

УДК 539.3

**АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ФЛАТТЕРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ В  
ДОКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ**

**Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О.**

**Ключевые слова:** Гибкие пластинки, сверхзвуковой поток газа, амплитудно-частотная зависимость.

**Key Words:** flexible plate; Supersonic gas flow; dependence amplitude-frequency.

**Բանալի բառեր**՝ ճկուն սալ, գազի գերձայնային հոսք, ամպլիտուդա- հաճախություն կապ:

**Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O.**

**Dependence «amplitude-frequency» of non-linear flutter type oscillations of plates in pre-critical stage**

The problem of nonlinear oscillations of an isotropic rectangular plate in a supersonic gas flow is examined. The study was conducted taking into account both types of nonlinearities: wind (quadratic and cubic) and geometric (cubic). It is known that nonlinear dependence of the frequency  $\theta$  on the amplitude of the oscillations  $A$  of the plate in absence of flowing stream has a hard character, i.e. with increasing amplitude the frequency increases. In this paper it is established that the presence of flowing stream may cause both quantitative and qualitative changes of the character of noted monotonically increasing dependence.

**Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ.**

**Ճկուն սալի ոչ զծային ֆլատերային տատանումների ամպլիտուդա- հաճախություն կապի բնույթը մինչկրիտիկական վիճակում**

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհասվող իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ոչ զծային տատանումների խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է երկու տիպի ոչզծայինությունների հաշվառմամբ. աերոառաձգական (քառակուսային և խորանարդային) և երկրաչափական (խորանարդային): Հայտնի է [1], որ շրջհոսող գազի բացակայության դեպքում սալի ոչ զծային տատանումների  $\theta$  հաճախությունը  $A$  ամպլիտուդայից կախված ունի կոշտ բնույթ, այսինքն՝ տատանումների ամպլիտուդայի մեծացման հետ հաճախությունն աճում է: Ներկայացվող աշխատանքում ցույց է տրված, որ շրջհոսող գազի առկայությունը բերում է նշված մոնոտոն աճող կապի ինչպես քանակական, այնպես էլ որակական փոփոխությանը:

Рассматривается задача нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Известно [1], что зависимость частоты нелинейных колебаний пластинки  $\theta$  от амплитуды  $A$  в отсутствие обтекающего потока носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частоты колебаний возрастают. В настоящей работе установлено, что присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости.

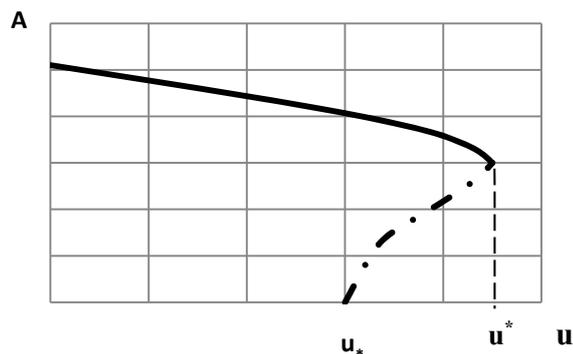
**Введение.** Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1-3] и в обзорной статье [4]. Исследования проведены как в линейной [1-7], так и в нелинейной постановке [2, 8-15]. Решением линейных задач получены те наименьшие значения  $U_{cr}$ , величины скорости обтекающего потока  $\bar{u}$ , при которых рассматриваемая аэроупругая система теряет устойчивость. Линейные задачи были решены как точно, так и приближённо (в основном, используя метод Галеркина) [2]. Нелинейные задачи решены приближёнными методами и предметом

исследований было изучение зависимости амплитуды  $A$  колебаний от скорости обтекающего потока как при докритических, так и при послекритических скоростях. Эти вопросы в задачах флаттера, когда пластинка обтекается с двух сторон с равными скоростями, детально исследованы в работах [2,13] и показано, что возможны следующие два типа нелинейных флаттерных колебаний:

а) «мягкое» возбуждение флаттера, т.е. при  $u \leq u_{cr}$  выполняется неравенство  $\partial A / \partial u < 0$ , а при  $u > u_{cr}$  невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания. Т.е. в этом случае аэродинамические силы способны поддерживать незатухающие колебания при скоростях, меньших, чем критические;

б) возбуждение флаттерных колебаний носит «жесткий» характер, т.е. при  $u < u_{cr}$  возбудить незатухающие флаттерные колебания невозможно, а при  $u \geq u_{cr}$  выполняется неравенство  $\partial A / \partial u > 0$ .

Нелинейные задачи флаттера пластин при учёте одной лишь геометрической нелинейности рассматривались также в работах [14,15]. В работах [8,9] показано, что аэродинамическая нелинейность (особенно её несимметричная квадратичная часть) приводит к появлению новых типов зависимостей «амплитуда-скорость» как в докритической стадии, так и послекритических скоростях. В частности, установлена возможность существования следующей зависимости между амплитудой нелинейных флаттерных колебаний и величиной скорости обтекающего потока (фиг.1): если постепенно увеличивать скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определённого значения скорости потока  $u^*$ , где колебания «сорвутся» и восстанавливается невозмущённое состояние пластинки. При снижении скорости невозмущённое состояние является устойчивой, пока  $u > u_*$ . При  $u = u_*$  амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определённого конечного значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает.  $u^*$  – «верхняя» критическая скорость флаттера [8,9] в том смысле, что при  $u > u^*$  невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания, а  $u_*$  – «нижняя» критическая скорость флаттера, найденная на основе линейной теории, т.е.  $u_* = u_{cr}$ . В работе [10] исследованы влияния геометрической нелинейности на зависимость «амплитуда-скорость» в случае цилиндрической панели.



Фиг.1. Зависимость «амплитуда-скорость» с «нижними» и «верхними» критическими скоростями

Показано, что зависимость амплитуды нелинейных флаттерных колебаний от величины скорости обтекающего потока может иметь многозначный характер.

