

УДК 539.3

**НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТА В ВИДЕ ПАКЕТА ИЗ
ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЧИСЛА КОНЕЧНЫХ ИЛИ
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ УПРУГИХ СЛОЁВ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ
ДЕФОРМАЦИИ**

Гаспарян А.В.

Ключевые слова: композит, теория упругости, конечно-разностные уравнения.

Keywords: composite, theory of elasticity, equations of finite differences.

Բանալի բառեր` կոմպոզիտ, առաձգականության տեսություն, վերջավոր տարբերության հավասարումներ:

Գաապարյան Ա.Վ.

Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կամայական վերջավոր թվով վերջավոր կամ կիսաանվերջ առաձգական շերտերից բաղկացած փաթեթի տեսքով կոմպոզիտի լարվածային վիճակը

Տուրյեի վերջավոր և անվերջ սինուս- և կոսինուս-ձևափոխությունների օգնությամբ դիտարկվում է չորս փոխկապակցված խնդիր հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կամայական վերջավոր թվով վերջավոր կամ կիսաանվերջ տարասեռ առաձգական շերտերից բաղկացած երկու տարբեր կոմպոզիտների լարվածային վիճակի վերաբերյալ՝ ինչպես կոշտ ամրակցված, այնպես էլ լարումներից ազատ կողմնային հարթությունների դեպքում:

Gasparyan A.V.

Stressed State of a Composite in a Form of Package Composed of an Arbitrary Finite Number of Finite or Semi-Infinite Elastic Layers under Anti-plane Deformation

With the application of Fourier finite and infinite sine-and cosine-transforms four interrelated problems on a stressed state of two different composites under anti-plane deformation are considered. The composites have a form of package composed of an arbitrary finite number of finite or semi-infinite heterogeneous elastic layers with the lateral surfaces either rigidly fastened or free of strains.

При помощи конечных и бесконечных синус- и косинус-преобразований Фурье рассматриваются четыре взаимосвязанные задачи о напряжённом состоянии двух разных композитов, состоящих из произвольного конечного числа конечных или полубесконечных упругих разнородных слоёв при антиплоской деформации как при жёстко защемлённых, так и при свободных от напряжений боковых плоскостях.

Введение. Исследование напряжённо-деформированного состояния кусочно-однородных композитов в виде пакета из произвольного конечного числа упругих тел канонических форм имеет теоретическое и практическое значение. В этом направлении укажем на работы [1-3].

В настоящей работе рассматриваются четыре взаимосвязанные задачи о напряжённом состоянии двух разных композитов, представляющих собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа конечных или полубесконечных упругих слоёв с различными упругими и геометрическими характеристиками при антиплоской деформации как при нагружённых, так и при свободных от напряжений боковых плоскостях.

Такие задачи для кусочно-однородных композитов, состоящих из произвольного конечного числа упругих бесконечных слоёв, конечных цилиндров и клиньев с произвольным углом раствора при антиплоской деформации рассмотрены в [4-6].

1.1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть композит, отнесённый к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих слоёв-прямоугольников (фиг.1.):

$$\Omega_k = \{0 \leq x \leq l, \quad h_{k-1} \leq y \leq h_k, \quad -\infty < z < \infty\} \quad (k = \overline{1, N})$$

с модулями сдвига G_k . К нижней и верхней граням композита $y = h_0$ и $y = h_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$, соответственно, обеспечивающие состояние антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxy и

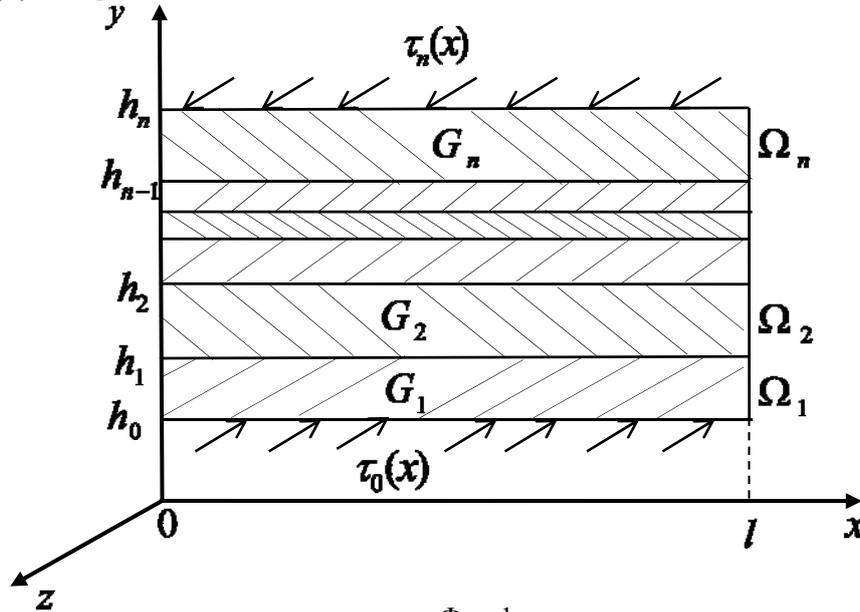
удовлетворяющие условию композита $\int_0^l \tau_0(x) dx = \int_0^l \tau_n(x) dx$, а вертикальные

