Адамару» задач для эллиптических уравнений математической физики (теплопроводности) // Труды II Международ. Конференции: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2010.Том I. С.182-186.
6. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity thory for plates //Proceedings of A. Razmadze Mathematikal Institute of Georgia. 2011. Vol.155, pp. 3-10.
7. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука.Физматлит, 1997. 414с.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.
9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Гулгазарян Л.Г. К определению напряжённо-деформированных состояний литосферных плит Земли на основе данных GPS систем // Доклады НАН Армении. 2012. Т.112. №3. С.264-270
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: ГИТТЛ, 1952. 392с.
11. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Геворкян Рубен Степанович− профессор, докт. ф-м.н, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА. **Тел.:** (37410) 270828; **e-mail:** gevorgyanrs@mail.ru

Поступила в редакцию 23.06.2015