

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ
МАГНИТОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ
ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ (НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ) ТОНКИХ
БАЛОК С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И
ВРАЩЕНИЙ**

Саркисян Л. С., Саркисян С. О.

Ключевые слова: микрополярный, электропроводящий, магнитоупругость, модель, тонкий, балка

Key words: micropolar, electrically conductive, magnetoelasticity, model, thin, bar

Բանալի բառեր. Միկրոպոլյար, էլեկտրահաղորդիչ, մագնիսաառաձգականություն, մոդել, բարակ, հեծան

Սարգսյան Լ. Ս., Սարգսյան Ս. Ն.

Էլեկտրահաղորդիչ (ոչ ֆերոմագնիսական) տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար բարակ հեծանների ծոման դեֆորմացիայի մագնիսաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելը

Աշխատանքում բերվում են բարակ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի մագնիսաառաձգականության հարթ լարվածային վիճակի հիմնական հավասարումները, եզրային և նախնական պայմանները: Ենթադրելով այնուհետև, որ ուղանկյուն զուգահեռանիստի միջին հարթությունը արտահայտող ուղղանկյան բարձրությունը շատ անգամ փոքր է նրա երկարությունից, ուղղանկյուն զուգահեռանիստը վերափոխվում է բարակ հեծանի մոդելի: Ընդունելով ասիմպտոտիկ հիմնավորում ունեցող վարկածներ, կառուցվում է միկրոպոլյար առաձգական էլեկտրահաղորդիչ բարակ հեծանի մագնիսաառաձգականության կիրառական միաչափ մոդելը: Այս մոդելի համար արտաձվում է էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումը, արդյունքում ապացուցվելով, որ բարակ հեծանի մագնիսաառաձգականության եզրային-նախնական խնդիրը ունի միակ լուծում:

Sargsyan L. S., Sargsyan S. H.

Mathematical model of bending deformation of magnetoelasticity of micropolar electrically conductive (non ferromagnetic) thin bars with free fields of displacements and rotations

In the present paper equations, boundary and initial conditions of magnetoelasticity are introduced for stress strain state of thin rectangular parallelepiped. Further, accepting that the height of the rectangle, which introduces the middle plane of the parallelepiped, is smaller compared with its length, rectangular parallelepiped is converted to the model of thin bar. Accepting asymptotically confirmed hypotheses, applied one-dimensional model of magnetoelasticity of micropolar thin bars is constructed. Energy balance equation is obtained for this model and, as a result, it is proved that the initial-boundary value problem of magnetoelasticity of micropolar thin bar has a unique solution.

В работе приведены основные уравнения, граничные и начальные условия магнитоупругости для плоского напряжённого состояния тонкого прямоугольного параллелепипеда. Далее, допуская, что высота прямоугольника, который представляет собой срединную плоскость параллелепипеда, намного меньше его длины, прямоугольный параллелепипед преобразуется в модели тонкой балки. Принимая гипотезы, которые имеют асимптотическую почву, построена прикладная одномерная модель магнитоупругости микрополярных тонких балок. Для этой модели выводится уравнение баланса энергии, в результате, доказывая, что начально-краевая задача магнитоупругости микрополярной тонкой балки имеет единственное решение.

Введение. В деле построения общей прикладной теории магнитоупругости тонких пластин и оболочек на основе классической теории упругости основополагающими были гипотезы магнитоупругости тонких тел [1-4]. В работе [5] асимптотическим методом, как полагается, подробно изучена сингулярно-возмущённая с малым

геометрическим параметром начально-краевая задача (в классической постановке) трёхмерной линейной теории магнитоупругости для тонкой оболочки, и построена асимптотическая теория магнитоупругости тонких оболочек. Далее, в работе [5], на основе асимптотического подхода выявлены основные качественные характеристики поведения решения трёхмерной задачи магнитоупругости в тонкой области оболочки, сформулированы адекватные гипотезы, обобщающие гипотезы магнитоупругости тонких пластин и оболочек работ [1-4] и, таким образом, построена асимптотически обоснованная прикладная теория магнитоупругости тонких пластин и оболочек.

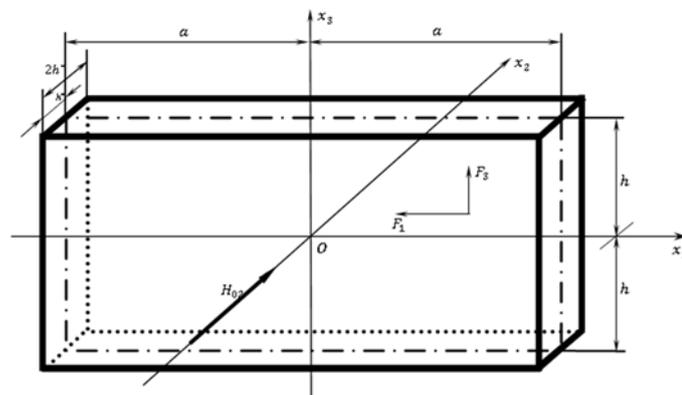
В работах [6-9], на основе аналогичного подхода построены асимптотически обоснованные прикладные теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

В работах [10, 11] формулированы трёхмерные задачи магнитоупругости микрополярных тел с независимыми полями перемещений и вращений. В работах [12, 13] изучено асимптотическое поведение решения начально-краевой задачи микрополярной магнитоупругости в тонкой области оболочки, сформулированы адекватные гипотезы и построена прикладная теория магнитоупругости микрополярных тонких оболочек.

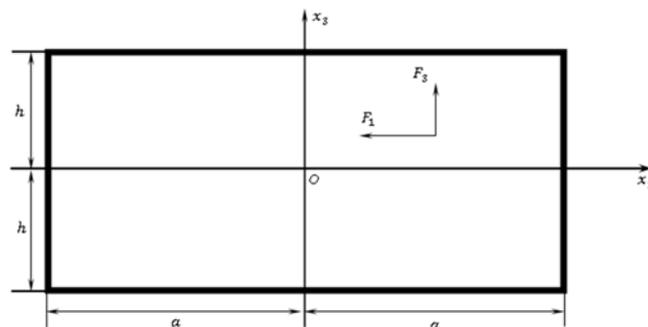
В данной работе формулируются гипотезы, имеющие асимптотическую почву, на основе которых построена математическая модель изгибной деформации магнитоупругости микрополярных тонких балок.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу магнитоупругости изгибной деформации изотропного микрополярного электропроводящего прямоугольного параллелепипеда постоянной высоты $2h$, длины $2a$ и толщины $2h^*$, находящегося в начальном постоянном магнитном поле напряжённости $\vec{H}_0 = \{0, H_{02}, 0\}$ (фиг.1).

