

УДК 532.613.5

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ЗАМКНУТОМ
КАНАЛЕ, НАПОЛНЕННОМ ПЕРИОДИЧЕСКИ ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ
ПРОБКАМИ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ И ГАЗА**

Григорян Ш.А., Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Բանալի բառեր: ալիք, խցաններ, հեղուկ, գազ:

Ключевые слова: волна, пробки, жидкость, газ.

Key words: wave, corks, fluid, gas.

Գրիգորյան Շ.Հ., Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.

**Ճնշման ալիքի տարածումը փակ ջրանցքում, լցված պարբերաբար իրար հաջորդող
զազահեղուկ խառնուրդ և գազ պարունակող խցաններով**

Գծային դրվածքով ուսումնասիրված է ալիքի տարածումը փակ ջրանցքում, որում գոյություն ունեն խցաններ: Ենթադրվում է, որ նրանց կառուցվածքի տարրերը պարբերաբար կրկնվում են: Ստացված է դիսպերսիոն հավասարումը, որը բնութագրում է երկու խցաններից կազմված բջիջում Բլոխի ալիքային թվի կախվածությունը խցանների այլ ալիքային թվերից: Թվային հաշվարկների միջոցով որոշված են գրգռող հաճախությունների արժեքների ոչ թափանցելիության միջակայքերը, որոնցում ալիքը բացակայում է:

Grigoryan Sh.A., Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.

**The propagation of pressure wave in closed channel filed of periodic alternate corks
with the gas-liquid mixture and gas**

The propagation of wave in closed channel filed of corks is considered. It is supposed that the discrete structure of corks is periodic. The dispersion equation of the Bloch wave number dependence on wave numbers of corks is derived. It is obtained the frequencies bands of transmitting waves.

При течении газожидкостной смеси в замкнутом канале может образоваться снарядный поток, характеризующий чётко выраженной дискретной структурой из чередующихся пробок жидкости и газа. Полагается, что структура потока периодически повторяется, вследствие чего рассматривается система из двух пробок, образующих элементарную ячейку. Исследуется заключительная стадия зарождения снарядного потока, когда чистое разделение фаз всё ещё отсутствует и среды представляют собой газожидкостную смесь с очень малым газосодержанием (первая пробка) и собственно газ (вторая пробка).

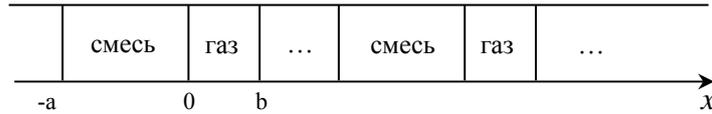
Введено дисперсионное уравнение, описывающее зависимость волнового числа Блоха всей ячейки от волновых чисел пробок. Его численная реализация проведена в случае водовоздушной смеси и воздуха. Получены значения возбуждающих частот в диапазонах запирания (непрозрачности), при которых распространение волны сжатия не происходит.

Введение. Пусть в замкнутом канале бесконечной длины с абсолютно жёсткими стенками течёт бесстолкновительная монодисперсная смесь жидкости с пузырьками калорически совершенного газа. Эффектами межфазного теплообмена, трения, пульсационного движения пузырьков и их поступательного движения относительно жидкости пренебрегаются (односкоростная модель). Полагается, что процессы образования новых пузырьков, их дробление и слипание отсутствуют.

При сформировавшемся снарядном потоке имеет место разделение фаз в виде образований чередующихся жидкой и газовой пробок строго дискретной структуры [1,2]. Исследование скоростей распространения волны сжатия проведено в [1]. Для периодической структуры распределения пробок в [3] с использованием теоремы Флоке [4,5] получено дисперсионное трансцендентное уравнение, из которого на

примере воды и воздуха численно рассчитаны значения возбуждающих частот пропускания волны, образующих диапазоны прозрачности. Распространение волны в периодических структурах на основании уравнения Хилла рассмотрено в [6].