кромки прямоугольников $x = 0$ и $x = l$ свободны от напряжений, т.е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_0} = \tau_0(x), \quad \tau_{yz} \Big|_{y=h_n} = \tau_n(x) \quad (0 \leq x < l)$$

$$\tau_{xz} \Big|_{x=0} = \tau_{xz} \Big|_{x=l} = 0, \quad (k = \overline{1, N})$$

Здесь τ_{yz} – компонента касательных напряжений, а $w_k = w_k(x, y)$ – единственная отличная от нуля компонента смещений в направлении оси Oz . Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите, когда функции напряжения $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$ наперёд заданы.



Фиг. 1

Отметим, что решение аналогичной задачи для кусочно-однородного композита из произвольного конечного числа бесконечных упругих слоёв подробно описано в [4].

Для вывода определяющих уравнений задачи обозначим неизвестные касательные контактные напряжения на гранях $y = h_{k-1}$ и $y = h_k$ ($k = \overline{1, N}$) слоя

Ω_k через $\tau_{k-1}(x)$ и $\tau_k(x)$, соответственно. Тогда, используя закон Гука, для слоя Ω_k получим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, h_{k-1} < y < h_k) \\ \tau_{xz}|_{x=0} = \tau_{xz}|_{x=l} = 0 \\ \tau_{yz}|_{y=h_{k-1}} = G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \quad \tau_{yz}|_{y=h_k} = G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k} = \tau_k(x) & (0 < x < l, k = \overline{1, N}). \end{cases} \quad (1.1)$$

Для решения граничной задачи (1.1) рассмотрим конечное косинус-преобразование Фурье [9]

$$\left\{ \bar{\tau}_k(m); \bar{w}_k(m, y) \right\} = \int_0^l \left\{ \tau_k(x); w_k(x, y) \right\} \cos(\pi mx/l) dx \quad (m = 0; 1; 2 \dots),$$

и формулы обращения

$$w_k(x, y) = \frac{1}{l} \bar{w}_k(0, y) + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_k(m, y) \cos(\pi mx/l)$$

$$\tau_k(x) = \frac{1}{l} \bar{\tau}_k(0) + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\tau}_k(m) \cos(\pi mx/l).$$

Тогда придём к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_k}{dy^2} - \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \bar{w}_k = 0 & (h_{k-1} < y < h_k, k = \overline{1, N}) \\ G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}(m), \quad G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_k} = \bar{\tau}_k(m). \end{cases} \quad (1.2)$$

Далее, способом, описанным в [4], решение задачи (1.2) сводится к решению системы конечно-разностных уравнений второго порядка:

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, N-1})$$

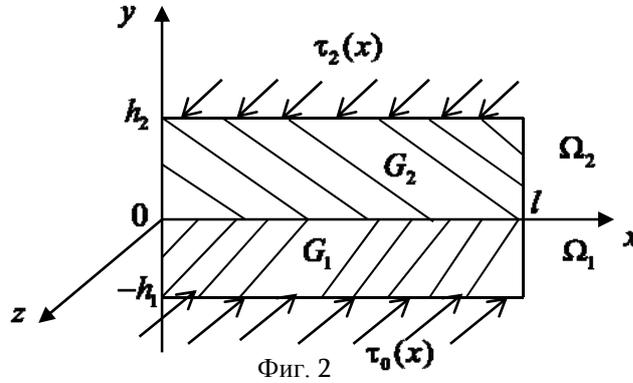
$$a_k = \frac{1}{G_k \text{sh}\left(\frac{\pi m d_k}{l}\right)}, \quad b_k = \frac{\text{cth}\left(\frac{\pi m d_k}{l}\right)}{G_k}, \quad d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, N}). \quad (1.3)$$

Здесь d_k ($k = \overline{1, N}$) – высота k -ого слоя Ω_k .

Решение (1.3) опять подробно описано в [4]. Далее, при помощи формулы обращения определяются функции $w_k(x, y)$ ($k = \overline{1, N}$), а затем – напряжения в любой точке композита.

Отметим, что условие равновесия композита приводит к соотношению $\bar{\tau}_0(0) \equiv \bar{\tau}_n(0)$. В дальнейшем для простоты будем считать, что это соотношение удовлетворяется тождественно, т.е. примем $\tau_0(x) \equiv \tau_n(x)$ ($0 \leq x \leq l$).