а)



б)



Фиг.1

Координатная плоскость x_1x_3 помещена в срединной плоскости параллелепипеда, ось x_3 направлена по высоте, а ось x_1 – по длине параллелепипеда. Предположим, что параллелепипед тонкий ($2h^* \ll 2a$, $2h^* \ll 2h$) и в нём осуществлено плоское напряжённое магнитоупругое состояние в направлении оси x_2 [11]. В этом случае задачу магнитоупругости можем рассматривать в срединной плоскости пластинки параллелепипеда x_1x_3 (рис. 1б).

Основные группы уравнений плоской задачи микрополярной магнитоупругости с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид [11]:

I. Уравнения плоской задачи микрополярной теории упругости с учётом сил электромагнитного происхождения:

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + F_1 &= \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 &= \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} - (\sigma_{13} - \sigma_{31}) &= J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

здесь $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$ – силовые напряжения; μ_{12}, μ_{32} – моментные напряжения; U_1, U_3 – перемещения, ω_2 – свободный поворот точек прямоугольника; ρ – плотность, J – мера инерции при вращении микрополярного материала; F_1 и F_3 – проекции силы электромагнитного происхождения ($\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{H}_0 \cdot \vec{j}$) на оси x_1 и x_3 , которые выражаются так:

$$F_1 = -\frac{1}{c} H_{02} \cdot j_3, \quad F_3 = \frac{1}{c} H_{02} \cdot j_1, \quad (1.2)$$

где j_1, j_3 – проекции на оси x_1 и x_3 вектора плотности электрического тока проводимости $\vec{j} = \{j_1, j_2, j_3\}$, возбуждённого в параллелепипеде, c – скорость света в пустоте. Для вектора \vec{j} имеем:

$$\vec{j} = \sigma \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right], \quad (1.3)$$

здесь \vec{E} – вектор напряжённости электрического поля, возбуждённого в параллелепипеде; σ – электропроводимость материала параллелепипеда. Компоненты вектора \vec{j} выражаются так:

$$j_1 = \sigma \left[E_1 - \frac{1}{c} H_{02} \frac{\partial U_3}{\partial t} \right], \quad j_2 = \sigma E_2, \quad j_3 = \sigma \left[E_1 + \frac{1}{c} H_{02} \frac{\partial U_3}{\partial t} \right]; \quad (1.4)$$

Физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{33}), & \gamma_{13} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \omega_2 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{13} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{31}, \\ \gamma_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu \sigma_{11}), & \gamma_{31} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \omega_2 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{31} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{13}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = \frac{1}{B} \mu_{12}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = \frac{1}{B} \mu_{32}.$$

где $\gamma_{11}, \gamma_{33}, \gamma_{13}, \gamma_{31}$ – деформации; χ_{12}, χ_{32} – изгибы-кручения;

$E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \alpha, B$ – упругие постоянные микрополярного материала.

II. Уравнения квазистационарной электродинамики во внутренней области параллелепипеда (эти уравнения приведены в рационализованной системе единиц СГС):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{1}{c} \vec{j}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{h} &= 0, & \operatorname{div} \vec{E} &= \rho_e. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь \vec{h} – вектор напряжённости магнитного поля, возбуждённого в параллелепипеде; ρ_e – объёмная плотность электрического заряда в параллелепипеде.

В основе написанной системы уравнений Максвелла (1.6) (уравнения квазистационарной электродинамики) лежит пренебрежение током смещения при изучении явления механического поведения упругого параллелепипеда [14-16].

Отметим, что для электропроводящих тел [14-16] величины диэлектрической проницаемости ϵ и магнитной проницаемости μ не будут отличаться от их значений для вакуума, т.е. $\epsilon = 1, \mu = 1$ и, этим самым, векторы напряжённости и индукций \vec{E} и \vec{d}, \vec{h} и \vec{b} (\vec{d} – вектор электрической индукции, а \vec{b} – вектор магнитной индукции) не будут различаться.

Отметим также, что из системы уравнений квазистатической электродинамики (1.6) следует следующее векторное уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.7)$$

III. Уравнения квазистационарной электродинамики для вакуума (в бесконечной области трёхмерного пространства, окружающей параллелепипед):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E}^{(e)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} &= 0, & \operatorname{div} \vec{E}^{(e)} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\vec{h}^{(e)}, \vec{E}^{(e)}$ – векторы напряжённости магнитной и электрической полей, возбуждённых в вакууме.

При изучении задачи магнитоупругого изгиба микрополярного прямоугольника в плоскости $x_1 x_3$, следует иметь в виду, что $U_3, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \omega_2, \mu_{12}, E_1, E_2, h_3, \rho_e, j_1$ – чётные по x_3 функции, а $U_1, \sigma_{11}, \sigma_{33}, \mu_{32}, h_1, h_2, E_3, j_3$ – нечётные по x_3 функции.

К уравнениям микрополярной магнитоупругости (1.1)-(1.8) следует присоединить граничные и начальные условия.

Как механические граничные условия, будем считать, что на лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$ заданы силовые и моментные напряжения. Эти граничные условия имеют тот же вид, что и имели место в задаче теории упругости без участия

электромагнитного поля [16], это потому, что принимая условия $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, этим самым, на границе раздела сред (в данном случае упругого электропроводящего тела и вакуума) разность тензоров напряжений Максвелла равна нулю.

Таким образом, на лицевых линиях прямоугольника для задачи изгиба механические граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2} q_1, \quad \sigma_{33} = \pm \frac{1}{2} q_3, \quad \mu_{32} = \pm \frac{1}{2} m_2 \quad \text{при } x_3 = \pm h. \quad (1.9)$$

На торцевых граничных линиях прямоугольника $x_1 = \pm a$ могут быть заданы как силовые и моментные напряжения, так и перемещения и поворот, либо смешанный их вариант.