1. Исходные уравнения. Рассматривается распространение волны сжатия в замкнутом канале с периодически чередующимися ячейками из двух пробок, в которых первая наполнена газожидкостной смесью с очень малым содержанием газа $\beta \ll 1$, а вторая – одиночным большим пузырьком газа, имеющим форму сфероида и занимающим почти всё поперечное сечение канала. Идеализированная схема такого дискретного потока представлена на фиг.1



Фиг. 1

В приближении Буссинеска одномерные линейные уравнения движения смеси в первой пробке имеют вид [2,7]:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - (1-\beta) \frac{c_1^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^4 P_1}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_{10} R^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\partial P_1}{\partial t} = 0, \quad c_1^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta \rho_{10}}, \quad \rho_1 = (1-\beta)\rho_{10} + \beta\rho_{20}$$

Движение газа во второй пробке описываются уравнениями:

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{20} c_2^2} \frac{\partial P_2}{\partial t} = 0, \quad c_2^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_{20}} \quad (1.2)$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, направленная вдоль стенки канала, P – возмущение давления, ρ – плотность, ω_{ar} – резонансная частота Миннаэрта, R – радиус пузырька, γ – показатель адиабаты газа, c – невозмущённая скорость среды. Третье слагаемое из (1.1) ответственно за дисперсию волны в смеси. Индексы 0, 1 и 2 отнесены к состоянию равновесия и параметрам сред в первой и второй пробках. Полагая

$$[P_i(x, t), V_i(x, t)] = [P_{i*}(x), V_{i*}(x)] e^{i\omega t}, \quad i = 1, 2$$

где ω – возбуждающая распространение волны частота, уравнения (1.1), (1.2) переписутся в стационарной форме записи:

$$\frac{d^2 P_1}{dx^2} + \frac{\omega_1^2}{c_1^2} P_1 = 0, \quad \frac{d^2 P_2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_2^2} P_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega \left[1 - (1-\beta) \frac{\omega^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1/2} \quad (1.3)$$

$$\frac{dV_1}{dx} = -i \frac{k_1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} P_1, \quad \frac{dV_2}{dx} = -i \frac{k_2}{\rho_{20} c_2} P_2, \quad k_1 = \frac{\omega_1}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

Здесь звездочки в индексах опущены, что будет соблюдаться и далее.

На линии раздела сред $x = 0$ должны выполняться условия непрерывности как давления, так и скоростей частиц сред

$$P_1(0) = P_2(0), \quad V_1(0) = V_2(0) \quad (1.4)$$

Кроме того, на линиях $x = -a$ и $x = b$ раздела ячейки потребуем выполнения условий её квазипериодичности

$$P_1(-a) = lP_2(b), \quad V_1(-a) = lV_2(b) \quad (1.5)$$

Постоянный множитель l будет определён в процессе решения задачи. Требуется найти те значения возбуждающих частот ω , при которых либо существует процесс распространения волны (частоты пропускания), либо он отсутствует (частоты среза). В последнем случае падающая из какой-либо пробки волна по достижению линии раздела с другой полностью отражается от неё и процесс распространения обрывается.

Общие решения уравнений (1.3) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x}, & V_1(x) &= \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} (A_1 e^{-ik_1 x} - B_1 e^{ik_1 x}) \\ P_2(x) &= A_2 e^{-ik_2 x} + B_2 e^{ik_2 x}, & V_2(x) &= \frac{1}{\rho_{20} c_2} (A_2 e^{-ik_2 x} - B_2 e^{ik_2 x}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где A_i, B_i ($i=1,2$) – постоянные интегрирования.

Удовлетворяя условиям непрерывности (1.4) и квазипериодичности (1.5), для определения постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 получим систему однородных уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 - A_2 - B_2 &= 0 \\ \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} A_1 - \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} B_1 - \frac{1}{\rho_{20} c_2} A_2 + \frac{1}{\rho_{20} c_2} B_2 &= 0 \\ A_1 e^{ik_1 a} + B_1 e^{-ik_1 a} - l A_2 e^{-ik_2 b} - l B_2 e^{ik_2 b} &= 0 \\ \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} A_1 e^{ik_1 a} - \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} B_1 e^{-ik_1 a} - \frac{l}{\rho_{20} c_2} A_2 e^{-ik_2 b} + \frac{l}{\rho_{20} c_2} B_2 e^{ik_2 b} &= 0 \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений является равенство нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов при A_1, A_2, B_1, B_2 . Раскрывая его, для определения множителя l получим уравнение:

$$\frac{1}{2} \left(l + \frac{1}{l} \right) = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_{20} c_2} \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\rho_{20} c_2}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \sin k_1 a \sin k_2 b$$

Вводя в рассмотрение волновое число Блоха q для ячейки, получим:

$$\cos qL = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_{20} c_2} \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\rho_{20} c_2}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \sin k_1 a \sin k_2 b \quad (1.7)$$

$$l = e^{iqL}, \quad L = a + b$$

Волновой процесс в ячейке определяется не локальными волновыми числами k_1, k_2 , и некоторой, усреднённой по ячейке, величиной q , которая определяется с точностью до целого числа значений $2\pi n / L$, $n = \pm 1, 2, \dots$. Очевидно, что для значений возбуждающих частот ω , при которых $|\cos qL| \leq 1$ (частота пропускания), существуют волны давления (сжатия), а в случае $|\cos qL| > 1$ (частоты запирания) волны отсутствуют. В последнем случае волна, подающая из какой-либо пробки, по достижению начальной границы последующей пробки полностью отражается от неё и дальнейшее распространение не происходит.