При изучении задач нелинейных колебаний другим очень важным вопросом является исследование амплитудно-частотной зависимости. В случае  $u = 0$  характер зависимости амплитуды от частоты нелинейных колебаний пластинки носит жёсткий характер [1], т.е. с увеличением амплитуды частота колебаний увеличивается. Настоящая работа посвящена исследованию амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний тонкой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, т.е. изучению влияния скорости обтекающего потока на указанную зависимость. В работе [16] установлено, что присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости. В работе [17] исследована амплитудно-частотная зависимость нелинейных флаттерных колебаний в случае критического значения скорости обтекающего пластинку сверхзвукового потока. Показано, что: а) характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек; б) область изменения допустимых частот, при которых можно возбудить установившиеся флаттерные колебания, может быть как конечной, так и полубесконечной; в) переход из одного типа амплитудно-частотной зависимости к другому можно регулировать (вплоть до невозможности возбуждения подобных колебаний) соответствующим выбором геометрических и физических параметров аэроупругой системы.

В настоящей работе исследуются влияния сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных флаттерных колебаний гибкой пластинки при докритических скоростях. Показано, что помимо результатов, полученных в случае критических скоростей, здесь имеют место также следующие: а) если скорость обтекающего потока намного меньше критической скорости, то существует интервал  $[\theta_1, \theta_2]$  изменения частоты  $\theta$  такой, что если  $\theta < \theta_1$ , то невозможно возбудить флаттерные колебания. При  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  функция  $A(\theta)$  является однозначной, при  $\theta > \theta_2$  функция  $A(\theta)$  становится двузначной; б) с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка  $[\theta_1, \theta_2]$  уменьшается и стремится к нулю при  $v \rightarrow v_{cr}$ ; в) существует значение скорости обтекающего потока, начиная с которого характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек.

## 1. Постановка задачи устойчивости

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины  $h$ . Прямоугольная система координат  $\alpha, \beta, \gamma$  выбрана так, что координатная плоскость  $\alpha, \beta$  совпадает со срединной плоскостью пластинки, а координатные оси  $\alpha$  и  $\beta$  направлены по сторонам рассматриваемой пластинки. Пусть, далее, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью  $\vec{u}$ , направленной вдоль оси  $O\alpha$ . Принимаются следующие предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [18];

б) основные предположения теории гибких пластин, считая, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки [1];

в) избыточное давление газа представляется по приближённой формуле «поршневой теории» [19,20].

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пластинки [2]:

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 F + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 = 0, \quad (1)$$

$$D \Delta^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \rho_0 h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty \left[ M \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\alpha + 1}{4} M^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{\alpha + 1}{12} M^3 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^3 \right] = 0, \quad (2)$$

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad M = \frac{u}{a_\infty}, \quad a_\infty = \frac{\alpha p_\infty}{\rho_\infty},$$

$w(\alpha, \beta, t)$  – прогиб пластинки,  $M$  – число Маха,  $a_\infty$  – скорость звука для невозмущённого газа,  $\alpha$  – показатель политропы,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho_0$  – плотность материала пластинки,  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  – давление и плотность газа в невозмущённом состоянии,  $\varepsilon$  – коэффициент линейного затухания,  $F = F(\alpha, \beta, t)$  – функция напряжений.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (1)–(2) присоединяются также условия на контуре пластинки. Здесь рассматривается шарнирно опёртая по всему контуру прямоугольная пластинка ( $0 \leq \alpha \leq a$ ,  $0 \leq \beta \leq b$ ), на краях которой действуют сжимающие усилия, средние значения которых равны  $p_\alpha^0$  и  $p_\beta^0$ , соответственно. Тогда, следуя [2], граничные условия задачи принимаются в виде: при  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = a$

$$w = 0, \quad M_\alpha = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) = 0, \quad (3)$$

$$S^0 = 0, \quad T_\alpha^0 = -p_\alpha^0, \quad (4)$$

при  $\beta = 0$ ,  $\beta = b$

$$w = 0, \quad M_\beta = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) = 0, \quad (5)$$

$$S^0 = 0, \quad T_\beta^0 = -p_\beta^0, \quad (6)$$

где  $T_\alpha^0$ ,  $T_\beta^0$ ,  $S^0$  – средние значения усилий на кромках пластинки.

## 2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Приближённое решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3) и (5), будем искать в виде [2]:

$$w(\alpha, \beta, t) = f_1(t) \sin \lambda_1 \alpha \cdot \sin \mu_1 \beta + f_2(t) \sin \lambda_2 \alpha \cdot \sin \mu_1 \beta \quad (7)$$

$$\left( \lambda_i = \frac{i\pi}{a}, \mu_k = \frac{k\pi}{b} \right)$$

Подставив (7) в (1), получим линейное дифференциальное уравнение относительно функции  $F$ . Решение указанного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям (4) и (6), представляется в виде:

$$F(\alpha, \beta, t) = \frac{Eh}{4} \left[ -\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} f_1 f_2 \cos(\lambda_1 \alpha) + \frac{\mu_1^2}{8\lambda_1^2} f_1^2 \cos(\lambda_2 \alpha) + \frac{\mu_1^2}{9\lambda_1^2} f_1 f_2 \cos(\lambda_3 \alpha) + \right.$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{32\lambda_1^2} f_2^2 \cos(\lambda_4 \alpha) + \frac{9\lambda_1^2 \mu_1^2}{\Delta_{\lambda_1 \mu_2}} f_1 f_2 \cos(\lambda_1 \alpha) \cos(\mu_2 \beta) -$$

$$\left. - \frac{\lambda_1^2 \mu_1^2}{\Delta_{\lambda_3 \mu_2}} f_1 f_2 \cos(\lambda_3 \alpha) \cos(\mu_2 \beta) + \left( \frac{\lambda_1^2}{2\mu_1^2} f_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{8\mu_1^2} f_1^2 \right) \cos(\mu_2 \beta) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} (P_\alpha^0 \beta^2 + P_\beta^0 \alpha^2),$$

Здесь и в дальнейшем  $\Delta_{\lambda_i \mu_k} = (\lambda_i^2 + \mu_k^2)^2$ .