1.2. Частные случаи и числовые результаты. Рассмотрим частный случай двухслойного композита (фиг.2)



Фиг. 2

Из (1.3) находим

$$\bar{\tau}_1(m) = \frac{\mu \bar{\tau}_0 \text{sh}(\pi m h_2/l) + \bar{\tau}_2 \text{sh}(\pi m h_1/l)}{\mu \text{ch}(\pi m h_1/l) \text{sh}(\pi m h_2/l) + \text{ch}(\pi m h_2/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)}, \quad \mu = G_2/G_1$$

Применяя формулу обращения

$$\tau_1(x) = \frac{1}{l} \bar{\tau}_1(0) + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\tau}_1(m) \cos(\pi m x/l),$$

получим

$$\tau_1(x) = \frac{2\mu}{l} \int_0^l \tau_0(t) \left[\frac{1}{2} + K(x,t) \right] dt + \frac{2}{l} \int_0^l \tau_2(t) \left[\frac{1}{2} + L(x,t) \right] dt,$$

где

$$K(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x/l) \cos(\pi m t/l) \text{sh}(\pi m h_2/l)}{\mu \text{ch}(\pi m h_1/l) \text{sh}(\pi m h_2/l) + \text{ch}(\pi m h_2/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)}$$

$$L(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x/l) \cos(\pi m t/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)}{\mu \text{ch}(\pi m h_1/l) \text{sh}(\pi m h_2/l) + \text{ch}(\pi m h_2/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)} \quad (0 < x < l).$$

При $\tau_0(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$ и $h_1 = h_2 = h$ получим

$$\tau_1(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \tau(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x/l) \cos(\pi m t/l)}{\text{ch}(\pi m h/l)} \right] dt \quad (0 < x < l)$$

а) Если $\tau_0(x) = \tau_2(x) = T \delta(x - l/2)$, $(0 < x < l)$,

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, то учитывая, что

$$\int_0^l \tau_r(t) \cos \frac{\pi m t}{l} dt = \begin{cases} 0, & m = 2k - 1 \\ (-1)^k, & m = 2k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\int_0^l \tau_r(t) dt = 1 \quad (r = 0; 2),$$

находим

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{l} \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(2\pi mx/l) [\mu \operatorname{sh}(2\pi mh_2/l) + \operatorname{sh}(2\pi mh_1/l)]}{\mu \operatorname{ch}(2\pi mh_1/l) \operatorname{sh}(2\pi mh_2/l) + \operatorname{ch}(2\pi mh_2/l) \operatorname{sh}(2\pi mh_1/l)} \right]$$

или

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos[2\pi m\xi] \{ \mu \operatorname{sh}[2\pi m\lambda] + \operatorname{sh}[2\pi m\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[2\pi m\lambda\delta] \operatorname{sh}[2\pi m\lambda] + \operatorname{ch}[2\pi m\lambda] \operatorname{sh}[2\pi m\lambda\delta]},$$

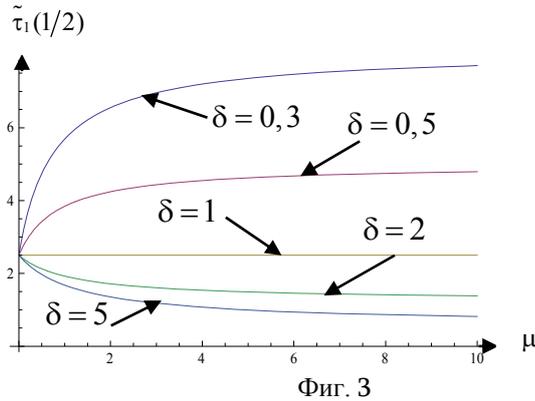
где

$$\xi = x/l; \lambda = h_2/l; \delta = h_1/h_2; \tilde{\tau}_1(\xi) = l\tau_1(\xi l)/2T.$$

Исследуем поведение функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$. В результате будем иметь:

$$\tilde{\tau}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\{ \mu \operatorname{sh}[2\pi m\lambda] + \operatorname{sh}[2\pi m\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[2\pi m\lambda\delta] \operatorname{sh}[2\pi m\lambda] + \operatorname{ch}[2\pi m\lambda] \operatorname{sh}[2\pi m\lambda\delta]}.$$

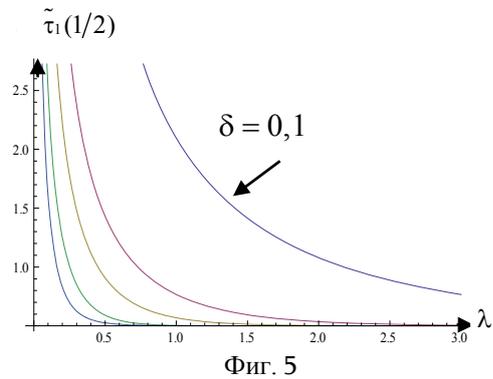
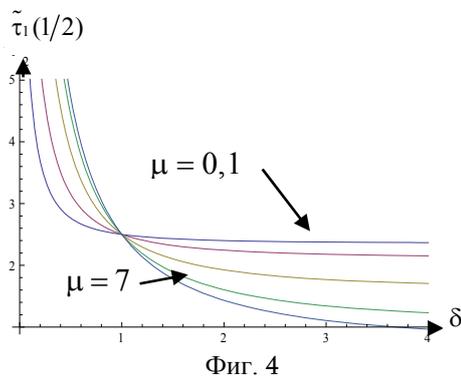
1. На фиг.3 приведены графики функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра μ для $\lambda = h_2/l = 0,1$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,3; 0,5; 1; 2; 5$. Из графиков видно, что $\tilde{\tau}_1(1/2)$ возрастает при $h_1/h_2 < 1$, убывает при $h_1/h_2 > 1$, а при $h_1/h_2 = 1$ остаётся постоянным, т.е. не зависит от μ .