На граничных плоскостях раздела параллелепипеда и вакуума должны выполняться граничные условия электродинамики [17] с учётом условий $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Согласно этим граничным условиям, имеем, что тангенциальные компоненты вектора \vec{E} и все три компоненты вектора \vec{h} на плоскостях раздела двух сред непрерывны, нормальная же компонента вектора \vec{E} будет претерпевать разрыв (это означает, что на плоскостях раздела сред будут проявляться поверхностные распределённые электрические заряды).

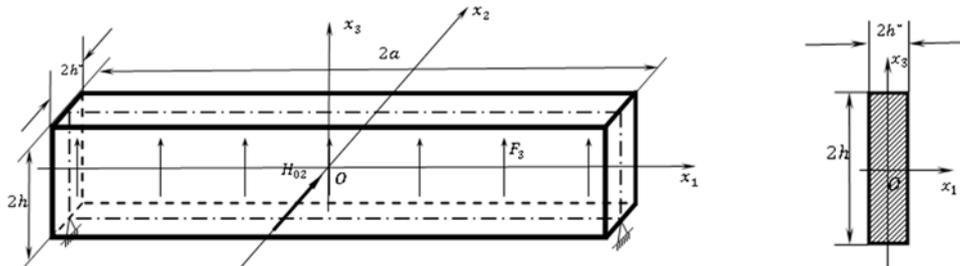
Кроме этого, для компонент вектора плотности электрического тока имеют место следующие естественные граничные условия:

$$j_1|_{x_1=\pm a} = 0, \quad j_3|_{x_3=\pm h} = 0. \quad (1.10)$$

Начальные условия будут характеризовать движение тела и изменения возбуждённого электромагнитного поля (как в теле, так и в вакууме) в начальный момент времени $t = 0$.

Отметим следующее. Механические величины: $U_1, U_3, \omega_2, \sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \mu_{32}, \mu_{12}$ – функции от x_1, x_3, t , U_2 – функция от x_1, x_2, x_3, t [18]. Что касается величин электромагнитного поля (как во внутренней, так и во внешней задачах), то можем констатировать, что j_1, j_3, E_1, E_3 и ρ_e – функции от x_1, x_3, t (ниже убедимся, что h_2 – тоже функция от x_1, x_3, t), а остальные характеристики электромагнитного поля h_1, h_3, E_2 – функции от x_1, x_2, x_3, t .

2. Основные гипотезы построения модели магнитоупругости микрополярных тонких балок. Допустим теперь, что одновременно с неравенствами $2h^* \ll 2h$, $2h^* \ll 2a$, имеет место также неравенство $2h \ll 2a$. В этом случае получим, что два поперечных размера параллелепипеда $2h^*$ и $2h$ одновременно намного меньше его размера по длине $2a$. Это означает, что при таких условиях параллелепипед переходит в качестве тонкого стержня (в нашем случае – тонкой балки, т.к. изучаем задачу изгиба (фиг. 2)).



Фиг.2

В классической теории упругости, используя либо метод многочленов и принцип Сен-Венана [19], либо асимптотический метод [20], из двумерных уравнений плоского напряжённого состояния возможен переход к прикладной модели упругой балки. В работе [21] из двумерных уравнений микрополярной упругости асимптотическим методом (а в работе [6] формулированием адекватных гипотез) осуществлён переход к прикладной модели микрополярных балок.

Основными предпосылками для построения прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких балок будут представлять сформулированные ниже гипотезы, которые адекватно выражают свойства асимптотического решения начально-краевой задачи плоской микрополярной магнитоупругости (1.1)-(1.9) в тонком прямоугольнике (т.е. когда $2h \ll 2a$ или $\delta = \frac{h}{a} \ll 1$, который представляет собой малый геометрический параметр задачи).

Принятые ниже гипотезы можем разделить на две группы:

а) кинематические и статические гипотезы построения динамической теории изгибной деформации микрополярной балки [6, 22];

б) обобщённые гипотезы магнитоупругости тонких тел [5].

Теперь сформулируем указанные гипотезы более обстоятельно.

1) Кинематическая гипотеза [6,22]. Будем считать, что нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии прямоугольника Ox_1 , остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Кроме того, примем, что свободный поворот ω_2 – постоянная по координате x_3 функция.

Вследствие этого имеем следующий закон изменения перемещений U_1, U_3 и свободного поворота ω_2 по координате x_3 :

$$U_3 = w(x_1, t), \quad U_1 = x_3 \cdot \Psi_1(x_1, t), \quad (2.1)$$

$$\omega_2 = \Omega_2(x_1, t), \quad (2.2)$$

где w – прогиб балки; Ω_2 – угол свободного поворота нормального элемента, а Ψ_1 – полный угол поворота нормального элемента.

Гипотеза (2.1) для перемещений – это известная классическая кинематическая гипотеза Тимошенко [23] для построения модели изгибной деформации динамики упругой тонкой балки с учётом поперечного сдвига. Кинематическая гипотеза (2.1), (2.2) в целом, как в работе [6-9, 22], назовём гипотезой Тимошенко, обобщённой на микрополярный случай;

2) Статические гипотезы [6, 22]: а) В законе Гука (1.5), в формуле для деформаций γ_{11} , силовым напряжением σ_{33} будем пренебрегать относительно силового напряжения σ_{11} ; б) при определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}^0(x_1, t). \quad (2.3)$$

После полного определения указанных выше величин, значение σ_{31} окончательно определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первого уравнения движения из (1.1) с требованием условия, что усреднённая по высоте прямоугольника (по координате x_3) величина, полученная после указанного интегрирования, была равна нулю.

3) Гипотезы электромагнитного поля в целом [1-4, 5]: а) Предположим, что тангенциальные компоненты вектора напряжённости возбуждённого электрического

поля и нормальная компонента возбуждённого магнитного поля во внутренней задаче квазистатической электродинамики – постоянные по координате x_3 функции, т.е.

$$E_1 = E_{10}(x_1, t), \quad E_2 = E_{20}(x_1, x_2, t), \quad h_3 = h_{30}(x_1, x_2, t); \quad (2.4)$$

б) компонентой j_3 вектора плотности электрического тока проводимости \vec{j} можем пренебрегать;

в) при рассмотрении электромагнитного поля во внешней задаче (в вакууме), внешнюю область можем считать как всю двумерную плоскость с разрезом по средней линии прямоугольника и считать, что по линии этого разреза течёт электрический ток, который представляет собой усреднённый ток по высоте прямоугольника, т.е. величина:

$$j_{10} = \int_{-h}^h j_1 dx_3. \quad (2.5)$$

3. Определение расчётных величин напряжённо-деформированного состояния и электромагнитного поля.

