

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С
ДВУМЯ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ШАРНИРНО-
ЗАКРЕПЛЁННЫМИ КРАЯМИ

Мартиросян К.Л., Дарбинян А.З.

Ключевые слова: полубесконечная пластинка, шарнирное закрепление, изгиб, перерезывающие силы, момент, прогиб.

Key words: semi-infinite plate, simply supported, bending, crosscutting forces, moment, deflection.

Բանալի բառեր. Շիսասանվերջ սալ, հողակապորեն ամրակցում, ծռում, կտրող ուժեր, մոմենտ, ճկվածք:

Մարտիրոսյան Կ.Լ., Դարբինյան Ա.Զ.

Հողակապորեն ամրակցված երկու հանդիպակաց կողմերով կիսասանվերջ սալի ծռման խնդրի մասին շեղակապորեն է լայնական սահքերի ազդեցությունը՝ սալի հանդիպակաց կողմերի հողակապորեն ամրակցման պայմանի դեպքում կիսասանվերջ սալ-շերտի ծռման խնդրում: Խնդիրը դիտարկվում է դասական տեսության [1], առաջին կարգի ճշտագրված տեսության և բարձր կարգի ճշտագրված տեսության հիման վրա: Բերված է սալի ճկվածքների, կտրող ուժերի, մոմենտների համեմատումը՝ Ռեյսներ-Գենկի-Մինդլինի տեսությամբ Վասիլևի վարիանտով [2] և Համբարցումյանի տեսությամբ [3]:

Martirosyan K.L., Darbinyan A.Z.

The problem of bending semi-infinite plates with simply supported boundary conditions at two opposite edges

In this article is investigated the action the transversal shears the problem of plate bending semi-infinite plates when two opposite edges are simply supported boundary conditions. The problem of bending of a plate the action of tangential loads is considered on the base of classical theory[1], on the base of refined theory of first order, on the base of refined theory of high order. The comparisons between deflections, crosscutting forces and moments by theory of Reissner-Genki-Mindlin by Vasilyev variant [2], and the theory of Ambartsumyan [3].

В настоящей работе исследуется влияние поперечных сдвигов при изгибе полубесконечной пластины-полосы при условии шарнирного закрепления противоположных сторон. Задача рассматривается на основе классической теории [1], уточнённой теории первого порядка и уточнённой теории высокого порядка. Приведены сравнения для прогиба пластинки для перерезывающих сил, моментов по теории Рейснера-Генки-Миндлина по варианту Васильева [2] и по теории С.А.Амбарцумяна [3].

Введение. В настоящее время в различных областях техники в качестве рациональных конструктивных элементов широко применяются пластинки. Требование обеспечения прочности элементов тонкостенных конструкций приводит к необходимости анализа возможных состояний этих конструкций. В этом аспекте вопросы исследования напряжённо-деформированного состояния пластинок при приложении нагрузки представляют большой интерес. Широкий интерес к уточнённым теориям оболочек и пластин имеет вполне естественное объяснение. Классическая теория, построенная на основании гипотезы недеформируемых нормалей, не отражает указанные выше явления, связанные с учётом поперечных деформаций и напряжений, и даёт существенные погрешности при рассмотрении задач оболочек и пластин из современных композиционных материалов. Более того, классическая теория изгиба пластин описывается уравнением четвёртого порядка, и в связи с этим, в частности, для удовлетворения граничным условиям свободного края приходится искусственным образом понизить число граничных условий и ввести обобщённое поперечное усилие. В угловых точках граничного контура обобщённое поперечное

усилие может иметь особенность, которая часто интерпретируется как сосредоточенная поперечная сила, реально действующая в угловой точке или фиктивная [2]. А в уточнённых теориях учёт поперечных сдвигов приводит к повышению порядка уравнений изгиба пластин [3] и появляется возможность более точного удовлетворения граничным условиям на кромке пластинки. Здесь исчезает необходимость введения обобщённого усилия Кирхгофа, а наличие угловых точек не вызывает появления особенностей.

1. Постановка задачи. Рассматривается полубесконечная пластинка толщиной $2h$, на лицевых поверхностях которой заданы касательные нагрузки. Прямоугольная декартова система координат (x, y, z) выбрана так, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью (Oxy) . Предполагается, что на лицевых поверхностях заданы касательные нагрузки:

$$z = h : \sigma_{33} = 0, \sigma_{31} = X^+(x, y), \sigma_{32} = 0 \quad (1.1)$$

$$z = -h : \sigma_{33} = 0, \sigma_{31} = -X^-(x, y), \sigma_{32} = 0$$

Относительно перемещений, по теориям (К), (R) и (A), соответственно, принимаются следующие допущения [4]:

$$U_1 = U - z \frac{\partial W}{\partial x}, \quad U_2 = V - z \frac{\partial W}{\partial y}, \quad U_3 = W \quad (1.2)$$

$$U_1 = U - z\theta_1, \quad U_2 = V - z\theta_2, \quad U_3 = W \quad (1.3)$$

$$U_1 = U - z \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{z}{2G} \left(X_1 + \frac{z}{2h} X_2 \right) + \frac{1}{G} g(z) \varphi_1, \quad (1.4)$$

$$U_2 = V - z \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{G} g(z) \varphi_2, \quad U_3 = W$$