Для определения  $f_{ik}(t)$  воспользуемся уравнением (2). Подставляя (7) и найденное выражение для  $F$  в (2) и применяя метод Бубнова-Галеркина, для определения безразмерных неизвестных функций  $x_1 = f_1(t)/h$ ,  $x_2 = f_2(t)/h$  получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [2,13]:

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} k\nu x_2 + k\nu^2 \left[ \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_2^2 + \right.$$

$$\left. + \nu x_2 (\beta_{11} x_1^2 + \beta_{12} x_2^2) \right] + Qx_1 (\gamma_{11} x_1^2 + \gamma_{12} x_2^2) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3} k\nu x_1 + k\nu^2 \left[ \alpha_{21} x_1 x_2 + \right.$$

$$\left. + \nu x_1 (\beta_{21} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2) \right] + Qx_2 (\gamma_{21} x_1^2 + \gamma_{22} x_2^2) = 0.$$

Здесь, наряду с безразмерным временем  $\tau = \omega_1 t$ , введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_i^2 &= \frac{1}{\rho_0 h} \left[ D(\lambda_i^2 + \mu_1^2)^2 - \lambda_i^2 P_\alpha^0 - \mu_1^2 P_\beta^0 \right] \quad (i=1,2), \\ k &= \frac{4\mathfrak{a}p_\infty}{\rho_0 \omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{h}{16\rho_0 \omega_1^2}, \\ v &= M \frac{h}{a}, \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{2}{\omega_1} \left( \varepsilon + \frac{\mathfrak{a}p_\infty}{\rho_0 h a_\infty} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{2}{9}(\mathfrak{a}+1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45}(\mathfrak{a}+1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45}(\mathfrak{a}+1), \\ \beta_{11} &= \beta_{21} = \frac{\pi^2}{40}(\mathfrak{a}+1), \quad \beta_{22} = \frac{11\pi^2}{70}(\mathfrak{a}+1), \quad \beta_{12} = -\frac{9\pi^2}{70}(\mathfrak{a}+1), \\ \gamma_{11} &= Eh(\lambda_1^4 + \mu_1^4), \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 4\gamma_{11} + Eh \left( \frac{81}{\Delta_{\lambda_1 \mu_2}} + \frac{1}{\Delta_{\lambda_3 \mu_2}} \right) \lambda_1^4 \mu_1^4, \\ \gamma_{22} &= Eh(\lambda_2^4 + \mu_1^4), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – частоты первой и второй формы малых собственных колебаний пластинки,  $v$  – приведённый параметр скорости.

### 3. Решение линейной задачи

Решению нелинейной задачи, как правило, предшествует анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти критическое значение параметра  $v = v_{cr}$  (следовательно, и критическое значение скорости обтекающего потока  $u_{cr} = ah^{-1}v_{cr}a_\infty$  или  $M_{cr} = ah^{-1}v_{cr}$ ), при котором невозмущённое состояние пластинки становится неустойчивым относительно малых возмущений, и б) указанное критическое значение  $u_{cr}$  (или  $M_{cr}$  или  $v_{cr}$ ) будет необходимым и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке.

Итак, соответствующая (8) линейная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} k v x_2 &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3} k v x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Представляя решение системы (11) в виде

$$x_1 = y_1 e^{\lambda \tau}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda \tau},$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\lambda^4 + 2\chi\lambda^3 + (\gamma^2 + 1 + \chi^2)\lambda^2 + \chi(\gamma^2 + 1)\lambda + \gamma^2 + \frac{4}{9}k^2v^2 = 0.$$

Невозмущённая форма пластинки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица [21], записываются в виде:

$$\chi > 0, \quad \chi(1 + \gamma^2) > 0,$$

$$(\gamma^2 - 1)^2 + 2\chi^2(1 + \gamma^2) - \frac{16}{9}k^2v^2 > 0.$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства следует, что в случае малых значений  $v$ , все характеристические показатели  $\lambda$  лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение  $w \equiv 0$  асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям.

Значение параметра  $v = v_{cr}$ , при котором два из характеристических показателей становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическими, соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому, из третьего неравенства получается следующая формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластинки [2]:

$$v_{cr} = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{k} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}}. \quad (12)$$

Принимая  $v = v_{cr}$  из характеристического уравнения, найдём следующее значение  $\theta_{cr}$  частоты колебания пластинки при линейном флаттере ( $\lambda_{cr} = \pm i\theta_{cr}$ )

$$\theta_{cr}^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 1). \quad (13)$$

Формулы, аналогичные (12) и (13), получены многими авторами (см. литературу, приведённую в [2,4]) и являются хорошими приближениями для  $v_{cr}$  и  $\theta_{cr}$ , определяемыми на основе точного решения [4-7, 22].

#### 4. Исследование нелинейной задачи

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (8). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости гибких пластин, нагруженных консервативными силами, наличием членов с квадратичными нелинейностями. Указанные члены, имеющие аэродинамическое происхождение, характеризуют несимметричность нелинейности, присущую к задачам устойчивости гибких оболочек. Поэтому, приближённое периодическое решение системы (8) будем искать в виде [10]:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \theta\tau + B_1 \sin \theta\tau + C_1 + \dots, \\ x_2 &= A_2 \cos \theta\tau + B_2 \sin \theta\tau + C_2 + \dots \quad (\theta = \omega/\omega_1) \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $A_i, B_i, C_i$  ( $i=1,2$ ) – неизвестные постоянные;  $\omega$  – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (14) отличается от существующих [2,13] наличием свободных членов  $C_i \neq 0$ , присутствие которых характерно задачам с квадратичной нелинейностью [10,23].

Подставим решение (14) в систему (8) и приравняем к нулю коэффициенты при свободном члене,  $\cos \theta\tau$  и  $\sin \theta\tau$  (члены, содержащие гармоники, пренебрегаются).

Полученная при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённого решения этой системы предполагается, что [10]: а) затухание системы достаточно мало ( $\chi|B_i| \ll |A_i|$ ,  $|B_i| \ll |A_i|$ ; ( $i = 1, 2$ )), и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущённого ( $|A_i| \gg |C_j|$ ;  $j = 1, 2$ ). Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведениями величин  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$ , указанная нелинейная система представится следующими подсистемами:

уравнения, полученные приравнением к нулю свободных членов:

$$C_1 - \frac{2}{3}kvC_2 + \frac{1}{2}kv^2(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2) + kv^3A_2(\beta_{11}A_1C_1 + \beta_{12}A_2C_2) + \\ + \frac{1}{2}kv^3C_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + QA_1(\gamma_{11}A_1C_1 + \gamma_{12}A_2C_2) + \\ + \frac{1}{2}QC_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0,$$

$$\gamma^2C_2 + \frac{2}{3}kvC_1 + \frac{1}{2}kv^2\alpha_{21}A_1A_2 + kv^3A_1(\beta_{21}A_1C_1 + \beta_{22}A_2C_2) + \\ + \frac{1}{2}kv^3C_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + QA_2(\gamma_{21}A_1C_1 + \gamma_{22}A_2C_2) + \\ + \frac{1}{2}QC_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0;$$