На основе принятых гипотез ((2.1),(2.4)) и первой формулы из (1.4) для объёмной плотности электрического тока j_1 будем иметь:

$$j_1 = j_1(x_1, t) = \sigma \left(E_{10}(x_1, t) - \frac{1}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t} \right). \quad (3.1)$$

Как видно из формулы (3.1), ток j_1 по высоте прямоугольника (т.е по координате x_3) распределён равномерно, следовательно, осреднённое значение этого тока по высоте прямоугольника (т.е. величина (2.5)) примет вид:

$$j_{10} = j_{10}(x_1, t) = 2\sigma h \left(E_{10}(x_1, t) - \frac{1}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t} \right). \quad (3.2)$$

Для проекций F_1 и F_3 силы электромагнитного происхождения с учётом формулы (3.2) и гипотезы 3б) получим:

$$F_1 = 0, \quad F_3 = \frac{1}{2hc} H_{02} \cdot j_{10}(x_1, t). \quad (3.3)$$

Используя кинематическую гипотезу ((2.1), (2.2)), из уравнений (1.3) для деформаций, изгибов-кручений будем иметь:

$$\gamma_{11} = x_3 \cdot K_{11}, \quad \gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{13} = \Gamma_{13}, \quad \gamma_{31} = \Gamma_{31}, \quad (3.4)$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \quad \chi_{32} = 0,$$

где приняты следующие обозначения:

$$K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}.$$

Имея в виду формулы кинематической гипотезы ((2.1), (2.2)), формулы (3.4) и статические гипотезы, для силовых и моментных напряжений получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= x_3 \cdot E \cdot K_{11}, & \sigma_{13} &= (\mu + \alpha)\Gamma_{13} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}, \\
\sigma_{31} &= (\mu + \alpha)\Gamma_{31} + (\mu - \alpha)\Gamma_{13}, & \sigma_{33} &= -x_3 \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{2hc} H_{02} \cdot j_{10} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \\
\mu_{12} &= B \cdot k_{12}, & \mu_{32} &= x_3 \left[-\frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + (\sigma_{13} - \sigma_{31}) + J \cdot \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} \right], \\
\sigma_{31} &= \sigma_{31}^0(x_1, t) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \rho \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\sigma_{11}^1 = E \cdot K_{11}. \tag{3.7}$$

Если использовать следующее физико-геометрическое уравнение плоского напряжённого состояния [18]

$$\gamma_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33}),$$

которое с учётом статической гипотезы 2а) примет вид

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11},$$

имея в виду формулу для σ_{11} из (3.6), для перемещения U_2 будем иметь:

$$U_2 = -x_2 x_3 \nu K_{11} = -x_2 x_3 \nu \frac{\partial \psi_1(x_1, t)}{\partial x_1}. \tag{3.8}$$

Теперь об определении величин электромагнитного поля во внутренней задаче.

Из первого скалярного уравнения векторного уравнения $\text{rot} \vec{h} = \frac{1}{c} \vec{j}$

(см. формулы (1.6)), для h_2 получим:

$$h_2(x_1, x_3, t) = x_3 \cdot h_2^1(x_1, t), \tag{3.9}$$

$$\text{где } h_2^1 = -\frac{1}{2hc} j_{10}(x_1, t). \tag{3.10}$$

Отметим, что при получении формулы (3.9), относительно $j_1(x_1, t)$ было пренебрежено величинами $\frac{\partial h_3}{\partial x_2}$ [5].

На основе кинематической гипотезы для перемещений, гипотезы 3б), а также принимая в виду вторую из (1.4) формулу, для E_3 будем иметь:

$$E_3 = -x_3 \frac{1}{c} H_{02} \frac{\partial \psi_1(x_1, t)}{\partial t}. \tag{3.11}$$

Рассмотрев третье скалярное уравнение векторного уравнения $\text{rot}\vec{h} = \frac{1}{c}\vec{j}$ (т.е. уравнение: $\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = 0$), имея в виду формулу (3.9) для h_2 (а также формулу (3.10)),

для h_1 получим:

$$h_1 = -x_2 x_3 \frac{1}{2hc} \frac{\partial j_{10}(x_1, t)}{\partial x_1}. \quad (3.12)$$

Для определения величин h_3, E_2 имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = \frac{1}{c} j_2, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_3}{\partial t}, \quad (3.13)$$

$$j_2 = \sigma E_2.$$

Отметим, что первая из (3.13) формул представляет собой второе скалярное уравнение векторного уравнения $\text{rot}\vec{h} = \frac{1}{c}\vec{j}$; второе уравнение из (3.13) – третье

скалярное уравнение из векторного уравнения $\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$ (см. (1.6)); третье уравнение из (3.13) – это последнее из (1.4) уравнение.

Систему уравнений (3.13) можем привести к уравнению относительно h_3 следующего вида:

$$\frac{\partial^2 h_3}{\partial x_1^2} = \frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial h_3}{\partial t} - x_2 \frac{1}{2hc} \frac{\partial^2 j_{10}(x_1, t)}{\partial x_1^2}. \quad (3.14)$$

После решения этого уравнения E_2 определяется по формуле:

$$E_2 = \frac{c}{\sigma} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right), \quad (3.15)$$

в котором h_1 определяется формулой (3.12).

Зная $E_1 = E_{10}(x_1, t)$, $E_2 = E_{20}(x_1, x_2, t)$ и $E_3 = E_{30}(x_1, x_3, t)$, величину ρ_e определим из четвёртого уравнения системы (1.6).

Забегая вперёд, отметим, что те величины, которые одновременно функции и от x_2 (это $U_2, h_1, h_3, E_2, \rho_e$), они не будут входить в систему разрешающих уравнений прикладной модели микрополярной магнитоупругости тонких балок. Они все будут определены после решения основной начально-граничной задачи указанной прикладной модели.

