

УДК 532:629

**ОБ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЕ ПРИ
ЗАДАННОМ РЕЖИМЕ ДАВЛЕНИЯ**

Аветисян С.А., Мкртчян М.М.

Բանալի բառեր: Կայունացած ֆիլտրացիա, ֆիլտրացիայի գործակից, էքսպոնենցիալ անհամասեռ ծակոտկեն շերտ, արագություն, ճնշում, հեղուկի ծախս:

Ключевые слова. Установившаяся фильтрация, коэффициент фильтрации, пористая экспоненциально неоднородная полоса, скорость, давление, расход жидкости.

Key words. Steady filtration, filtration coefficient, inhomogeneous porous exponentially strip, speed, pressure, fluid flow rate.

Բնիկյան Ս.Ա., Մկրտչյան Մ.Մ.

**Ճնշման տրված ռեժիմի դեպքում ծակոտկեն էքսպոնենցիալ օրենքով անհամասեռ շերտերում
հեղուկի կայունացած ֆիլտրացիայի մասին**

Շերտի կայունացած ֆիլտրացիայի հարթ տեսության շրջանակներում դիտարկվում է հեղուկի ֆիլտրացիան ծակոտկեն գրունտային շերտում, որի ֆիլտրացիայի գործակիցը ըստ շերտի խորության փոփոխվում է էքսպոնենցիալ օրենքով: Ընդ որում հեղուկը շերտի վերին եզրի հատվածների համակարգից տրված ճնշման տակ ներարկվում է շերտին: Որոշվում են խնդրի ֆիլտրացիոն բնութագրիչները:

Avetisyan S.A., Mkrtychyan M.M.

**About the fluid stabilized filtration in porous nonhomogeneous strip
by exponential law in case of the given regim pressure**

In the framework of plane theory of fluid tablished filtration the boundary problem on fluind filtration in porous ground strip, the coefficient of which along the depth of the strip changes by exponential law, is considered. In this case by the system of the segments of the upper bound of the strip under the given pressure the fluid inject into the ground strip, and the lower bound of the strip is water-impermeable. Filtration characteristics of the problem are determined.

В рамках плоской теории установившейся фильтрации жидкости рассматривается граничная задача о фильтрации жидкости в пористой грунтовой полосе, коэффициент фильтрации которой по глубине полосы изменяется по экспоненциальному закону. При этом, жидкость через систему отрезков верхней грани полосы под заданным давлением впрыскивается во внутрь грунтовой полосы, а нижняя грань полосы водонепроницаема. Определяются фильтрационные характеристики задачи.

Введение

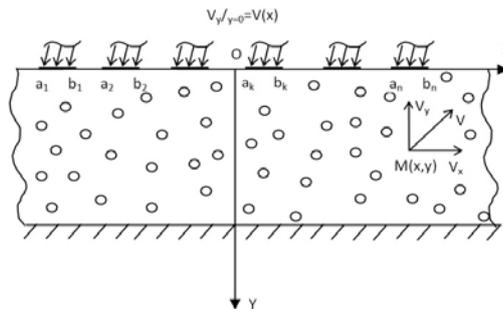
Строгая математическая теория фильтрации жидкости в недеформируемых пористых грунтовых массивах с многочисленными её приложениями обстоятельно изложена в монографиях [1–3], а основные достижения этой многогранной и обширной области механики сплошных сред до 1967г. отражены в коллективной монографии [4]. В недавних работах [5,6] развиты математические модели консолидации водонасыщенных пористых сред и установлены соотношения между теориями фильтрации и консолидации почв, которые приводят к новым задачам теории фильтрации. В монографии [7] изложены методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах. Задача напорной фильтрации жидкости под гидротехническими сооружениями типа плотины при плоском установившемся течении жидкости в пористом грунтовом слое, коэффициент фильтрации которого по глубине слоя изменяется по экспоненциальному закону, изучена в [8]. По этим же предположениям в работе [9] рассмотрена граничная задача об установившейся фильтрации жидкости в пористом грунтовом основании в форме полосы, когда жидкость через систему взаимно непересекающихся отрезков верхней грани полосы

с заданной вертикальной скоростью впрыскивается во внутрь полосы, а на нижней грани полосы вертикальная компонента скорости равна нулю. В работах [10,11] исследованы аналогичные плоские и пространственные граничные задачи теории установившейся фильтрации для пористых клиновидных и слоистых грунтовых оснований.

