ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №4, 2015 Механика

УДК 539.3

ТРЁХМЕРНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОГО ВОЛНОВОДА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Белубекян В.М., Белубекян М.В.

Ключевые слова: трёхмерная волна, условия Навье, локализованные колебания.
Key Words: three dimensional wave, Navier`s conditions, localized vibrations.
Բանալի բառեր՝ եռաչափ ալիք, Նավյեի պայմաններ, տեղայնացված տատանումներ.

Բելուբեկյան Վ.Մ., Բելուբեկյան Մ.Վ.
Ուղղանկյուն կտրվածք ունեցող եռաչափ առաձգական ալիքատարի խնդիրը

Հետազոտվում է եռաչափ ալիքների տարածումը առաձգական պրիզմայում: Հաստատված են եզրային պայմաններ, որոնք բերում են խնդրի հավասարումների փոփոխականների անջատման: Ստացված են կիսաանվերջ ալիքատարի ազատ եզրի շրջակայքում տեղայնացված տատանումների գոյության պայմանները:

Belubekyan V.M., Belubekyan M.V.
The 3-D problem of the elastic wavequide with the rectungular cross section

The propogation of the 3-D elastic waves in the elastic prism is investigated. The boundary conditions are established for the dividing of the equations variables. The conditions of the existence of the localized vibrations near the semi-infinite wavequides are received.

Исследуется распространение трёхмерных волн в упругой призме. Установлены граничные условия, приводящие к разделению переменных в уравнениях задачи. Получены условия существования локализованных волн в окрестности свободного края полубесконечного волновода.

Введение. Пространственные задачи распространения упругих волн при наличии ограничивающих среду поверхностей более близки к реальным условиям, чем плоские.

Впервые трёхмерные волны типа Релея были рассмотрены Knowles-ом [1]. Случаи, когда на границе полупространства заданы смешанные граничные условия, исследованы в статьях [2–5]. Аналогичные задачи для анизотропных сред приведены в [6–8], для волн типа Стоунли – в [9].

В настоящей статье исследуется распространение волн в упругой среде, занимающей область $-\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le d.$ На плоскостях $y = \mathrm{const}\,t$ и $\mathrm{z} = \mathrm{const},$ ограничивающих волновод, рассматриваются граничные условия типа Навье или скользящего контакта (анти-Навье), позволяющие для решения задач использовать метод разделения переменных. Приводится также решение задачи локализованных в окрестности свободного края колебаний полубесконечного волновода. Установлены условия существования локализованных колебаний в окрестности края волновода со смешанными граничными условиями.

1. Пусть упругие перемещения точек среды определяются вектором $\bar{u} = \bar{u}(u, \mathrm{v}, w)$.

Известно, что при помощи преобразований Ламе [10]

$$\bar{u} = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\bar{\psi} \tag{1.1}$$

уравнения движения изотропной упругой среды приводятся к виду:

$$c_e^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\ c_t^2\Delta\overline{\psi} = \frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial t^2},\ \operatorname{div}\overline{\psi} = 0. \tag{1.2}$$

В (1.2) приняты обозначения:

$$c_e^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\ c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}, \tag{1.3}$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе, ρ – плотность материала среды, Δ – трёхмерный оператор Лапласа.

Предполагается, что на плоскостях $y = 0, b$, ограничивающих волновод, заданы условия Навье:

$$\sigma_{yy} = 0,\ u = 0,\ w = 0 \quad \text{при } y = \text{const}. \tag{1.4}$$

Из закона Гука и из условий (1.4) следует, что условие $\sigma_{yy} = 0$ приводит к условию $\partial \mathrm{v}/\partial y = 0$. В этом случае граничные условия Навье, согласно (1.1), имеют вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right) = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0 \end{gathered} \quad \text{при} \quad y = \text{const}. \tag{1.5}$$

После определения $\partial\psi_1/\partial y$ и $\partial\psi_3/\partial y$ из второго и третьего условий (1.5) и подстановки в первое условие получается $\Delta\varphi = 0$ (предполагается выполнение условия перемены очерёдности дифференцирования). Имея в виду, что в последующем будут рассматриваться гармонические колебания вида

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z)e^{i\omega t}, \tag{1.6}$$