Перейдём теперь к определению характеристик электромагнитного поля во внешней задаче (в вакууме).

Основываясь на гипотезе 3б), систему уравнений (1.8) внешней задачи электромагнитного поля можем представить так:

$$\text{rot}\vec{h}^{(e)} = \frac{1}{c} \delta(x_3) \theta(-a \leq x_1 \leq a) \vec{j}, \quad \text{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

$$\text{div}\vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div}\vec{E}^{(e)} = 0,$$

где $\delta(x_3)$ – дельта-функция Дирака, а $\theta(-a \leq x_1 \leq a)$ – функция Хевисайда, а вектор \vec{j} имеет вид:

$$\vec{j} = \begin{Bmatrix} j_{10} \\ j_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

j_{10} выражается формулой (3.2), а j_2 – последней формулой из системы (3.13).

Если из обеих частей векторного уравнения $\text{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}$ взять оператор rot , используя первое векторное уравнение из системы (3.16), получим:

$$\text{rotrot}\vec{E}^{(e)} = -\delta(x_3)\theta(-a \leq x_1 \leq a) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right). \quad (3.18)$$

Далее, используя известное векторное тождество [17]

$$\text{rotrot}\vec{E}^{(e)} = \text{graddiv}\vec{E}^{(e)} - \Delta\vec{E}^{(e)}$$

где $\Delta(\cdot)$ – оператор Лапласа, имея в виду последнее из (3.16) уравнение, вместо (3.18) получим следующее уравнение:

$$\Delta\vec{E}^{(e)} = \delta(x_3)\theta(-a \leq x_1 \leq a) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right). \quad (3.19)$$

Так как координатная система x_1, x_2, x_3 – прямоугольная декартова, следовательно, векторное уравнение (3.19) расщепляется на три отдельные скалярные уравнения относительно $E_1^{(e)}, E_2^{(e)}, E_3^{(e)}$, при этом, при вычислении правых частей этих уравнений необходимо учесть формулу (3.17).

Следует считать, что $E_1^{(e)}$, как и его внутренний аналог E_1 , не зависит от x_2 , т.е. это функция от x_1, x_3 и t , тогда, первое скалярное уравнение, вытекающее из векторного уравнения (3.19), примет вид:

$$\frac{\partial^2 E_1^{(e)}(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E_1^{(e)}(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} = \delta(x_3)\theta(-a \leq x_1 \leq a) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right), \quad (3.20)$$

где точки (x_1, x_3) принадлежат всей двумерной евклидовой плоскости. На бесконечности имеем условия затухания [17].

Имея в виду, что для уравнения Лапласа в двумерном случае функция Грина выражается формулой [24]

$$\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_1'}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{a} \right)^2}, \quad (3.21)$$

решение уравнения (3.20) можем представить так:

$$E_1^{(e)}(x_1, x_3, t) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \ln \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_1'}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{a} \right)^2} \cdot \frac{\partial j_{10}}{\partial t} dx_1', \quad (3.22)$$

где $(x_1, x_3) \in R^{(2)}$ ($R^{(2)}$ – вся евклидова плоскость).

Отметим, что для вычисления величин $E_2^{(e)}, E_3^{(e)}$ и $h_k^{(e)}(k=1,2,3)$ можем получить соответствующие интегральные формулы.

4. Построение прикладной модели магнитоупругости динамической изгибной деформации микрополярных тонких балок. С целью приведения двумерной задачи магнитоупругости для микрополярного тонкого прямоугольника к одномерной, что уже выполнено для перемещений, поворота, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, а также, для величин, характеризующих электромагнитное поле, в модели тонких балок вместо компонентов тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики [6]: усилия N_{13}, N_{31} и моменты M_{11}, L_{12} , которые выражаются следующими формулами:

$$N_{13} = \int_{-h}^h \sigma_{13} dx_3, \quad N_{31} = \int_{-h}^h \sigma_{31} dx_3, \quad M_{11} = \int_{-h}^h x_3 \cdot \sigma_{11} dx_3, \quad L_{12} = \int_{-h}^h \mu_{12} dx_3. \quad (4.1)$$

Используя формулы для $\sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{11}, \mu_{12}$ ((3.6)), при помощи формул (4.1) получим физические соотношения упругости для микрополярной балки:

$$\begin{aligned} N_{13} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{13} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{31}, \\ N_{31} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{31} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{13}, \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} \cdot K_{11}, \quad L_{12} = 2Bh \cdot k_{12}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отметим, что формулы (3.5) будут представлять собой геометрические соотношения изгибной деформации микрополярной тонкой балки.

Если использовать формулы для $\sigma_{33}, \sigma_{31}, \mu_{32}$ (см. (3.6)), тогда удовлетворяя граничным условиям (1.9) на лицевых линиях прямоугольника, приходим к следующим уравнениям движения микрополярной балки с учётом сил электромагнитного происхождения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{c} H_{02} \cdot j_{10} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q_3, \\ N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= q_1 \cdot h, \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} &= 2Jh \cdot \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - m_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отметим, что в первом уравнении движения из системы (4.3) величина $j_{10}(x_1, t)$ – неизвестная функция (которая представляет собой усреднённую по высоте тонкого прямоугольника плотность электрического тока электропроводимости), поэтому для придания замкнутости систем уравнений (4.3), (4.2) и (3.5), необходимо отдельное уравнение для определения величины $j_{10}(x_1, t)$. Для этого обращаемся к выражению (3.22).