Фиг. 3

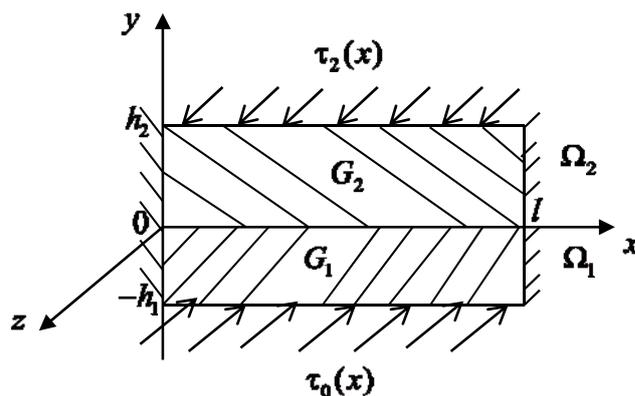
2. На фиг.4 показаны графики функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\delta = h_1/h_2$ для $\lambda = h_2/l = 0,1$ при $\mu = 0,1; 0,3; 1; 3; 7$. Напряжение $\tilde{\tau}_1(1/2)$ убывает для всех значений μ , а при увеличении δ приближается к нулю.

3. На фиг.5 приведены графики изменения функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\lambda = h_2/l$ для $\mu = 3$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,1; 0,3; 0,5; 1; 2$. Графики показывают, что $\tilde{\tau}_1(1/2)$ опять убывает для всех значений δ , а при увеличении λ приближается к нулю. Видно также, что при больших значениях δ графики мало отличаются друг от друга.



б) Очевидно, что если антиплоская деформация двухслойного композита вызвана одинаковыми постоянными силами, приложенными на верхней и нижней гранях композита, т.е. $\tau_0(x) = \tau_2(x) = P = \text{const}$, ($0 < x < l$), то $\tau_1(x) = P$.

2.1. Частный случай двухслойного композита при жёстко защемлённых вертикальных плоскостях и числовые результаты. Решение аналогичной задачи при жёстко защемлённых вертикальных плоскостях композита подробно приведено в [7]. Здесь остановимся на частном случае двухслойного композита.



Фиг. 6

Из формул, представленных в [7], при $n = 2$ находим

$$\bar{\tau}_1(m) = \frac{\mu \bar{\tau}_0 \text{sh}(\pi m h_2/l) + \bar{\tau}_2 \text{sh}(\pi m h_1/l)}{\mu \text{ch}(\pi m h_1/l) \text{sh}(\pi m h_2/l) + \text{ch}(\pi m h_2/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)}, \quad \mu = \frac{G_2}{G_1} \quad (2.1)$$

$$\bar{w}_1(x, y) = \frac{l}{\pi m G_1} \frac{\bar{\tau}_2 \text{ch} \pi m(h_1 + y)/l - \bar{\tau}_0 \text{ch} \pi m y/l}{\text{sh} \pi m h_1/l} \quad (-h_1 \leq y \leq 0); \quad (2.2)$$

$$\bar{w}_2(x, y) = \frac{l}{\pi m G_2} \frac{\bar{\tau}_2 \text{ch} \pi m y/l - \bar{\tau}_1 \text{ch} \pi m(h_2 - y)/l}{\text{sh} \pi m h_2/l} \quad (0 \leq y \leq h_2). \quad (2.3)$$

Применяя формулу обращения

$$\tau_1(x) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\tau}_1(m) \sin(\pi m x/l),$$

из (2.1) получим

$$\tau_1(x) = \frac{2\mu}{l} \int_0^l \tau_0(t) K(x,t) dt + \frac{2}{l} \int_0^l \tau_2(t) L(x,t) dt, \quad (2.4)$$

где

$$K(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi mx/l) \sin(\pi mt/l) \operatorname{sh}(\pi mh_2/l)}{\mu \operatorname{ch}(\pi mh_1/l) \operatorname{sh}(\pi mh_2/l) + \operatorname{ch}(\pi mh_2/l) \operatorname{sh}(\pi mh_1/l)}$$

$$L(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi mx/l) \sin(\pi mt/l) \operatorname{sh}(\pi mh_1/l)}{\mu \operatorname{ch}(\pi mh_1/l) \operatorname{sh}(\pi mh_2/l) + \operatorname{ch}(\pi mh_2/l) \operatorname{sh}(\pi mh_1/l)} \quad (0 < x < l).$$