2. Отсутствие дисперсии. Такой случай имеет место при пренебрежении третьим членом в уравнении (1.1). Рассмотрим частную задачу. Пусть выполняется условие $k_1 a = k_2 b$, означающее, что при распространении волны её фаза в каждой пробке меняется на одну и ту же величину. Уравнение (1.3) примет форму записи ($k_1 = \omega / c_1$, $k_2 = \omega / c_2$, $\omega_1 = \omega$)

$$\cos qL = 1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_1 c_1}{\rho_{20} c_2} \left(1 + \frac{\rho_{20} c_2}{\rho_1 c_1} \right)^2 \sin^2 \Omega, \quad \Omega = \frac{\omega}{c_1} (1 - \alpha) L \quad (2.1)$$

Здесь $a = (1 - \alpha)L$, $b = \alpha L$. Условие $k_1 a = k_2 b$ при фиксированных значениях ρ_{10} , ρ_{20} и β определяет величину параметра α

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{c_1 + c_2}{c_2} = 1 + \sqrt{\frac{1}{\beta} \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}}$$

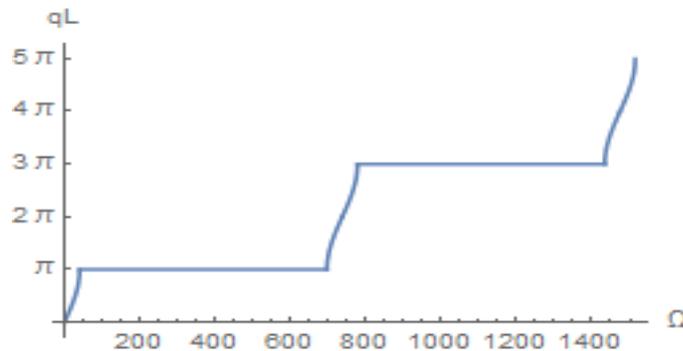
Очевидно, что когда правая часть в (2.1) по модулю больше единицы, волны отсутствуют и, тем самым, определяются диапазоны частот непропускания (среза). В противном случае волны распространяются.

В табл.1 приведены диапазоны среза (частот запираения), вычисленные по уравнению (2.1) с исходными параметрами, указанными там же.

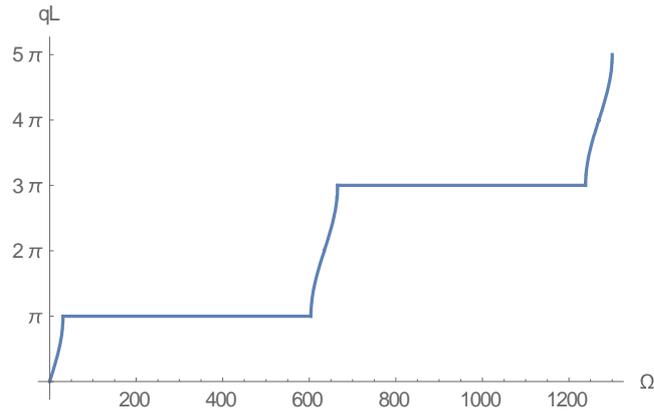
Таблица 1

Ω				
α	β	$P_0 = 0.1 \text{ МПа}, \gamma = 1.4, L = 2 \text{ м}$		
0.66	0.005	[25, 748]	[799, 1522]	[1573, 2296]
0.73	0.01	[27, 673]	[716, 1351]	[1405, 2040]
0.81	0.025	[31, 597]	[659, 1225]	[1287, 1853]
α	β	$P_0 = 0.2 \text{ МПа}, \gamma = 1.4, L = 2 \text{ м}$		
0.6	0.005	[34, 896]	[965, 1826]	[1895, 2756]
0.77	0.025	[40, 683]	[764, 1407]	[1487, 2130]

Из анализа данных табл.1 следует вывод, что с возрастанием α , т.е. увеличением газосодержания β водовоздушной смеси, ширины диапазонов среза уменьшаются, а с увеличением исходного давления P_0 частоты запираения и ширины диапазонов среза (непропускания) по величине возрастают.