Подставляя в этой формуле $x_3 = 0$ и изменяя x_1 от $-a$ до a , используя при этом, что $E_1^{(e)}(x_1, 0, t) \Big|_{x_1 \in [-a, a]} = E_{10}(x_1, t)$, приходим к следующему уравнению:

$$E_{10}(x_1, t) = \frac{1}{2\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1', \quad a \leq x_1 \leq a. \quad (4.4)$$

Теперь используя формулу (3.2), выражая E_{10} через j_{10} , вместо уравнения (4.4) приходим к следующему интегродифференциальному (дифференцирование по времени) уравнению относительно функции $j_{10}(x_1, t)$:

$$j_{10}(x_1, t) = \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$-a \leq x \leq a.$$

Для $j_{10}(x_1, t)$ на границах отрезка $[-a, a]$ имеем естественные граничные условия (которые фактически выражают граничные условия (1.10) для j_1):

$$j_1(x_1, t)|_{x_1=-a} = 0, \quad j_1(x_1, t)|_{x_1=a} = 0. \quad (4.6)$$

Для механической части задачи граничные условия (напр., при $x_1 = a$) выражаются так [6]:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \Psi_1 = \Psi_1^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \Omega_2 = \Omega_2^*. \quad (4.7)$$

Необходимо задавать также начальные условия при $t = 0$ для величин

$$\Psi_1, \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_2, \frac{\partial \Omega_2}{\partial t}, j_{10}.$$

Уравнения движения (4.3), соотношения упругости (4.2), геометрические соотношения (3.5), интегродифференциальное уравнение (4.5), граничные условия (4.7), (4.6) и начальные условия определяют прикладную модель магнитоупругости микрополярных электропроводящих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений. В этой модели полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Если подставить (3.5) в (4.2) и полученное – в уравнения движения (4.3), получим разрешающую систему уравнений магнитоупругости тонких балок, в которой определяемые функции будут $w(x_1, t)$, $\Psi_1(x_1, t)$, $\Omega_2(x_1, t)$ и $j_{10}(x_1, t)$:

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (\mu - \alpha) \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + 2\alpha \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} + \frac{1}{c} \cdot \frac{H_{02}}{2h} j_{10} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q_3}{2h}, \\ (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) \Psi_1 - 2\alpha \Omega_2 - \frac{Eh^2}{3} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{\rho h^2}{3} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + \frac{q_1}{2}, \\ B \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1^2} - 2\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \Psi_1 - 4\alpha \Omega_2 &= J \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - \frac{m_2}{2h}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$j_{10}(x_1, t) = \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}, \quad -a \leq x_1 \leq a.$$

К системе уравнений (4.8) необходимо присоединить граничные условия (4.7), (4.6) и начальные условия.

Когда край балки (напр., $x_1 = a$) жёстко защемлён или шарнирно опёрт, граничные условия выразятся так:

$$a) \text{ жёсткое защемление: } w = 0, \quad \Psi_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad j_{10} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = a; \quad (4.9)$$

б) шарнирное опирание:

$$w = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = 0, \quad j_{10} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = a. \quad (4.10)$$

Если в модели (4.3), (4.2), (3.5), (4.9), (4.7), (4.6) магнитоупругости микрополярных тонких балок считать, что

$$\Psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad (4.11)$$

то, во-первых, вместо обобщённой кинематической гипотезы Тимошенко (2.1), (2.2), получим обобщённый на микрополярный случай кинематическую гипотезу Бернулли и, во-вторых, сохраняя при этом статические гипотезы 2), гипотезы электромагнитного поля 3), получим модель магнитоупругости микрополярных тонких балок на основе обобщённой кинематической гипотезы Бернулли.

Если в физических соотношениях микрополярной упругости (4.2) подставить $\alpha = 0$, то из системы (4.2), (4.3), (3.5) и граничных условий (4.7), (4.6) будет отделяться следующая подсистема уравнений и граничных условий:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{c} H_{02} \cdot j_{10} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q_3, \\ \tilde{N}_{13} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} &= q_1 \cdot h, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Физические соотношения упругости

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{13} = N_{13} = N_{31} &= 2h\mu(\Gamma_{13} + \Gamma_{31}) = 2h\mu\tilde{\Gamma}_{13}, \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} \cdot K_{11}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

Геометрические соотношения

$$\tilde{\Gamma}_{13} = \Psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad K_{11} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}. \quad (4.14)$$

К уравнениям (4.12), (4.13) следует присоединить интегродифференциальное уравнение (4.5) для линейной плотности электрического тока проводимости:

$$j_{10}(x_1, t) = \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}, \quad (4.15)$$

$$-a \leq x_1 \leq a.$$

Граничные условия (напр., при $x_1 = a$)

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad \Psi_1 = \Psi_1^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*, \quad j_{10} = 0. \quad (4.16)$$

Уравнения движения (4.12), физические соотношения упругости (4.13), геометрические соотношения (4.14), интегродифференциальное уравнение для линейной плотности тока электропроводимости (4.15), граничные условия (4.16) и начальные условия определяют прикладную теорию классической магнитоупругости тонких балок с учётом поперечных сдвигов (т.е. уточнённая теория классической магнитоупругости тонких балок).

На основе (4.12)-(4.14) можем получить разрешающую систему уравнений относительно функций w , Ψ_1 , и j_{10} :

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{c} \cdot \frac{H_{02}}{2h} j_{10} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q_3}{2h}, \\ \mu \left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \frac{Eh^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{\rho h^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{q_1}{2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$j_{10}(x_1, t) = \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t},$$

$$-a \leq x_1 \leq a.$$

К разрешающей системе уравнений (4.17) классической магнитоупругости тонких балок (при которой полностью учитываются поперечные сдвиги) следует присоединить граничные и начальные условия:

граничные условия жёсткого защемления будут (напр., для края $x_1 = a$):

$$w = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad j_{10} = 0,$$

а граничные условия шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = 0, \quad j_{10} = 0.$$

Если примем кинематическую гипотезу Бернулли $\left(\psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)$, при этом,

остальные гипотезы будем считать действующими, разрешающая система уравнений классической магнитоупругости примет следующий вид:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial t^2} - \frac{1}{c} \cdot H_{02} \cdot j_{10} &= -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_3 + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \cdot h, \\ j_{10}(x_1, t) &= \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$-a \leq x_1 \leq a,$$

где

$$D = \frac{2Eh^3}{3} \quad (4.19)$$

– классическая жёсткость балки.

К системе уравнений (4.18) следует присоединить начальные условия и следующие граничные условия:

а) жёсткого защемления

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad j_{10} = 0 \quad \text{при } x_1 = a; \quad (4.20)$$

б) шарнирного опирания

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad j_{10} = 0 \quad \text{при } x_1 = a. \quad (4.21)$$

5. Уравнение баланса энергии прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких балок. Сначала получим уравнение баланса энергии для поставленной задачи магнитоупругости микрополярного параллелепипеда.