из первого уравнения системы (1.2) получается $\varphi = 0$ при $y = \text{const}$. Отсюда следует, что во втором и третьем условиях (1.5) $\partial\varphi/\partial x = 0,\ \partial\varphi/\partial z = 0.$ В результате, условия (1.4) приводятся к виду:

$$\varphi = 0,\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \text{const} \tag{1.7}$$

Используя (1.7), можно получить выражение

$$\Delta\psi_2 = \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\overline{\psi} \quad \text{при} \quad y = \text{const}. \tag{1.8}$$

Отсюда и из уравнения (1.2) и ограничения (1.6) получается $\psi_2 = 0$ при $y = \text{const}.$ С учётом $\psi_2 = 0$, условия (1.7) приводятся к виду:

$$\varphi = 0,\quad \psi_2 = 0,\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \text{const}. \tag{1.9}$$

В последующем, будет показано, что удовлетворяя условиям (1.9), автоматически удовлетворяются условия (1.7) и следовательно, (1.5) или (1.4).

Аналогичным образом, можно показать, что условия Навье

$$\sigma_{zz} = 0,\ u = 0,\ \mathrm{v} = 0 \quad \text{при} \quad z = \text{const} \tag{1.10}$$

приводятся к виду

$$\varphi = 0,\ \psi_3 = 0,\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \text{const}. \tag{1.11}$$

Нетрудно также вывести, что условиям скользящего контакта

$$\sigma_{yx} = 0,\ \text{v}=0,\ \sigma_{yz} = 0 \quad \text{при} \quad y = \text{const} \tag{1.12}$$

соответствуют условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0,\ \psi_1 = 0,\ \psi_3 = 0 \quad \text{при} \quad y = \text{const}, \tag{1.13}$$

а условиям

$$\sigma_{xz} = 0,\ \sigma_{zy} = 0,\ w = 0 \quad \text{при} \quad z = \text{const} \tag{1.14}$$

соответствуют

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0,\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = \text{const}. \tag{1.15}$$

2. Приведённые условия Навье и скользящего контакта (анти-Навье) позволяют в задачах распространения трёхмерных волн применить метод разделения переменных. Пусть на гранях $y = 0, b;\ z = 0, d,$ волновода с прямоугольным поперечным сечением заданы условия Навье. Тогда, решения уравнений (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.9), (1.11), можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}(x) e^{i\omega_{mn}t} \sin\lambda_m y \sin\mu_n z,\ \lambda_m = \frac{m\pi}{b} \\
\psi_1 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{1mn}(x) e^{i\omega_{mn}t} \cos\lambda_m y \cos\mu_n z,\ \mu_m = \frac{n\pi}{d} \\
\psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{2mn}(x) e^{i\omega_{mn}t} \sin\lambda_m y \cos\mu_n z, \\
\psi_3 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{3mn}(x) e^{i\omega_{mn}t} \cos\lambda_m y \sin\mu_n z
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Легко проверить, что и другие варианты записи граничных условий Навье – (1.4), (1.5), (1.7) и (1.10) также удовлетворяются. Это обстоятельство является обоснованием справедливости граничных условий (1.9) и (1.11).

В случае неограниченного по x волновода искомые функции из (2.1) можно представить в виде

$$\Phi_{mn} = A_{mn} e^{ikx}, \quad \Psi_{smn} = B_{smn} e^{ikx}, \quad s = 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

Подстановка (2.2) в уравнение (1.2) приводит к раздельным дисперсионным уравнениям для продольной и поперечных сдвиговых волн

$$\omega_{mn}^2 = c_e^2\left(k^2 + r^2\right),\ \omega_{mn}^2 = c_t^2\left(k^2 + r^2\right),\ r^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2 \tag{2.3}$$

При этом, амплитуды сдвиговых волн связаны соотношением

$$ikB_{1mn} + \lambda_m B_{2mn} + \mu_n B_{3mn} = 0, \tag{2.4}$$

что означает наличие только двух независимых сдвиговых волн.