уравнения, полученные приравнением к нулю коэффициентов при  $\cos \theta\tau$ :

$$(1 - \theta^2)A_1 + \chi\theta B_1 - \frac{2}{3}kvA_2 + 2kv^2(\alpha_{11}A_1C_1 + \alpha_{12}A_2C_2) + \\ + \frac{3}{4}kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0,$$

$$(\gamma^2 - \theta^2)A_2 + \chi\theta B_2 + \frac{2}{3}kvA_1 + \alpha_{21}kv^2(A_1C_2 + A_2C_1) + \\ + \frac{3}{4}kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0;$$

уравнения, полученные приравнением к нулю коэффициентов при  $\sin \theta\tau$ :

$$(1-\theta^2)B_1 - \frac{2}{3}kvB_2 - \chi\theta A_1 + \frac{1}{2}kv^3\beta_{11}A_1A_2B_1 + \\ + \frac{1}{4}kv^3(\beta_{11}A_1^2 + 3\beta_{12}A_2^2)B_2 + \frac{1}{4}Q(3\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2)B_1 + \\ + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_1A_2B_2 = 0,$$

$$(\gamma^2 - \theta^2)B_2 - \chi\theta A_2 + \frac{2}{3}kvB_1 + \frac{1}{4}kv^3(3\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2)B_1 + \\ + \frac{1}{2}kv^3\beta_{22}A_1A_2B_2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1A_2B_1 + \\ + \frac{1}{4}Q(\gamma_{21}A_1^2 + 3\gamma_{22}A_2^2)B_2 = 0.$$

Третья подсистема учитывает эффект демпфирования. Согласно принятому предположению о малости затухания, указанная подсистема имеет следующее приближённое решение:

$$B_1 \approx 0, \quad B_2 \approx 0 \quad \text{при} \quad \chi \approx 0$$

Пользуясь первой подсистемой, выразим  $C_1$  и  $C_2$  через  $A_1$  и  $A_2$  (см. (16)).

Тогда, вторая подсистема, определяющая характеристики  $A_1$  и  $A_2$  амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы в зависимости от параметров  $\theta$  и  $v$ , при  $\chi \approx 0$  принимает вид:

$$A_1(1-\theta^2) - \frac{2}{3}kvA_2 + 2kv^2\alpha_{11}A_1C_1 + 2kv^2\alpha_{12}A_2C_2 + \\ + \frac{3}{4}kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0, \\ A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3}kvA_1 + kv^2\alpha_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) + \\ + \frac{3}{4}kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0. \quad (15)$$

Здесь

$$C_1 = -\frac{kv^2}{2\Delta} [(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_2 - \alpha_{21}A_1A_2\Delta_4] \\ C_2 = -\frac{kv^2}{2\Delta} [\alpha_{21}A_1A_2\Delta_1 - (\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_3] \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 1 + \frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2 + kv^3\beta_{11}A_1A_2 \\ \Delta_2 &= \gamma^2 + kv^3\beta_{22}A_1A_2 + \frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2 \\ \Delta_3 &= \frac{2}{3}kv + \frac{3}{2}kv^3\beta_{21}A_1^2 + \frac{1}{2}kv^3\beta_{22}A_2^2 + Q\gamma_{21}A_1A_2 \\ \Delta_4 &= -\frac{2}{3}kv + \frac{3}{2}kv^3\beta_{12}A_2^2 + \frac{1}{2}kv^3\beta_{11}A_1^2 + Q\gamma_{12}A_1A_2 \\ \Delta &= \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4.\end{aligned}$$

Отметим [2], что в частном случае, когда  $v$  находится в достаточно малой окрестности  $v_{cr}$ , то  $A_1 \approx -A_2$ . Действительно, из третьей подсистемы после линеаризации (учитывая достаточную малость затухания) получается:

$$\begin{aligned}(1 - \theta^2)B_1 - \frac{2}{3}kvB_2 - \chi\theta A_1 &= 0, \\ (\gamma^2 - \theta^2)B_2 + \frac{2}{3}kvB_1 - \chi\theta A_2 &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Имея в виду, что на границе области флаттера  $v = v_{cr}$  и  $\theta = \theta_{cr}$ , из (12), (13) и (17) находим:

$$\chi\theta_{cr}A_1 = \frac{1 - \gamma^2}{2}(B_1 + B_2), \quad -\chi\theta_{cr}A_2 = \frac{1 - \gamma^2}{2}(B_1 + B_2);$$

Следовательно,  $A_1 \approx -A_2$ , если  $v$  достаточно близко к  $v_{cr}$  и  $\theta$  к  $\theta_{cr}$ .

Исследуем нелинейную систему (15) в двух случаях:  $v = 0$  и  $v < v_{cr}$ .

#### 4.1. Характер амплитудно-частотной зависимости в отсутствии обтекающего потока

Система (15) в этом случае ( $v = 0$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned}A_1(1 - \theta^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) &= 0, \\ A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) &= 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Легко заметить, что  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$  является решением этой системы (тривиальное решение). Рассмотрим вопрос существования нетривиальных решений. Здесь возможны три случая:

- 1)  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 = 0$ ,
- 2)  $A_1 = 0$ ,  $A_2 \neq 0$ ,
- 3)  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 \neq 0$ .

1) *Случай*  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 = 0$ . Из первого уравнения системы (18) в этом случае имеем (второе уравнение удовлетворяется) следующую известную [1] зависимость

между частотой и амплитудой нелинейных колебаний рассматриваемого типа ( $w = f_1(t) \sin \lambda_1 x_1 \cdot \sin \mu_1 x_2$ ):

$$1 - \theta^2 + \frac{3}{4} Q \gamma_{11} A_1^2 = 0,$$

которое показывает, что: а) при  $\theta \leq 1$  возбудить собственные установившиеся колебания невозможно, б) при  $\theta \geq 1$  амплитудно-частотная зависимость, учитывая, что  $\gamma_{11} > 0$ ,  $Q > 0$ , имеет «жесткий» характер и представляется в виде:

$$\theta^2 = 1 + \frac{3}{4} Q \gamma_{11} A_1^2. \quad (19)$$

Формула (19) с учётом (9), (10) показывает, что амплитуда нелинейных собственных колебаний пластинки зависит только от отношения  $a/b$ .