Для этой цели умножим первое уравнение движения из (1.1) на $\frac{\partial U_1}{\partial t}$, второе – на $\frac{\partial U_3}{\partial t}$, а третье – на $\frac{\partial \omega_2}{\partial t}$, полученные равенства складываем и интегрируем по области прямоугольника: $-a \leq x_1 \leq a$, $-h \leq x_3 \leq h$, после некоторых преобразований приходим к следующему равенству:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t} + H_{02} \int_{-a}^a \int_{-h}^h j_1 \cdot \frac{\partial U_3}{\partial t} dx_1 dx_3 - \frac{1}{c} H_{02} \int_{-a}^a \int_{-h}^h j_3 \cdot \frac{\partial U_1}{\partial t} dx_1 dx_3, \quad (5.1)$$

где

$$U = \int_{-a}^a \int_{-h}^h U_0 dx_1 dx_3, \quad T = \int_{-a}^a \int_{-h}^h T_0 dx_1 dx_3, \quad (5.2)$$

$$U_0 = \frac{1}{2}(\lambda^* + 2\mu)\gamma_{11}^2 + \lambda^* \gamma_{11} \gamma_{33} + \frac{1}{2}(\lambda^* + 2\mu)\gamma_{33}^2 + \frac{1}{2}(\mu + \alpha)\gamma_{31}^2 + \frac{1}{2}(\mu + \alpha)\gamma_{13}^2 + \frac{1}{2}B\chi_{12}^2 + \frac{1}{2}B\chi_{32}^2, \quad (5.3)$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}J \cdot \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right)^2. \quad (5.4)$$

Здесь U_0 – поверхностная плотность потенциальной энергии деформации, когда материал тела микрополярно-упругий; U – полная потенциальная энергия деформации прямоугольника; T_0 – поверхностная плотность кинетической энергии, T – полная кинетическая энергия прямоугольника;

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}, \quad \lambda^* + 2\mu = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (5.5)$$

λ и μ – классические коэффициенты Ламе материала; λ^* – коэффициент Ламе в случае плоского напряжённого состояния; $\frac{\partial R}{\partial t}$ – мощность внешних краевых усилий и моментов, приложенных на краевых линиях прямоугольника: $x_1 = \pm a, x_3 = \pm h$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} = & \int_{-a}^a \left(\frac{q_1}{2} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} \Big|_{x_3=h} + \frac{q_3}{2} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial t} \Big|_{x_3=h} + \frac{m_2}{2} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{x_3=h} \right) dx_1 - \\ & - \int_{-a}^a \left(\frac{q_1}{2} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} \Big|_{x_3=-h} - \frac{q_3}{2} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial t} \Big|_{x_3=-h} - \frac{m_2}{2} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{x_3=-h} \right) dx_1 + \\ & + \int_{-h}^h \left(P_{11}^* \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} \Big|_{x_1=a} + P_{13}^* \cdot \frac{\partial V_3}{\partial t} \Big|_{x_1=a} + m_2^* \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{x_1=a} \right) dx_3 - \\ & - \int_{-h}^h \left(P_{11}^* \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} \Big|_{x_1=-a} + P_{13}^* \cdot \frac{\partial V_3}{\partial t} \Big|_{x_1=-a} + m_2^* \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{x_1=-a} \right) dx_3. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Далее, умножим скалярно первое векторное уравнение из системы (1.6) на вектор \vec{E} и используя второе векторное уравнение из системы (1.6), полученное равенство

проинтегрируем по объёму параллелепипеда, после некоторых преобразований придём к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
& c \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} [(E_3 h_2) - (E_2 h_3)] dx_2 dx_3 + c \int_{-a-h}^a \int_{-h-h^*}^h [(E_1 h_3) - (E_3 h_1)] dx_1 dx_3 + \\
& + c \int_{-a-h^*}^a \int_{-h-h^*}^{h^*} [(E_2 h_1) - (E_1 h_2)] dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} \left[\frac{\partial(h_1)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_3)^2}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \quad (5.7) \\
& = \frac{1}{2} \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} [E_1 j_1 + E_2 j_{21} + E_3 j_3] dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом поступим с уравнениями внешней задачи электродинамики (1.8), выполняя интегрирование по внешней от параллелепипеда бесконечной трёхмерной области и используя условия затухания поля на бесконечности, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}
& -c \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} [(E_3^{(e)} h_2^{(e)}) - (E_2^{(e)} h_3^{(e)})] dx_2 dx_3 - c \int_{-a-h}^a \int_{-h-h^*}^h [(E_1^{(e)} h_3^{(e)}) - (E_3^{(e)} h_1^{(e)})] dx_1 dx_3 - \\
& - c \int_{-a-h^*}^a \int_{-h-h^*}^{h^*} [(E_2^{(e)} h_1^{(e)}) - (E_1^{(e)} h_2^{(e)})] dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \iiint_{(R^3-V)} \left[\frac{\partial(h_1)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_3)^2}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad (5.8)
\end{aligned}$$

где $R^{(3)}$ означает область трёхмерного евклидова бесконечного пространства, а V – область параллелепипеда.

Теперь складываем равенства (5.7) и (5.8), используя граничные условия электродинамики на поверхностях параллелепипеда (на поверхностях раздела внутренней и внешней сред), получим равенство:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} \left[\frac{\partial(h_1)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_3)^2}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& -\frac{1}{2} \iiint_{(R^3-V)} \left[\frac{\partial(h_1^{(e)})^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2^{(e)})^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_3^{(e)})^2}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \quad (5.9) \\
& = \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} [E_1 j_1 + E_2 j_{21} + E_3 j_3] dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

И, наконец, складывая равенства (5.1) и (5.9) с учётом формул (1.4), получим следующее равенство, которое выражает уравнение баланса энергии (мощности) поставленной в пункте 1– задачи микрополярной магнитоупругости:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t} + \frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \int_{-a-h}^a \int_{-h-h^*}^h (j_1^2 + j_3^2) dx_1 dx_3 + \frac{1}{\sigma} \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} j_2^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned}
W_m &= \iiint_V W_{om} dx_1 dx_2 dx_3, \quad W_{om} = \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2), \\
W_m^{(e)} &= \iiint_{(R^{(3)}-V)} W_{om}^{(e)} dx_1 dx_2 dx_3, \quad W_{om}^{(e)} = \frac{1}{2} \left((h_1^{(e)})^2 + (h_2^{(e)})^2 + (h_3^{(e)})^2 \right). \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Здесь $W_{ом}$ и $W_{ом}^{(e)}$ – соответственно, плотность энергии возбуждённого в теле и окружающем пространстве магнитного поля, а W_m и $W_m^{(e)}$ – энергия магнитного поля в теле и вакууме; сумма последних двух интегральных слагаемых в левой части формулы (5.10) представляет собой джоулево тепло, связанное с электрическим током в теле с плотностью $\vec{j} = \{j_1, j_2, j_3\}$.