Рассмотрим задачу локализованных колебаний в окрестности свободного торца волновода. Пусть полубесконечный волновод в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область: $0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le d.$ На полубесконечных кромках $y = 0; b$ и $z = 0; d$, ограничивающих волновод, заданы условия Навье (1.9) и (1.11). На прямоугольном торце волновода заданы условия свободного края

$$\sigma_{xx} = 0,\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0\,. \tag{2.5}$$

С помощью закона Гука и преобразования Ламе (1.1) граничные условия (2.5) приводятся к виду:

$$\begin{gathered}
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - 2\mu\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\partial y}\right) = 0,\\
2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при}\ x = 0\,,\\
2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = 0.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Требуется найти решения уравнений (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.9), (1.11), (2.6) и условиям затухания

$$\lim_{x\to\infty}\varphi = 0,\ \lim_{x\to\infty}\overline{\psi} = 0\,. \tag{2.7}$$

Эта задача в частном случае $-\infty < z < \infty$ была исследована в [11]. В монографии [12] приведены решения задач локализванных колебаний в двумерной постановке.

Подстановка решений вида (2.1) в уравнения (1.2) приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}
\Phi''_{mn} - r^2(1-\theta\eta)\Phi_{mn} = 0, \quad \theta = \frac{c_t^2}{c_l^2}\\
\Psi''_{Smn} - r^2(1-\eta)\Psi_{Smn} = 0, \quad \eta = \frac{\omega_{mn}^2}{r^2c_t^2}
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Условия затухания будут выполнены, если

$$\lim_{x\to\infty}\Phi_{mn} = 0,\ \lim_{x\to\infty}\Psi_{Smn} = 0\,. \tag{2.9}$$

Уравнения (2.8) имеют следующие решения, удовлетворяющие условиям затухания (2.9):

$$\Phi_{mn} = A_{mn}e^{-r\nu_1 x},\ \Psi_{Smn} = B_{Smn}e^{-r\nu_2 x}\ , \tag{2.10}$$

где

$$\nu_1 = \sqrt{1-\theta\eta}\ ,\ \nu_2 = \sqrt{1-\eta}\,. \tag{2.11}$$

С учётом неравенства $\theta < 1$, получается, что локализованное у края решение будет существовать, если

$$0 < \eta < 1 \tag{2.12}$$

Уравнение $\operatorname{div}\overline{\psi} = 0$ даёт связь между произвольными постоянными B_{Smn}

$$-r\nu_2 B_{1mn} + \lambda_m B_{2mn} + \mu_n B_{3mn} = 0 \tag{2.13}$$

3. Подстановка (2.1), с учётом (2.9), в граничные условия свободного края (2.6) приводит к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_{mn}, B_{Smn}. Используя также связи (2.13), эту систему можно преобразовать к виду:

$$r(2-\eta)A_{mn} - 2\nu_2(\mu_n B_{2mn} - \lambda_m B_{3mn}) = 0,$$

$$2r\nu_1\lambda_m A_{mn} - 2\lambda_m\mu_n B_{2mn} + \left[\lambda_m^2(2-\eta) - \mu_n^2\eta\right]B_{3mn} = 0, \tag{3.1}$$
$$2r\nu_1\mu_n A_{mn} - \left[\mu_n^2(2-\eta) - \lambda_m^2\eta\right]B_{2mn} + 2\lambda_m\mu_n B_{3mn} = 0.$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (3.1) есть условие существования нетривиального решения. После некоторых преобразований это условие приводится к уравнению

$$(2-\eta)^2 - 4\nu_1\nu_2 = 0\,. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2), с точностью обозначений для η, совпадает с известным уравнением Рэлея для поверхностных волн в полупространстве со свободной поверхностью [10].

Пусть на кромке полубесконечного волновода заданы условия стеснённого свободного края [2]

$$\sigma_{xx} = 0,\ \sigma_{xy} = 0,\ w = 0 \quad \text{при } x = 0\,. \tag{3.3}$$

Используя закон Гука и преобразования Ламе (1.1), граничные условия (3.3) приводятся к виду:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - 2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right) = 0,$$
$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0. \tag{3.4}$$