Легко заметить, что если антиплоская деформация двухслойного композита вызвана касательными силами одинаковых интенсивностей, приложенных на верхнюю и нижнюю грани композита, то при равных толщинах слоёв композита напряжение на плоскости контакта слоёв не зависит от отношения их модулей сдвига. Действительно, при $\tau_0(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$ и $h_1 = h_2 = h$ из (2.4) получим:

$$\tau_1(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \tau(t) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi mx/l) \sin(\pi mt/l)}{\operatorname{ch}(\pi mh/l)} dt \quad (0 < x < l).$$

а) Рассмотрим частный случай антиплоской деформации двухслойного композита при $\tau_0(x) = \tau_2(x) = T\delta(x-l/2)$, $(0 < x < l)$,

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Учитывая, что

$$\int_0^l \tau_r(t) \sin \frac{\pi mt}{l} dt = \begin{cases} 0, & m = 2k \\ (-1)^k, & m = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (r = 0; 2),$$

из (2.4) получим

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{l} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin(\pi(2m+1)x/l) [\mu \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_2/l) + \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_1/l)]}{\mu \operatorname{ch}(\pi(2m+1)h_1/l) \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_2/l) + \operatorname{ch}(\pi(2m+1)h_2/l) \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_1/l)}. \quad (2.5)$$

При $h_1 = h_2 = h$ находим:

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{l} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin \pi(2m+1)x/l}{\operatorname{ch} 2\pi(2m+1)h/l}.$$

После введения безразмерных величин

$$\xi = x/l; \lambda = h_2/l; \delta = h_1/h_2; \tilde{\tau}_1(\xi) = l\tau_1(\xi l)/2T$$

формула (2.5) примет вид:

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin[\pi(2m+1)\xi] \{ \mu \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda] \operatorname{sh}[(2m+1)\lambda\delta]}$$

Исследуем закономерности изменения касательного безразмерного напряжения $\tilde{\tau}_1(\xi)$

в фиксированной точке $\xi = 1/2$

$$\tilde{\tau}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\{ \mu \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda] \operatorname{sh}[(2m+1)\lambda\delta]}.$$

Последовательно приводим результаты численного анализа этой формулы.

1. На фиг.7 приведены графики напряжений $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра μ для $\lambda = h_2/l = 0,5$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,3; 0,5; 1; 2; 5$.

На этих графиках напряжения возрастают при $h_1/h_2 < 1$ и убывают при $h_1/h_2 > 1$, а при $h_1/h_2 = 1$ остаются постоянными, т.е. не зависят от μ .

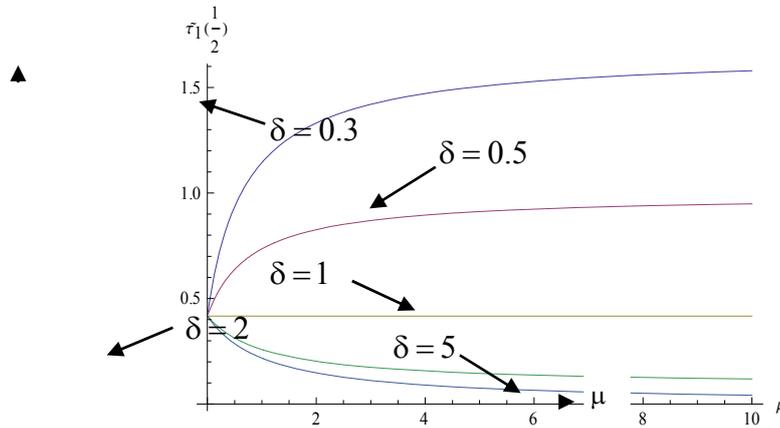
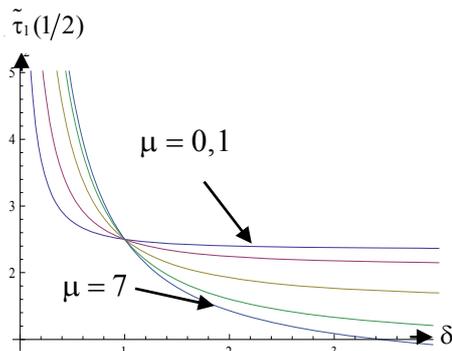


Рис. 7

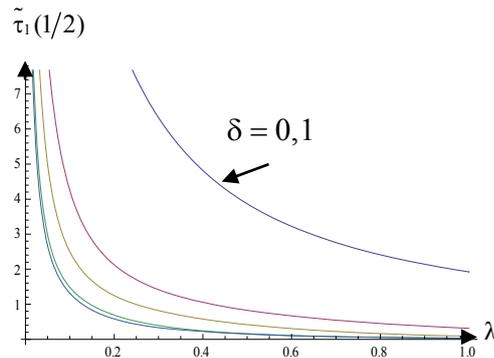
2. На фиг.8 показаны графики изменения функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\delta = h_1/h_2$ для $\lambda = h_2/l = 0,1$ и при $\mu = 0,1; 0,3; 1; 3; 7$. Напряжения убывают для всех значений μ , а при увеличении δ приближаются к нулю.