Основываясь, что в левой части уравнения (5.10) присутствующие энергии (потенциальная энергия деформации, кинетическая энергия, энергия магнитного поля и джоулево тепло) положительно-определённые квадратичные формы, известным образом легко доказать однозначность решений задачи магнитоупругости для параллелепипеда (плоское напряжённое состояние). На этой же основе, используя методы прикладного функционального анализа [25], можем доказать применимость вариационного метода Ритца для решения соответствующих начально-краевых задач и, в итоге, получить доказательство существования решений этих задач. Отметим, что для классического случая задачи магнитоупругости, доказательства этих теорем приведены в работе [5].

Перейдём теперь к выводу уравнения баланса энергии для построенной прикладной модели изгибной деформации микрополярной магнитоупругости тонких балок.

Для этой цели, применяя в основу принятые гипотезы пункта два, из уравнений баланса энергии (5.10) получим следующее уравнение баланса энергии прикладной модели микрополярной магнитоупругости тонких балок:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{W}_m}{\partial t} + \frac{\partial \hat{W}_m^{(e)}}{\partial t} + \frac{2h}{\sigma} \int_{-a}^a j_{10}^2 dx_1 + \frac{1}{\sigma} \int_{-a}^a \int_{-h}^h \int_{-h^*}^h j_2^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \hat{R}}{\partial t}, \quad (5.12)$$

$$\hat{U} = \int_{-a}^a \hat{U}_0 dx_1, \quad \hat{T} = \int_{-a}^a \hat{T}_0 dx_1, \quad (5.13)$$

$$\hat{W}_m = \int_{-a}^a \hat{W}_{0,m} dx_1, \quad \hat{W}_m^{(e)} = \iiint_{(R^3)} \hat{W}_{0,m}^{(e)} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (5.14)$$

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{2} \left[2h(\mu + \alpha) \Gamma_{13}^2 + 4x(\mu - \alpha) \Gamma_{13} \Gamma_{31} + 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{31}^2 + \frac{2Eh^3}{3} K_{11}^2 + 2Bhk_{12}^2 \right], \quad (5.15)$$

$$\hat{T}_0 = \frac{1}{2} \left[2\rho h \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{2\rho h^3}{3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right)^2 + 2Ih \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial t} = \int_{-a}^a \left(q_3 \frac{\partial W}{\partial t} + q_{1h} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + m_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \right) dx_1 + \left(M_{11}^* \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + N_{13}^* \frac{\partial W}{\partial t} + L_{12}^* \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \right) \Big|_{x_1=-a}^{x_1=a} \quad (5.17)$$

Здесь \tilde{U}_0 и \tilde{T}_0 – представляют собой соответственно линейную плотность потенциальной и кинематической энергии, а \tilde{U} и \tilde{T} – полная потенциальная и кинематическая энергии микрополярной тонкой балки.

Для плотности энергии и выражения самой энергии магнитного поля (как для внутренней, так и для внешней задач электродинамики) можно применить те же формулы (5.11) (с учётом конкретных зависимостей слагаемых от координат).

Легко убедиться, что для начально-краевой задачи (4.3), (4.2), (3.5), (4.5), (4.6), (4.7) имеет место теорема единственности.

6. Заключение. Основная система уравнений, граничные и начальные условия прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких балок выводятся на

базе теории магнитоупругости плоского напряжённого состояния тонкого параллелепипеда при введении некоторых упрощающих гипотез, имеющих асимптотическую почву. Выведено интегральное (интегродифференциальное) уравнение (которое входит в систему основных уравнений прикладной модели) электродинамической контактной задачи. Получено уравнение баланса энергии, доказана теорема единственности начально-краевых задач прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких балок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: «Физматлит», 1996. 288 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143 с.
4. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440с.
5. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. АН Армении, 1992. 232 с.
6. Sargsyan S.H. Effective manifestations of characteristics of strength and rigidity of micropolar elastic thin bars//Journal of materials science and engineering. 2012. V.1. №1. P.98-108.
7. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик. // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. №2. С.148-155.
8. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. № 1. С.55-66.
9. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
10. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Springer. 1998. 325 p.
11. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. 383p.
12. Sargsyan S.H., Sargsyan L.S. Magnetoelasticity of thin shells and plates based on the asymmetrical theory of elasticity// Advanced in mechanics and mathematics. Vol. 21. Mechanics of generalized continua. One hundred years after the Cosserats. New York, ets. «Springer». 2010. P. 325-337.
13. Саркисян С.О., Саркисян Л.С. Магнитоупругость микрополярных упругих тонких оболочек и пластин // Изв. НАН РА. Механика. 2010. Т.63. №3. С.52-65.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624с.
15. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Госфизматлит, 1962. 246 с.
16. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. Магнитоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова Думка, 1982. 296с.
17. Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А. Электродинамика. М.: Наука, 1978. 352 с.
18. Панкович П.Ф. Теория упругости. Л.-М.: Оборонгиз, 1939. 640с.
19. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1972. 508с.
20. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
21. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости//Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С.41-54.

22. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Математическая модель динамики микрополярных упругих тонких балок. Свободные и вынужденные колебания //Физическая мезомеханика. 2015. Т.18. №3. С.25-31.
23. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444с.
24. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
25. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Сведения об авторах:

Саркисян Лусине Самвеловна – кандидат физ.-мат.наук, доцент

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН Армении, доктор физ-мат.наук, профессор, зав.каф. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им.М.Налбандяна.

Тел.: (093) 15 16 98. E-mail: slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 8.12.2014