2) *Случай*  $A_1 = 0$ ,  $A_2 \neq 0$ . Характер амплитудно-частотной зависимости аналогичен предыдущему случаю. Помимо этого, вместо (19) имеем следующее представление:

$$\theta^2 = \gamma^2 + \frac{3}{4} Q \gamma_{22} A_2^2, \quad (20)$$

которое показывает, что частота собственных нелинейных колебаний рассматриваемого типа ( $w = f_2(t) \sin \lambda_2 t \cdot \sin \mu_1 t$ ) больше  $\gamma$  ( $\gamma = \omega_2/\omega_1$ ).

3) *Случай*  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 \neq 0$ . Из системы (18) видно, что она может иметь ненулевое решение только при  $\theta > \gamma$ . С учетом этого, указанная система имеет следующее решение:

$$A_1^2 = \frac{3}{4Q} \left[ \gamma_{22} (\theta^2 - 1) + \gamma_{12} (\gamma^2 - \theta^2) \right] \frac{1}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \quad (21)$$

$$A_2^2 = \frac{3}{4Q} \left[ \gamma_{11} (\theta^2 - \gamma^2) + \gamma_{21} (1 - \theta^2) \right] \frac{1}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2},$$

В силу (10), легко заметить, что  $\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2 < 0$  (и равно нулю, когда  $\mu_1 = 0$  ( $b \rightarrow \infty$ )). Следовательно, формулы (21) имеют место, если:

$$\gamma_{22} (\theta^2 - 1) + \gamma_{12} (\gamma^2 - \theta^2) < 0,$$

$$\gamma_{11} (\theta^2 - \gamma^2) + \gamma_{21} (1 - \theta^2) < 0$$

отсюда:

$$\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}} (\theta^2 - 1) < \theta^2 - \gamma^2 < \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} (\theta^2 - 1). \quad (22)$$

Имея в виду, что  $\gamma > 1$  и  $\gamma_{12} > \gamma_{11}$ , замечаем, что  $\theta^2 - \gamma^2 < \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} (\theta^2 - 1)$ . Что

касается левой части неравенства (22), то оно имеет место, если

$$\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}} < 1. \quad (23)$$

Соотношение  $\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}}$  зависит только от  $\frac{a}{b}$  и неравенство (23) имеет место, если

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 2$ . Если же  $\gamma_{22} > \gamma_{11}$ , то возбудить нелинейные колебания рассматриваемого типа ( $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 \neq 0$ ) невозможно.

Таким образом, при отсутствии обтекающего потока, т.е. если  $v = 0$ , то нелинейные собственные колебания типа  $w = (A_1 \sin \lambda_1 x_1 + A_2 \sin \lambda_2 x_1) \sin \mu_1 x_2 \cdot \cos \theta t$  (где  $A_1 \neq 0$  и  $A_2 \neq 0$ ) можно возбудить только при условии  $\delta = \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}} < 1$ . Тогда, частота колебаний указанного

типа, согласно (22), удовлетворяет условию  $\theta^2 > (\gamma^2 - \delta)/(1 - \delta)$ , а амплитуда колебаний определяется при помощи формул (21). Из этих формул, при условии (23) следует, что амплитуда колебаний является монотонно возрастающей функцией от частоты  $\theta$ .

#### 4.2. Характер амплитудно-частотной зависимости в докритической стадии

В этом случае система (15) решается численно при следующих исходных данных:  $E = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $\mu = 0.34$ ;  $\rho_0 = 2.79 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  (дюралюминий),  $\alpha = 1.4$ ;  $\rho_\infty = 1.29 \text{ кг/м}^3$ ;  $a_\infty = 340.29 \text{ м/с}$  (воздух). Исследована зависимость амплитуды (в точке  $(a/2, b/2, 0)$  пластинки) установившихся флаттерных колебаний  $A$  (в рассматриваемом случае  $A = A_1$ ) от параметра  $\theta$  при различных значениях  $v$ ,  $h/a$  и  $a/b$ .

Проведённые многочисленные расчёты показывают, что значения  $\theta$ , при которых соответствующая (15) линейная система

$$\begin{cases} A_1(1 - \theta^2) - \frac{2}{3} k v A_2 = 0 \\ A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3} k v A_1 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение, совпадает с корнем уравнения  $A(\theta) = 0$ . Указанные значения  $\theta$  являются корнями уравнения

$$(1 - \theta^2)(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{4}{9} k^2 v^2 = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) имеет два положительных корня при  $v < v_{cr}$ :

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \gamma^2 - \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 - \frac{16}{9} k^2 v^2} \right], \quad \theta_2^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \gamma^2 + \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 - \frac{16}{9} k^2 v^2} \right]. \quad (25)$$

Приведённые численные расчёты показывают также, что, как и в случае  $v = 0$ , отношение  $a/b$  имеет существенное влияние (как качественное, так и

количественное) на характер амплитудно-частотной зависимости. Поэтому, случаи  $a > b$  и  $a \leq b$  рассматриваются отдельно.