Перемещения срединной плоскости U, V , прогиб пластинки W и функции $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$ не зависят от координаты z ; G – модуль сдвига, $X_1 = X^+ - X^-$, $X_2 = X^+ + X^-$, $g(z) = z(1 - z^2/3h^2)$.

Уравнения напряжённого деформированного состояния пластинки по теориям (К) и (R) определяются соотношениями:

$$\begin{cases} \Delta U + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{2X_2}{C(1-\nu)} \\ \Delta V + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \end{cases} \quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (1.5)$$

по теории (A)

$$\begin{cases} \Delta U + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{2X_2}{C(1-\nu)} - \frac{\theta h}{3E} \left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2} \right) \\ \Delta V + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\frac{\theta h}{12G} \frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1.6)$$

Уравнения изгиба пластинки получаются по теориям (К), (R), (A):

$$\Delta^2 W = \frac{h}{D} \frac{\partial X_1}{\partial x} \quad (1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta W - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0 \\ D \left[\Delta \theta_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4Gh}{1-\nu} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta_1 \right) = \frac{2h}{1-\nu} X_1 \\ D \left[\Delta \theta_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) \right] + \frac{4Gh}{1-\nu} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta_2 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (1.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{3}{4} \frac{\partial X_1}{\partial x}, \\ D \frac{\partial}{\partial x} \Delta W - \frac{8h^3}{15} \left[\Delta \varphi_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_1 = \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} \right), \\ D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W - \frac{8h^3}{15} \left[\Delta \varphi_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_2 = \frac{h^3 \theta}{3} \frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y}. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

2. Решение задачи. Пусть прямоугольная пластина занимает область $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Приложенная нагрузка задана в виде $X_1 = \tau_0 \sin \lambda y$, $X_2 = 0$, где $\lambda = \pi/b$.

Края пластины $y = 0, b$ шарнирно закреплены по теориям (К), (R) и (A), соответственно:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b; \quad (2.2)$$

$$W = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b; \quad (2.3)$$

$$W = 0, \quad \varphi_1 = -\frac{5}{8} X_1, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{4}{5G} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b, \quad (2.4)$$

а на лицевых поверхностях приложены только касательные нагрузки (1.1). Следует отметить, что в случае $X_2 = 0$ обобщённое плоско-напряжённое состояние имеет нулевое решение.

Решения уравнений изгиба в двумерном случае по теориям (К), (R) и (A) при граничных условиях (2.2), (2.3), (2.4), по аналогии с задачей Надаи [1], при $x \rightarrow \infty$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0 \quad (2.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta_1 = -\frac{\tau_0}{2G(\eta^2 + 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta_2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1 = -\frac{5\lambda^2}{8\chi^2} \tau_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_2 = 0. \quad (2.7)$$

где $\eta = h\lambda/\sqrt{3}$, $\chi = h^{-1} \sqrt{5(1 + \xi^2)}/2$, $\xi = \sqrt{2/5} \lambda h$.

Эти условия следуют из решений уравнений изгиба (1.7), (1.8), (1.9) в одномерном случае.

Решение систем уравнений, удовлетворяющее граничным условиям (2.2), (2.3) и (2.4), соответственно, представляется в виде:

по теориям (К), (R) и (А)

$$W = W_1(x) \sin \lambda y, \quad (2.8)$$

по теории (R)

$$\theta_1 = \theta_{11}(x) \sin \lambda y, \quad \theta_2 = \theta_{21}(x) \cos \lambda y, \quad (2.9)$$

по теории (А)

$$\varphi_1 = \varphi_{11}(x) \sin \lambda y, \quad \varphi_2 = \varphi_{21}(x) \cos \lambda y. \quad (2.10)$$

Условия свободного опирания по теории (К) имеют вид:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.11)$$

Здесь из трёх условий для функции прогиба W берутся только первые два, и тогда задача изгиба с граничными условиями (2.11) совпадает с задачей шарнирного закрепления. Здесь, как и в случае стеснённого скользящего контакта, применение уточнённой теории необходимо [5], [6], [7].