Фиг.1а. Зависимость qL от Ω при $P_0 = 0.2 \text{ МПа}$,
 $\beta = 0.025$, $\alpha = 0.81$, $L = 2 \text{ м}$.



Фиг.16. Зависимость qL от Ω при $P_0 = 0.1$ МПа, $\beta = 0.025$, $\alpha = 0.81$, $L = 2$ м.

На фиг.1а и 1б показаны графики зависимости qL от безразмерной частоты Ω при соответствующих значениях $P_0 = 0.2$ МПа и $P_0 = 0.1$ МПа, которые качественно совпадают с приведённым в [6]. Из сравнения фиг.1а и 1б заключаем, что безразмерные значения частот запирания в первом случае больше по величине, чем вторые. Тот же вывод также следует из сравнения третьей и пятой строк табл.1.

Обратимся теперь к уравнению (1.7), которое в рассматриваемом случае переписывается в виде:

$$\cos qL = \cos \frac{\omega a}{c_1} \cos \frac{\omega b}{c_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_{20} c_2} + \frac{\rho_{20} c_2}{\rho_1 c_1} \right) \sin \frac{\omega a}{c_1} \sin \frac{\omega b}{c_2} \quad (2.2)$$

В табл. 2а и 2б приведены значения диапазонов частот запирания, вычисленные по уравнению (2.2) с указанными там же исходными данными. Здесь и далее главные диапазоны среза представлены первыми столбцами.

Таблица 2а

α	ω , гц ($P_0 = 0.05$ МПа, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$\beta = 0.001$		
0.7	[19, 668]	[670, 1331]	[1338, 1386]
0.8	[21, 585]	[586, 1170]	[1171, 1754]

Таблица 2б

α	ω , гц ($P_0 = 0.05$ МПа, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$\beta = 0.005$		
0.7	[19, 613]	[621, 668]	[675, 1237]
0.8	[21, 584]	[586, 928]	[932, 1170]

Из сравнения табл. 2а и 2б видно, что при фиксированном давлении и газосодержании с увеличением α значения частот и ширины главных диапазонов уменьшаются. С увеличением β значения частот убывают во всех диапазонах вне зависимости от α .

Аналогичным образом строятся таблицы 3а и 3б, которые выявляют зависимости частот запирания от величин параметров α и β , однако, при большем значении исходного давления.

Таблица 3а

α	ω , гц ($P_0 = 0.2$ МПа, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$\beta = 0.001$		
0.7	[37, 814]	[817, 1629]	[1632, 2442]
0.8	[42, 713]	[716, 1426]	[1428, 2139]

Таблица 3б

α	ω , гц ($P_0 = 0.2$ МПа, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$\beta = 0.005$		
0.7	[37, 812]	[817, 1237]	[1243, 1629]
0.8	[42, 712]	[716, 1422]	[1428, 1855]

Из сравнения данных таблиц 3а с 2а и 3б с 2б следует, что с увеличением исходного давления P_0 частоты запираия по величине возрастают во всех диапазонах для фиксированных α и β .

Таким образом, в случае отсутствия дисперсии из проведённого анализа следует вывод, что при фиксированных значениях P_0 и β с увеличением α частоты запираия в главных диапазонах убывают с уменьшением их ширины. С увеличением β частоты во всех диапазонах запираия убывают. С увеличением P_0 при фиксированных α и β частоты по величине возрастают во всех диапазонах среза.

3. Наличие дисперсии. Перейдём к численному исследованию полного уравнения (1.7), которое перепишем в развёрнутой форме.

$$\cos qL = \cos \frac{\omega_1 a}{c_1} \cos \frac{\omega b}{c_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \sin \frac{\omega_1 a}{c_1} \sin \frac{\omega b}{c_2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{1 - (1 - \beta) \frac{\omega^2}{\omega_{ar}^2}}$$

В табл. 4а и 4б показаны диапазоны среза, определяемые из решений уравнения (3.1) с указанными исходными параметрами.