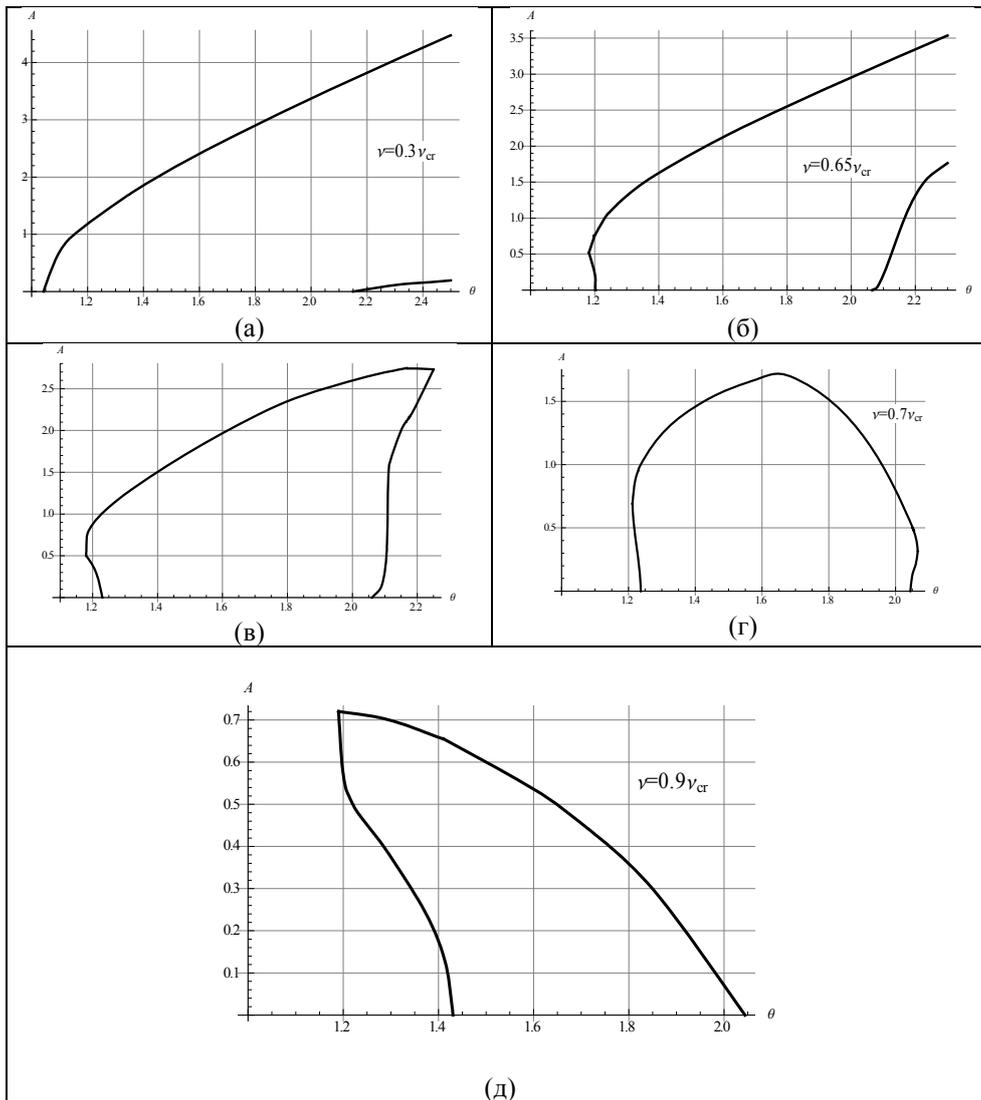
**Случай  $a > b$ .** Результаты вычисления значений амплитуды флаттерных колебаний при скоростях, меньших от критической скорости обтекающего потока, приведены в табл. 1. Для расчёта приняты:  $\frac{b}{a} = 0,8$ ,  $\frac{a}{h} = 70$ .

Таблица 1. Значения  $A(\theta)$  при различных значениях скорости обтекающего потока.

$\theta$	$\frac{v}{v_{cr}}$	0.1	0.3	0.65	0.7	0.9
	1.005	0	-	-	-	-
	1.042	0.539	0	-	-	-
	1.197	1.275	1.171	0.492	-	-
	1.202	1.294	1.192	0.457	-	-
	1.212	1.328	1.230	0.695	-	-
	1.237	1.414	1.325	0	0.725	0.717
	1.4	1.911	1.856	0.827	0.621	0.507
	1.431	1.997	1.945	1.020	1.001	0.714
	1.7	2.688	2.659	1.628	0	0.470
	2.044	3.489	3.472	1.712	1.458	0.659
	2.1	3.547	3.531	2.342	1.507	0.176
	2.168	3.766	3.751	3.041	1.681	0.643
	3	5.54	5.532	3.072	0.538	0
		0.09	0.402	0	0	0.45
				3.282	0.421	0
				1.089	0.212	-
				4.836	-	-
				3.283	-	-

В табл. 1 и в последующих таблицах символ «-» означает, что система (15) имеет единственное тривиальное решение. В этой таблице, и в последующем, нулём обозначено кратное нулевое, тривиальное решение.

На основе табл.1 построена фиг.2, которая показывает изменение характера зависимости  $A(\theta)$  от величины скорости обтекающего потока.



Фиг.2. Амплитудно-частотная зависимость при  $a = 70h$  и  $b / a = 0.8$  для различных значений скорости обтекающего потока

Из фиг.2 видно, что:

- если скорость обтекающего потока достаточно меньше критической скорости, то существует интервал  $[\theta_1, \theta_2]$  изменения частоты  $\theta$  такой, что при  $\theta < \theta_1$  невозможно возбудить флаттерные колебания. При  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  функция  $A(\theta)$  является однозначной, при  $\theta > \theta_2$  функция  $A(\theta)$  становится двузначной (фиг.2(a)). При этом, как показывают многочисленные расчёты, значения  $\theta_1$  и  $\theta_2$  совпадают с соответствующими значениями, полученными на основе формулы (25);

- с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка  $[\theta_1, \theta_2]$  уменьшается и стремится к нулю при  $v \rightarrow v_{cr}$ ;
- с увеличением скорости обтекающего потока характер амплитудно-частотной зависимости существенно меняется и в отличие от фиг.2(а) имеет место зависимость, представленная на фиг.2(б), левая ветвь которого идентична амплитудно-частотной зависимости нелинейных собственных колебаний;
- с дальнейшим увеличением скорости обтекающего потока область определения функции  $A(\theta)$  из полубесконечной области  $[\theta_1, +\infty)$  превращается в замкнутый отрезок  $[\theta_*, \theta^*]$ . Т.е. существует интервал  $[\theta_*, \theta^*]$  изменения частоты  $\theta$ , вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания. При этом, если  $\theta \in [\theta_*, \theta^*]$ , то значения амплитуды флаттерных колебаний находятся на границах замкнутых областей, как показано это на фигуре. Если  $\theta \in [\theta_*, \theta_1]$  и  $\theta \in [\theta_2, \theta^*]$ , то  $A(\theta)$  является двузначной функцией;
- при скоростях достаточно близко к критическим, амплитудно-частотная зависимость имеет мягкий характер в области  $[\theta_*, \theta_2]$ ;

Таблица 2. Влияние относительной толщины пластинки на характер амплитудно-частотной зависимости при  $v = 0.1v_{cr}$ .