3. На фиг.9 приведены графики функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\lambda = h_2/l$ и для $\mu = 2$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,1; 0,5; 1; 3; 5$.

Графики опять снижаются для всех значений δ , а при увеличении λ приближаются к горизонтальной оси. Видно также, что при больших значениях δ графики мало отличаются друг от друга.



Фиг. 8



Фиг. 9

б) Рассмотрим другой частный случай, когда антиплоская деформация двухслойного композита вызвана одинаковыми постоянными силами, приложенными на верхней и нижней гранях композита:

$$\tau_0(x) = \tau_2(x) = P = \text{const}, \quad (0 < x < l).$$

Учитывая, что

$$\int_0^l \tau_r(t) \sin \frac{\pi m t}{l} dt = \begin{cases} 0, & m = 2k \\ \frac{2Pl}{\pi m}, & m = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (r = 0; 2),$$

из (2.4) получим

$$\tau_1(x) = \frac{2P}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{\sin(\pi(2m+1)x/l) [\mu \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_2/l) + \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_1/l)]}{\mu \operatorname{ch}(\pi(2m+1)h_1/l) \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_2/l) + \operatorname{ch}(\pi(2m+1)h_2/l) \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_1/l)}$$

или в безразмерных величинах

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{\sin[\pi(2m+1)\xi] \{ \mu \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda] \operatorname{sh}[(2m+1)\lambda\delta]},$$

$$\xi = x/l; \lambda = h_2/l; \delta = h_1/h_2; \tilde{\tau}_1(\xi) = \tau_1(\xi l)/P.$$

При $h_1 = h_2 = h$ получим

$$\tau_1(x) = \frac{2P}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \frac{\sin \pi(2m+1)x/l}{\operatorname{ch} 2\pi(2m+1)h/l}.$$

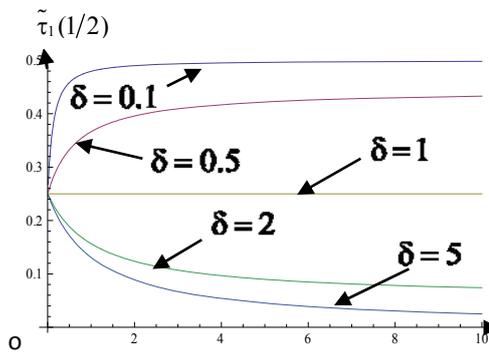
В точке $\xi = 1/2$

$$\tilde{\tau}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \frac{\{ \mu \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda] \operatorname{sh}[(2m+1)\lambda\delta]}.$$

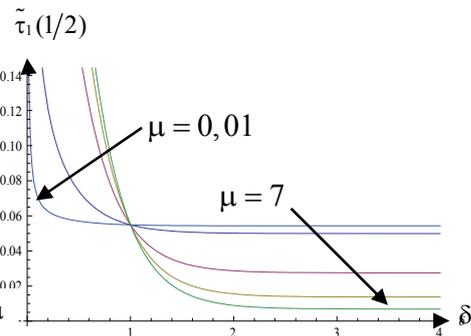
Рассмотрим различные комбинации характерных параметров.

1. На фиг.10 приведены графики изменения функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра μ для $\lambda = h_2/l = 0,5$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,1; 0,5; 1; 2; 5$. Напряжения возрастают при $h_1/h_2 < 1$ и убывают при $h_1/h_2 > 1$, а при $h_1/h_2 = 1$ не зависят от μ .

2. На фиг.11 приведены графики функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\delta = h_1/h_2$ для $\lambda = h_2/l = 1$ при $\mu = 0,01; 0,1; 1; 3; 7$. Все эти графики заметно снижаются и при больших значениях μ мало отличаются друг от друга.



Фиг. 10



Фиг. 11

3.1. Постановка задач для композита из полубесконечных слоёв. Далее рассмотрим вышеуказанные задачи для композита, представляющего собой пакет из произвольного конечного числа упругих полубесконечных слоёв (фиг. 12 и 13).

$$\Omega_k = \{0 \leq x < \infty, h_{k-1} \leq y \leq h_k, -\infty < z < \infty\} \quad (k = \overline{1, N})$$

В первой задаче, когда грань композита $x = 0$ свободна от напряжений, т.е.

$$\tau_{xz} \Big|_{x=0} = \frac{G_k \partial w_k(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (k = \overline{1, N-1}),$$

применяются косинус-преобразования Фурье

$$\{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} = \int_0^\infty \{\tau_k(x); w_k(x, y)\} \cos(\lambda x) dx \quad (k = \overline{0, N}) \quad (3.1)$$

и формулы обращения

$$\{\tau_k(x); w_k(x, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (k = \overline{0, N}), \quad (3.2)$$

где λ – спектральный параметр Фурье.