Таблица 4а

α	ω , гц ($R = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $\beta = 0.001$, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$P_0 = 0.05$ МПа		
0.7	[19, 668]	[670, 1151]	[1153, 1337]
0.8	[21, 585]	[586, 1169]	[1171, 1468]

Таблица 4б

α	ω , гц ($R = 7 \cdot 10^{-4}$ м, $\beta = 0.001$, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$P_0 = 0.05$ МПа		
0.7	[19, 668]	[670, 1331]	[1338, 1383]
0.8	[21, 585]	[586, 1170]	[1171, 1754]

Уменьшение радиуса пузырька при фиксированных прочих параметрах не влияет на значения частот запираия из главных диапазонов, а в остальных, т.е. при более высоких частотах, возрастают по величине.

Влияние исходного давления при более высоком его значении, а также газосодержания проиллюстрированы в табл. 5а и 5б.

Таблица 5а

α	ω , гц ($R = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $\beta = 0.001$, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$P_0 = 0.2$ МПа		
0.7	[37, 814]	[817, 1629]	[1632, 2300]
0.8	[42, 713]	[716, 1426]	[1428, 2139]

Таблица 5б

α	ω , гц ($R = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $\beta = 0.005$, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$P_0 = 0.2$ МПа		
0.7	[37, 812]	[817, 1186]	[1991, 1629]
0.8	[42, 712]	[716, 1422]	[1428, 1696]

С увеличением β при фиксированных остальных исходных данных частоты во всех диапазонах среза убывают. Сравнения данных табл. 5а и 4а указывают, что с увеличением P_0 частоты запираия во всех диапазонах возрастают по величине.

Из сравнения диапазонов табл. 4а и 2а видно, что в главных из них влияние дисперсии отсутствует. Она проявляется при более высоких возбуждающих частотах ω и уменьшает их значения.

Таким образом, увеличение α приводит к уменьшению ширины главных диапазонов, а с увеличением β и P_0 частоты запираия во всех диапазонах соответственно убывают и возрастают. Дисперсия проявляется для больших значений частот и приводит к их уменьшению по величине в сравнении с её отсутствием.

Заключение. Исследуются случаи, когда в замкнутом канале с газожидкостной смесью существуют пробки, первая из которых наполнена смесью с очень малым газосодержанием, а вторая – газом. Полагается, что структура стационарного режима является квазипериодической. Выведено дисперсионное уравнение зависимости волнового числа Блоха всей ячейки от волновых чисел пробок. В качестве примера рассмотрены пробки из водовоздушной смеси и воздуха. Численная реализация уравнения позволяет выявить диапазоны частот запираия (стреза), при которых волна отсутствует, а вне их присутствует.

При обобщении результатов исследования на случаи других исходных параметров можно обнаружить, что при фиксированных прочих параметрах значения частот запираия:

- с увеличением газосодержания β уменьшаются во всех диапазонах среза, как и их ширина,
- с увеличением ширины α второй пробки убывает лишь в главных диапазонах,
- с увеличением давления P_0 возрастают во всех диапазонах, как и ширины главных из них,

- с увеличением размера пузырька R не меняются в главных диапазонах. Эффект увеличения замечен в остальных диапазонах для высоких и сверхвысоких частот,
 - с увеличением ширины L всей ячейки убывают во столько же раз.
- Дисперсия волны проявляется при очень высоких частотах и приводит к уменьшению их значений в сравнении с её отсутствием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Martin C.S., Padmanabhan M. Pressure Pulse Propagation in Two–Component Slug Flow // Trans. of the ASME. Vol.101. №1. 1979. Русский перевод – Распространение импульса давления в двухкомпонентном снарядном потоке. // Теорет. основы инженерных расчётов. 1979. Т.101. №1. С.161-171.
2. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с.
3. Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Об одной модели снарядного потока газожидкостной смеси // Проблемы динамики взаимодействия деформ. сред. Труды VIII межд. конф., сентябрь 22-26, 2014, Горис–Степанакерт. Ереван, 2014. С.340-344.
4. Бриллюэн А., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 448с.
5. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками. М.: Наука, 1989. 288с.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384с.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

Сведения об авторах:

Григорян Шушаник Акоповна, к. ф.-м. н., доцент кафедры «Математика и математическ. Моделирования» Российско-Армянского (Славянского) университета.

Адрес: 0051, Ереван, ул. Овсепя Эмина, 123, **тел.:** (+37494) 284-718,

E-mail: grig-shushanik@rambler.ru

Оганян Гагик Гришаевич, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2,

тел.: (+37493) 946-947, **E-mail:** oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Леонович, к.ф.-м.н., ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. Математики, ЕГУ.

Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, **тел.:** (+37477) 002-408 (моб.)

E-mail: ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 29.04.2015