Случай $b = 0.8a$								
$\theta$ $\frac{h}{a}$	1.0046	1.1	1.5	2	2.1685	2.3	3	10
1/70	0	0.877	2.184	3.389	3.766 0	4.054 0.032	5.538 0.088	19.486 0.437
1/110	0	0.877	2.1837	3.3897	3.766 0	4.0548 0.0322	5.5386 0.083	19.486 0.1892
Случай $b = 0.5a$								
$\theta$ $\frac{h}{a}$	1.0019	1.2	1.5987	2	2.102	2.5	3	5
1/70	0	1.137	2.1461 0	2.977 0.448	3.1783 0.6087 0.2931	3.9392 1.076 0.9817 0.079	4.8628 1.5342 1.4645 0.058	8.4229 3.0522 3.0009 0.0501
1/110	0	1.137	2.1461 0	2.977 0.448	3.1783 0.6003 0.2931	3.9392 1.0689 0.9893 0.0611	4.8628 1.5264 1.4725 0.0382	8.4229 3.0402 3.0126 0.0181

Из таблиц 1 и 2, а также из фиг.2 видно, что если скорость обтекающего потока меньше критической скорости, то:

- когда скорость обтекающего потока достаточно меньше критической скорости, то амплитуда установившихся флаттерных колебаний практически не зависит от приведённой толщины  $h/a$  пластинки;
- предельные значения частот  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , будучи больше единицы, уменьшаются с увеличением  $a/b$ ;

В табл. 2 рассмотрены только достаточно толстые пластинки, т.к. при  $v = 0.1v_{cr}$  в тонких пластинках нарушается условие  $M^2 > 2$ .

Из фиг.2(б) видно, что характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек. Т.е. функция  $\theta(A)$  имеет единственную точку минимума, и значение этой функции в точке минимума увеличивается с уменьшением  $a/b$ . Численные расчёты показывают также, что: а) предельное значение частоты  $\theta_*$  (меньше которого невозможно возбудить флаттерные колебания), будучи больше единицы, увеличивается с уменьшением  $a/b$ ; б) установившиеся флаттерные колебания существуют при частотах  $\theta > \theta_*$ .

Таблица 3. Влияние абсолютной толщины на значения амплитуды флаттерных колебаний при  $v = 0.9v_{cr}$  и  $b = 0.8a$

$\theta$ h/a	1	1.2	1.4	1.430	1.4307	1.9	1.914	2	3
1/70	-	0.7177 0.5246	0.6591 0.1759	0.6439 0.0269	0.6436 0	0.2284	0	-	-
1/100	-	-	-	0.4429 0.1617	0.48382 0	2.8977	2.9371 0	3.1417 0.2457	5.4760 1.0392
1/200	-	-	-	-	0	2.8952	2.9349 0	3.1707 0.2372	5.4817 0.7649
1/300	-	-	-	-	0	2.8951	2.9349 0	3.1707 0.2371	5.4817 0.7640

К дополнению рассмотренных случаев, ниже приведены также табл. 3 и 4, показывающие влияние геометрических параметров задачи на процесс перехода амплитудно-частотной зависимости из одного типа к другому. Причём, табл.3 показывает влияние  $h/a$ , а табл. 4 – влияние  $a/b$  на характер указанного перехода.

Табл. 3 показывает, что при достаточно больших скоростях обтекающего потока уменьшение  $h/a$  сначала приводит к изменению характера функции  $A(\theta)$ . А именно, фиг.2(г) переходит в фиг.2(в).

Таблица 4. Значения амплитуды флаттерных колебаний при  $v = 0.9v_{cr}$  и  $a = 70h$

$\theta$ b/a	1.034	1.05	1.07	1.084	1.113	1.22	1.275	1.310	1.505	1.610	1.9	2.05
0.2	0	0.04	0.027	0	-	-	-	-	-	-	-	-
0.4	-	-	-	-	0	0.138	0.083	0	-	-	-	-
0.6	-	-	-	-	-	0.392 0.387	0.409 0	0.391	0.225	0	-	-
0.9	-	-	-	0.804 0.734	0.829 0.676	0.845 0.539	0.838 0.473	0.832 0.429	0.762 0	0.707	0.490	0

Таблица 4 показывает, что ширина области однозначности функции  $A(\theta)$  увеличивается с уменьшением  $a/b$ .

**Случай  $a \leq b$ .** В табл. 5 приведены результаты численных вычислений значений амплитуды  $A(\theta)$  флаттерных колебаний квадратной пластинки в докритической стадии ( $v < v_{cr}$ ) при различных значениях  $h/a$  и различных значениях докритической сверхзвуковой скорости потока.

Из этой таблицы видно, что с увеличением скорости обтекания характер амплитудно-частотной зависимости меняется и существует определённое значение  $\bar{v}$  параметра скорости  $v$  ( $\bar{v}$  зависит от геометрических параметров задачи и  $\bar{v} < v_{cr}$ ), при превышении которого происходит качественное изменение характера амплитудно-частотной зависимости. Указанное изменение происходит следующим образом:

- если  $v < \bar{v}$ , то амплитудно-частотная зависимость носит жёсткий характер (аналог фиг.2(а)). При этом существует интервал изменения частоты  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  (где  $\theta_1 > 1$ ), в котором функция  $A(\theta)$  является однозначной функцией.

Расчёты показывают, что: а) с уменьшением  $a/b$  амплитуда флаттерных колебаний уменьшается, б) если же  $\theta > \theta_2$ , то функция  $A(\theta)$  является многозначной, с) с уменьшением  $h/a$  значение  $\theta_1$  увеличивается.

Таблица 5. Значения амплитуды флаттерных колебаний при  $v < v_{cr}$  и  $a = b$ .

v	$\theta$	1.2	1.4	1.5	2	2.5	3	4
	$h/a$							
$v = 0.1v^*$	1/80	1.351	1.896	2.234	3.469	4.592 0.004	5.671 0.049	7.765 0.068
	1/200	1.351	1.896	2.234	3.469	4.592 0.004	5.671 0.049	7.765 0.068
$v = 0.5v^*$	1/80	0.651	1.771	2.013	3.384	4.548 0.107	5.643 0.305	7.751 0.552
	1/200	0.596	1.618	1.621	3.369	4.542 0.103	5.641 0.257	7.553 0.333
$v = 0.9v^*$	1/80	-	1.102	1.425 0.472	2.949	4.133 0.747	5.213 1.642	7.249 3.002
	1/200	-	-	-	3.081	4.414 0.367	5.571 0.521	7.724 0.612

Табл. 5 показывает также, что:

- если  $\bar{v} < v < v_{cr}$ , то характер амплитудно-частотной зависимости имеет вид, аналогичный фиг.2(б). При этом, с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка  $[\theta_1, \theta_2]$  уменьшается и стремится к нулю при  $v \rightarrow v_{cr}$ ;
- если пластинка достаточно толстая, то существует значение скорости обтекающего потока  $\tilde{v}$  такое, что в отличие от рассмотренных случаев, где область определения функции  $A(\theta)$  является полубесконечной, здесь область определения функции  $A(\theta)$  является конечной (аналог фиг.2(в,г)).