Во второй же задаче, когда грань композита $x = 0$ жёстко закреплена, т.е.

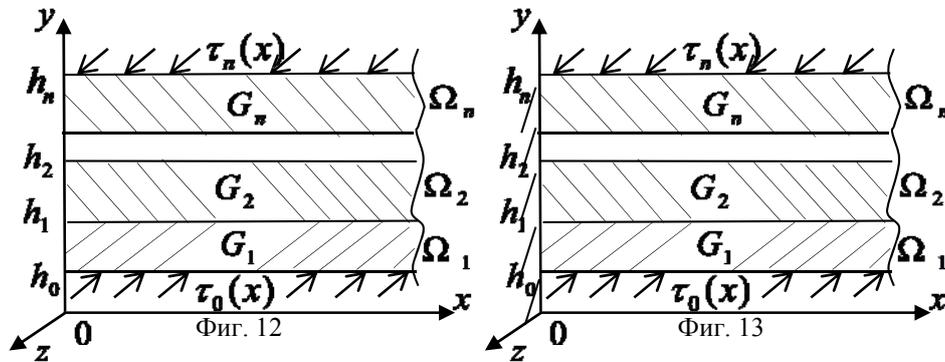
$$w_k(x, y) \Big|_{x=0} = 0 \quad (k = \overline{1, N}),$$

применяются синус-преобразования Фурье

$$\{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} = \int_0^\infty \{\tau_k(x); w_k(x, y)\} \sin(\lambda x) dx \quad (k = \overline{0, N}) \quad (3.3)$$

и формулы обращения

$$\{\tau_k(x); w_k(x, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (k = \overline{0, N}). \quad (3.4)$$



Тогда, с учётом условий

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w_k(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (k = \overline{1, N-1})$$

решение обеих задач сводится к конечно-разностным уравнениям [4]

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, N-1})$$

$$a_k = \frac{1}{G_k \text{sh}(\lambda d_k)}, \quad b_k = \frac{\text{cth}(\lambda d_k)}{G_k}, \quad d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, N}). \quad (3.5)$$

При этом,

$$\bar{\tau}_k(\lambda) = \frac{G_{k+1} \bar{\tau}_{k-1} \text{sh}(\lambda d_{k+1}) + G_k \bar{\tau}_{k+1} \text{sh}(\lambda d_k)}{G_{k+1} \text{ch}(\lambda d_k) \text{sh}(\lambda d_{k+1}) + \text{ch}(\lambda d_{k+1}) \text{sh}(\lambda d_k)}, \quad (k = \overline{1, N-1}). \quad (3.6)$$

3.2. Частные случаи, числовые результаты. В частном случае двухслойного композита из (3.6) при $n = 2$ получим

$$\bar{\tau}_1(\lambda) = \frac{\mu \bar{\tau}_0 \text{sh}(\lambda d_2) + \bar{\tau}_2 \text{sh}(\lambda d_1)}{\mu \text{ch}(\lambda d) \text{sh}(\lambda d_2) + \text{ch}(\lambda d_2) \text{sh}(\lambda d)}, \quad \mu = G_2/G_1 \quad (3.7)$$

Тогда, после применения формул (3.1) и (3.2) в первой задаче и формул (3.3) и (3.4) во второй задаче, для обеих задач получим:

$$\tau_1(x) = \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\infty \tau_0(t) K(x, t) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau_2(t) L(x, t) dt, \quad (3.8)$$

где, соответственно,

$$K(x, t) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\lambda d_2) \cos(\lambda x) \cos(\lambda t)}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda \quad (3.9)$$

$$L(x, t) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\lambda d_1) \cos(\lambda x) \cos(\lambda t)}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda$$

– для первой задачи и

$$K(x, t) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\lambda d_2) \sin(\lambda x) \sin(\lambda t)}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda \quad (3.10)$$

$$L(x, t) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\lambda d_1) \sin(\lambda x) \sin(\lambda t)}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda$$

– для второй задачи.

Теперь примем $\tau_0(x) = \tau_2(x) = T\delta(x - x_0)$, ($x_0 > 0$), где $\delta(x)$ – функция Дирака. Тогда, из (3.8)-(3.10) для первой и второй задач, соответственно, получим:

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x) \cos(\lambda x_0) [\mu \text{sh}(\lambda d_2) + \text{sh}(\lambda d_1)]}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda \quad (3.11)$$

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x) \sin(\lambda x_0) [\mu \text{sh}(\lambda d_2) + \text{sh}(\lambda d_1)]}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda$$

Легко заметить, что при равных высотах слоёв ($d_1 = d_2$) напряжение $\tau_1(x)$ не зависит от отношения модулей сдвига слоёв μ .