В настоящей работе решается обратная к рассмотренной в [9] граничная задача: каков должен быть закон распределения вертикальных скоростей впрыскиваемой жидкости на данной системе отрезков, чтобы на этой же системе отрезков давление равнялось наперёд заданной величине в виде известной функции. Решение этой задачи на основании результатов работы [9] сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ). Через решение определяющего СИУ вычисляются фильтрационные характеристики задачи: распределение вертикальной компоненты скорости на данных отрезках и расходы жидкости через вертикальные сечения полосы. Проведён численный анализ задачи. Отметим, что рассматриваемая здесь задача по своей постановке близка к известной задаче Ламба в гидродинамике [12] и тесно примыкает как в идейном, так и в методологических аспектах, к контактными и смешанным задачам теории упругости. В принципе, можно установить соответствие между граничными задачами теории установившейся фильтрации жидкости в пористых средах и граничными задачами из довольно широкого класса задач теории упругости при антиплоской деформации. Конкретно в данном случае можно рассматривать аналогичную задачу для упругой полосы теории упругости при антиплоской деформации, если модуль сдвига полосы по её глубине изменяется по экспоненциальному закону.

Следует подчеркнуть, что в цитированных выше работах [1–7] для решения граничных задач теории фильтрации, в основном, применяются методы теории функции комплексного переменного, особенно метод конформных отображений, аналитической теории дифференциальных уравнений, метод годографа скорости и разнообразные приближённые методы. Здесь, а также в работах [8–11], применяются методы интегральных преобразований в сочетании с методами теории интегральных уравнений, особенно методы СИУ. Эти методы более эффективны, так как сразу определяют нужные физические характеристики задач, более компактны и многие компьютерные вычислительные программы приурочены к методам интегральных уравнений.

1. Постановка задачи и вывод определяющего СИУ. Пусть отнесённый к прямоугольной системе координат Oxy (ось Oy направлена вертикально вниз) пористое грунтовое основание имеет форму полосы



Фиг. 1

$\Omega = \{-\infty < x < \infty ; 0 < y < H\}$ высоты H (фиг.1) и обладает коэффициентом фильтрации k , изменяющимся по вертикальной координате y по экспоненциальному закону

$$k = k(y) = k_0 \exp(\alpha y/2) \quad (0 \leq y \leq H; k_0, \alpha = \text{const})$$

Пусть далее грань $y = H$ полосы Ω водонепроницаема, т.е. вертикальная компонента скорости при $y = H$ равна нулю: $v_y|_{y=H} = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$, а через систему отрезков $L = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]$ верхней грани $y = 0$ жидкость с заданным

давлением

$$h(x, y)|_{y=0} = f(x) \quad (x \in L) \quad (1)$$

впрыскивается во внутрь грунтового основания.

Здесь $h = h(x, y) = p(x, y)/\gamma - y$ – пьезометрическое давление, γ – удельный вес жидкости, $p(x, y)$ – давление в жидкости, а $f(x)$ – наперёд заданная известная функция.

Требуется определить вертикальную компоненту скорости $v(x)$ на системе отрезков L :

$$v_y|_{y=0} = v(x) \quad (x \in L).$$

Для полноты постановки задачи должен быть задан также расход жидкости Q_j на каждом отрезке $[a_j, b_j]$ ($j = \overline{1, n}$) системы L :

$$\int_{a_j}^{b_j} v(s) ds = Q_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Приступим к выводу определяющего интегрального уравнения поставленной задачи. С этой целью воспользуемся полученным в [9] выражением для пьезометрического давления через функцию $v(x)$ ($\lambda_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2}$):

$$h(x, y) = \frac{e^{-\alpha y/2}}{2\pi k_0} \int_L K_* (|x-s|, y) v(s) ds \quad (-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq H) \quad (3)$$

$$K_* (|x-s|, y) = \int_0^\infty \frac{\cos[\lambda(x-s)]}{\lambda^2 \text{sh}(\lambda_* H/2)} \left\{ \lambda_* \text{ch} \left[\frac{\lambda_* (H-y)}{2} \right] - \alpha \text{sh} \left[\frac{\lambda_* (H-y)}{2} \right] \right\} d\lambda$$

где λ – спектральный параметр Фурье.