Таким образом, установлена возможность существования незатухающих нелинейных колебаний с амплитудой  $A(\theta)$ . Выявлен характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний и исследовано влияние присутствия обтекающего потока на характер указанной зависимости. Установлено также, что переход от одного типа амплитудно-частотной зависимости к другому можно регулировать не только (вплоть до невозможности возбуждения подобных колебаний) соответствующим

выбором геометрических и физических параметров рассматриваемой аэроупругой системы, но и величиной скорости обтекающего потока.

Отметим также, что в случае многозначности функции  $A(\theta)$ , характеризующей амплитудно-частотную зависимость флаттерных колебаний ( $A = \varphi_1(\theta)$  и  $A = \varphi_2(\theta)$ , притом  $\varphi_1(\theta) < \varphi_2(\theta)$ ), в зависимости от величины амплитуды возмущений система совершает незатухающие флаттерные колебания вокруг одного из указанных состояний.

## 5. Основные результаты

В заключении приведём некоторые на наш взгляд наиболее существенные, новые результаты, полученные в данной работе. Они являются следствием влияния набегающего потока газа на амплитудно-частотную зависимость нелинейных колебаний рассматриваемой аэроупругой системы. Для чёткости и наглядности отметим ещё раз [1], что зависимость частоты нелинейных колебаний пластинки  $\theta$  от амплитуды  $A$  в отсутствие обтекающего потока носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частота колебаний монотонно возрастает. В настоящей работе установлено, что:

- присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости;
- переход одного типа амплитудно-частотной зависимости к другому можно регулировать соответствующим выбором как геометрических и физических параметров аэроупругой системы, так и выбором скорости набегающего потока.

Кроме указанных выше результатов, имеющих общий характер, приведём и другие, относящиеся к характеру функции  $A(\theta)$ :

- существует интервал  $[\theta_1, \theta_2]$  изменения частоты  $\theta$  такой, что при  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  функция  $A(\theta)$  является однозначной. При этом, как показывают многочисленные расчёты, значения  $\theta_1$  и  $\theta_2$  практически совпадают с соответствующими значениями, полученными на основе формулы (25);
- с увеличением скорости обтекающего потока длина отрезка  $[\theta_1, \theta_2]$  уменьшается и стремится к нулю при  $v \rightarrow v_{cr}$ ;
- с увеличением скорости обтекающего потока характер амплитудно-частотной зависимости может качественно меняться. В частности, характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек;
- в зависимости от геометрии пластинки существует определённое значение скорости обтекающего потока, начиная с которого область определения функции  $A(\theta)$  из полубесконечной области  $[\theta_1, +\infty)$  превращается в замкнутый отрезок  $[\theta_*, \theta^*]$ . Т.е. существует интервал  $[\theta_*, \theta^*]$  изменения

частоты  $\theta$ , вне которого невозможно возбудить установившиеся флаттерные колебания.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2С243.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С.67-122.
5. Хеджеплет Д. Флаттер прямоугольных свободно опертых панелей при больших сверхзвуковых скоростях. // Сб. «Механика». 1958. ИЛ, №2. С.103-125.
6. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. //ПММ. 1956. Т.20. Вып.2. С.211-222.
7. Miles J. W., Supersonic flutter of a cylindrical shell, Journ. Aeronaut. Sci. 24, №2 (1957); 25, №5 (1958).
8. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Нелинейный флаттер ортотропной прямоугольной пластинки. //В сб. научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной сред». 2010. Т.1. С.118-123.
9. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions. Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012.
10. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв.АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №1. С.92-98.
11. P. Marzocca, L. Librescu, D.H. Kim, I. Lee, S. Schober «Generalized Transonic Unsteady Aerodynamics via Computational-Fluid-Dynamics Indicial Approach», AIAA Journal, Vol. 43, №4, April 2005, pp.915-921.
12. D.-H. Kim, I. Lee. P. Marzocca, L. Librescu, S. Schober «Nonlinear Aeroelastic Analysis of an Airfoil Using CFD-Based Indicial Approach», //Journal of Aircraft, Vol. 42, №5, September–October 2005, pp. 1340-1344.
13. Болотин В.В., Гаврилов Ю.В., Макаров Б.П. и Швейко Ю.Ю. Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях. // Изв. АН СССР. ОТН. «Механика и машиностроение». 1959. № 3.
14. Fung Y. C, On two-dimensional panel flutter, Journ. Aeronaut. Sci. 25, № 3 (1958).
15. Шен С. Приближённое исследование нелинейных флаттерных задач. //Сб. «Механика». 1959. ИЛ, № 4.
16. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №3. С.24-37.
17. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки при критических скоростях. //Прикладная математика и механика, Гюмри, 2014. Вып.А. №1. С. 20-39.
18. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М.: Гостехтеориздат, 1949.

19. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. //Journ. Aeronaut. Sci. 23. №6. 1956.
20. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.20. Вып.6.
21. Меркин Д.П. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312с.
22. Швейко Ю.Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа. //Изв. АН СССР. ОТН. 1960. №6.
23. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных полых оболочек. //Изв. АН Арм.ССР. Сер.физ-мат. наук. 1960. Т.13. №1. С.47–58.

**Сведения об авторах:**

**Багдасарян Геворг Ервандович** – академик НАН Армении, профессор, ведущий научный работник Института механики НАН Армении  
Тел.: (060) 71 00 89; E-mail: gevorgb@rau.am

**Микилян Марине Александровна** – к.ф.-м.н., доцент, старший научный работник Института механики НАН Армении  
Тел.: (091) 191129; E-mail: mikilyan@rau.am

**Сагоян Рафаэль Оникович** – внештатный работник Института механики НАН Армении  
Тел.: (093) 248226; E-mail: rafael1984@mail.ru.

Поступила в редакцию 17.07.2015