Введя безразмерные величины

$$\alpha = \lambda d_1; \quad \xi = x/d_1; \quad \eta = x_0/d_1; \quad \delta = d_2/d_1; \quad \tilde{\tau}_1(\xi) = d_1 \tau_1(\xi d_1)/2T,$$

из (3.11), соответственно, получим:

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha \xi) \cos(\alpha \eta) [\mu \text{sh}(\alpha \delta) + \text{sh} \alpha]}{\mu \text{sh}(\alpha \delta) \text{ch} \alpha + \text{sh} \alpha \text{ch}(\alpha \delta)} d\lambda$$

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha \xi) \sin(\alpha \eta) [\mu \text{sh}(\alpha \delta) + \text{sh} \alpha]}{\mu \text{sh}(\alpha \delta) \text{ch} \alpha + \text{sh} \alpha \text{ch}(\alpha \delta)} d\lambda$$

В табл.1 и 2 приведены значения безразмерного напряжения $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = \xi_0 = 1$ для различных значений параметров δ и μ для первой задачи.

Таблица 1

$\delta \backslash \mu$	0.2	0.5	1	2	3
0.001	1.2496	0.5016	0.2715	0.1749	0.1356
0.01	1.2426	0.4998	0.2715	0.176	0.1374
0.05	1.2142	0.4902	0.2715	0.1805	0.1448
0.1	1.1811	0.4829	0.2715	0.1760	0.1529
0.5	0.9844	0.4309	0.2715	0.2116	0.1922
1	0.8353	0.3936	0.2715	0.2279	0.21504
3	0.5827	0.3348	0.2715	0.2506	0.2450
5	0.4875	0.3142	0.2715	0.2577	0.2542
10	0.3943	0.2951	0.2715	0.2641	0.2622
20	0.3376	0.2840	0.2715	0.2676	0.2667

Таблица 2

$\mu \backslash \delta$	0.01	0.03	1	5
0.01	25.1336	21.1797	15.9181	7.4660
0.1	2.4844	2.1198	1.6142	0.8228
0.5	0.4998	0.4532	0.3936	0.3142
1	0.2715	0.2715	0.2715	0.2715
3	0.1374	0.1767	0.2150	0.2542
5	0.0948	0.1532	0.2034	0.2512

В табл.3 приведены значения безразмерного напряжения $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = \xi_0 = 1$ для различных значений параметров δ и μ для второй задачи.

Таблица 3

$\delta \backslash \mu$	0.2	0.5	1	2	3
0.001	1.2492	0.4979	0.2284	0.0754	0.0315
0.01	1.2426	0.4959	0.2284	0.0769	0.0336
0.05	1.2140	0.4873	0.2284	0.0835	0.0425
0.1	1.1808	0.4773	0.2284	0.0910	0.0525
0.5	0.9824	0.4190	0.2284	0.1310	0.1051
1	0.8310	0.3761	0.2284	0.1590	0.1385
3	0.5693	0.3064	0.2284	0.1937	0.1851
5	0.4680	0.2815	0.2284	0.2055	0.1999
10	0.3666	0.2579	0.2284	0.2160	0.2130
20	0.3035	0.2441	0.2284	0.2219	0.2204

Из приведённых в таблицах данных видно, что в обеих задачах безразмерное контактное напряжение проявляет то же поведение, что и в первых двух задачах, т.е.:

а) возрастает при $d_2/d_1 > 1$ и убывает при $d_2/d_1 < 1$ в зависимости от μ , а при $d_2/d_1 = 1$ остаётся постоянным, т.е. не зависит от μ ;

б) убывает в зависимости от δ для всех значений μ .

Заключение. Построено эффективное решение задач о напряжённом состоянии двух композитов, состоящих из произвольного конечного числа конечных или полубесконечных упругих разнородных слоёв при антиплоской деформации, как при нагруженных, так и при свободных от напряжений боковых плоскостях.

При помощи численного анализа для двухслойных композитов показано, что безразмерные контактные напряжения на плоскости контакта слоёв:

а) не зависит от отношения модулей сдвига слоёв, если слои имеют одинаковые толщины;

б) при возрастании параметра μ возрастает, если верхний слой толще нижнего и убывает, если нижний слой толще верхнего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491с.
2. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости.// Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 7. С.49–69.
3. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах равновесия толстых многослойных плит.// Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 7. С.40–48.
4. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10–20.
5. Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих круговых цилиндров при антиплоской деформации. //В сб. научных трудов Международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 4–8 октября, 2010, Дилижан, Армения, т.1, с.167-171.
6. Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряжённом состоянии кусочно-однородного композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих клиньев при антиплоской деформации. //Изв.НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.5-13.
7. Гаспарян А.В., Давтян З.А., Григорян М.С. Напряжённое состояние композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв-прямоугольников при антиплоской деформации. // В сб. трудов VIII Международной конференции: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 22–26 сентября, 2014, Горис-Степанакерт, с.133-137.
8. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967. 375с.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Госиноиздат, 1955. 667с.

Сведения об авторе:

Гаспарян Ануш Вараздатовна,

К.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (+37410) 52-48-90; **E-mail:** anush@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 11.12.2014