По теориям (R) и (А) условия свободного опирания имеют вид:

$$W = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 0, \quad (2.12)$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{4}{5G} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) = \frac{1}{2G} \frac{\partial X_1}{\partial x}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{2}{5G} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{4G} \frac{\partial X_1}{\partial y}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.12) и (2.13), получим систему алгебраических уравнений по теориям (R) и (А), откуда выражения для прогибов будут, соответственно:

$$W = \left(\sqrt{3} e^{-\lambda x} x \eta (4\eta^3 - 4\eta^2 \rho + (\nu - 1)\rho) \tau_0 \sin \lambda y / 4G\rho (\sqrt{3}\rho - 2\sqrt{3}\eta^3(1+\theta) + 2\eta^2\sqrt{3}\rho(1+\theta)) (1 + 4\eta^2\rho^2 - 4\eta^3\rho - (1-\nu)\eta\rho) \right) \quad (2.14)$$

$$W = \frac{\xi(-1+\nu)x e^{-\lambda x} \tau_0 \sin \lambda y}{4G\gamma((1+2\xi^2)^2 - \xi\gamma(1-\nu)(1+\beta))}, \quad (2.15)$$

где $\rho = \sqrt{1+\eta^2}$, $\gamma = \sqrt{1+\xi^2}$.

Из соотношений (2.14) и (2.15), очевидно, следует, что при $h\lambda \ll 1$ отношение величины прогиба, подсчитанного по теории (R), к величине прогиба, подсчитанного по теории (А), равно $\sqrt{5/6}$.

Заключение. Расчётные величины для момента $M_1(0, y)$ по теориям (R) и (А) совпадают и тождественно равны нулю. А расчётные величины перерезывающих сил, соответственно, по теориям (R) и (А) определяются выражениями, при сравнении которых очевидно, следует, что при $h^2\lambda^2 \ll 1$ перерезывающие силы $N_1(0, y)$ совпадают по теориям (R) и (А), соответственно

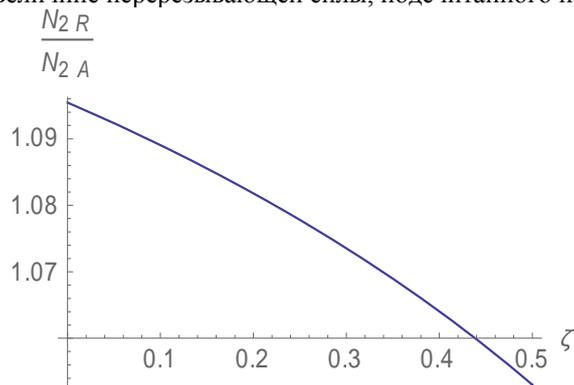
$$N_1(0, y) = h\tau_0 \sin \lambda y. \quad (2.16)$$

а перерезывающие силы $N_2(x, 0)$ по теориям (R) и (А) имеют вид:

$$N_2(x,0) = \frac{h\eta\tau_0}{1-\eta(1-\nu)} \left(e^{\frac{-x\alpha}{h}} - 2\eta^2 e^{-\lambda x} \right); \quad (2.17)$$

$$N_2(x,0) = \frac{5h\xi\tau_0}{6(1-\xi(1-\nu))} (e^{-x\lambda} - 2\xi^2 e^{-\lambda x}), \quad (2.18)$$

откуда нетрудно показать, что при $h\lambda \ll 1$ в угловой точке $x = 0, y = 0$ получаем, что отношение величины перерезывающей силы, подсчитанного по теории (R), к величине перерезывающей силы, подсчитанного по теории (A),



где $\zeta = (1-\nu)h\lambda$, равно $\sqrt{6/5}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 635с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С.45-58.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
4. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». 2002. С.67-88.
5. Белубекян М.В. Об одном парадоксе граничных условий теории Кирхгофа. // В сб.: «Исследование современных научных проблем в ВУЗах». Ереван: Изд.-во «Айастан». 2000. Т.2. С.134-138.
6. Белубекян М.В., Мартиросян К.Л. К задаче изгиба пластинки по форме цилиндрической поверхности при наличии касательных нагрузок на лицевых поверхностях. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №2. С.41-46.
7. Martirosyan K.L. The Effect of the Tangential Loads on the Bending of Elastic Plate. Euromech Colloquium 527. Shell-like structures- nonclassical theories and applications, 22–26 August 2011, Leucorea, Lutherstadt Wittenberg, Germany, pp.75-82.

Сведения об авторах:

Мартиросян Кристине Леоновна – к.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении. Адрес: РА, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2. Тел.: (374 93) 83-10-18. E-mail: kristine.martirosyan@gmail.com

Дарбинян Артавазд Завенович – канд. физ.-мат. наук, преподаватель Мурманского государственного гуманитарного университета. E-mail: arto1954@mail.ru

Поступила в редакцию 04.11.2014