Подстановка решения (2.1) в граничные условия (3.4) и использование равенства (2.13) приводит к системе трёх однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_{mn}, B_{2mn}, B_{3mn}:

$$r(2-\eta)A_{mn} - 2\nu_2\left(\mu_n B_{2mn} - \lambda_m B_{3mn}\right) = 0,$$
$$2r\nu_1\lambda_m A_{mn} - 2\lambda_m\mu_n B_{2mn} + \left[\lambda_m^2(2-\eta) - \mu_n^2\eta\right]B_{3mn} = 0, \tag{3.5}$$
$$r\nu_2\mu_n A_{mn} + \left(\lambda_m^2 - r^2\nu_2^2\right)B_{2mn} + \lambda_m\mu_n B_{3mn} = 0.$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.5) после ряда преобразований приводится к виду:

$$M(\eta) \equiv \lambda_m^2(2-\eta)\left[(2-\eta)^2 - 4\nu_1\nu_2\right] - \mu_n^2\nu_2^2\eta^2 = 0\,. \tag{3.6}$$

Задача со стеснённой свободной поверхностью для полупространства была исследована в [2], где в аналогичном с (3.6) дисперсионном уравнении имеется неточность, которая была исправлена в статье [5]. Уравнение (3.6) имеет корень $\eta = 0$, которому соответствует тривиальное решение $\bar{u} \equiv 0$. После исключения корня $\eta = 0$ получается новое дисперсионное уравнение

$$M_1(\eta) \equiv \lambda_m^2(2-\eta)\left[\eta - \frac{4(1-\theta)\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\right] - \mu_n^2\nu_2^2\eta = 0\,. \tag{3.7}$$

Функция $M_1(\eta)$ обладает следующими свойствами:

$$M_1(0) = -4\lambda_m^2(1-\theta) < 0,\ M_1(1) = \lambda_m^2 > 0\,. \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что уравнение (3.7) имеет, по крайней мере, один корень, удовлетворяющий условию (2.12). Следовательно, в случае граничных условий со стеснением (3.3), также, как и в случае свободного края (2.5), имеют место колебания, локализованные в окрестности кромки волновода $x = 0$.

Очевидно, локализованные колебания существуют также в случае граничных условий

$$\sigma_{xx} = 0, \ v = 0, \ \sigma_{xz} = 0 . \qquad (3.9)$$

Можно показать, что локализованные колебания не существуют для кромочных условий закреплённого края, типа Навье и скользящего контакта.

Заключение. Установлены граничные условия, которые в пространственных задачах приводят к разделению волн. Для этих граничных условий получены формулы, определяющие фазовые скорости. Исследованы локализованные волны в окрестности свободного края полубесконечного волновода. Установлены условия существования локализованных колебаний при смешанных граничных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Knowles J.K. A note on surface waves. // J.of Geophysical research. 1966. V.21. №22. P.5480-5481.
2. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трёхмерная задача поверхностных волн Рэлея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4. С.362-369.
3. Мгерян Д.Э. Распространение пространственной поверхностной волны, когда на поверхности полупространства одно касательное перемещение равно нулю. //Изв.НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №4. С.18-23.
4. Белубекян М.В. Волны Рэлея в случае упруго-стеснённой границы //Изв.НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С.3-6.
5. Ардазишвили Р.В. Трёхмерная волна Рэлея в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространства. // В сб. научных трудов: «Механика». Ереван: Изд. ЕГУАС, 2013. С.74-78.
6. Белубекян В.М., Мгерян Д.Э. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде.//Изв.НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №2. С.3-9.
7. Mheryan D.N., Belubekyan V.M. On the problem of propagation of surfase waves in transversally isotropic medium. Proc.of XXXIV Summer School conf. «Advanced problems in mechanics», st. Petersburg 2006, p.363-370.
8. Белубекян М.В., Мгерян Д.Э. Пространственная задача распространения упругих поверхностных волн в полупространстве со свойствами кубической симметрии. //Изв.НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №1. С.23-29.
9. Саркисян С.В., Мелконян А.В. К трёхмерной задаче распространения поверхностных волн Стоунли. //В сб.: «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела». Ереван: Институт механики НАН Армении, 2012. С.245-249.
10. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ НКТП, 1935. 676 с.
11. Белубекян В.М. К задаче о поверхностных упругих волнах в толстой плите. //Изв.НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №1. С.9-15.
12. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Косович Л.Ю. Краевые интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – к.ф.м.н., проф., главн. науч. сотр. Института механики НАН РА, Ереван 0019, Армения. **Тел.:** (+374 10) 52-15-03;
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 11.09.2015