Теперь, исходя из (3), реализуем граничное условие (1). В результате, относительно функции $v(x)$ придём к следующему определяющему интегральному уравнению Фредгольма первого рода поставленной задачи:

$$\frac{1}{2\pi k_0} \int_L K (|x-s|) v(s) ds = f(x) \quad (x \in L) \quad (4)$$

$$K(x) = \int_0^\infty \left[\lambda_* \text{cth}(\lambda_* H/2) - \alpha \right] \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda^2} d\lambda$$

Решение интегрального уравнения (4) должно удовлетворять условиям (2).

Далее интегральное уравнение (4) сведём к СИУ, для чего обе части (4) продифференцируем по x . В результате, придём к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi k_0} \int_L M(s-x) v(s) ds = f'(x) \quad (x \in L) \quad (5)$$

$$M(x) = -K'(x) = \int_0^\infty \left[\lambda_* \operatorname{cth} \left(\frac{\lambda_* H}{2} \right) - \alpha \right] \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} d\lambda \quad \left(\lambda_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2} \right)$$

Теперь выделим сингулярную часть ядра $M(x)$. Так как

$$\lambda_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2} = 2\lambda \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\lambda^2} \right)^{1/2} = 2\lambda \left(1 + \frac{\alpha^2}{8\lambda^2} + \dots \right) \sim 2\lambda \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{\lambda_* \operatorname{ctg}(\lambda_* H/2) - \alpha}{\lambda} = \frac{\lambda_* \operatorname{cth}(\lambda_* H/2) - \alpha}{\lambda} \sim \frac{2\lambda}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} = 2 - \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

интеграл Фурье для функции $M(x)$ из (5) можем преобразовать следующим образом:

$$M(x) = \int_0^\infty \left[\frac{\lambda_* \operatorname{cth}(\lambda_* H/2) - \alpha}{\lambda} - 2 + \frac{\alpha}{\lambda} \right] \sin(\lambda x) d\lambda + \int_0^\infty \left[2 - \frac{\alpha}{\lambda} \right] \sin(\lambda x) d\lambda,$$

где интегралы, вообще говоря, следует понимать в смысле теории обобщённых функций [13]. Приняв во внимание выражения известных интегралов Фурье из [14]

$$\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sign} \lambda e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{2i}{x}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda} d\lambda = i\pi \operatorname{sign} x,$$

можем написать

$$M(x) = \frac{2}{x} - \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} x + N(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6)$$

$$N(x) = \int_0^\infty \frac{\lambda_* \operatorname{cth}(\lambda_* H/2) - 2\lambda}{\lambda} \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Учитывая (6), уравнение (5) представим в виде

$$\frac{1}{\pi k_0} \int_L \left[\frac{1}{s-x} + \frac{\alpha\pi}{4} \operatorname{sign}(s-x) + \frac{1}{2} N(s-x) \right] v(s) ds = f'(x). \quad (x \in L) \quad (7)$$

Итак, решение обсуждаемой задачи сводится к решению СИУ (7) при условиях (2). Отметим, что в СИУ (7) ядро представлено суммой сингулярной (ядра Коши) и регулярной частей.

Введём безразмерные величины:

$$\xi = x/a; \quad \eta = s/a; \quad \bar{\alpha} = \alpha a; \quad \hat{H} = H/a;$$

$$\alpha_j = a_j/a, \quad \beta_j = b_j/a \quad (j = \overline{1, n}); \quad L_0 = \bigcup_{j=1}^n [\alpha_j, \beta_j]; \quad \sigma = a\lambda$$

$$v_0(\xi) = v(a\xi)/k_0, \quad f_0(\xi) = f'(a\xi);$$

В этих безразмерных величинах СИУ (7) преобразуется в следующее СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \left[\frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\bar{\alpha}\pi}{4} \operatorname{sign}(\eta - \xi) + \frac{1}{2} N_0(\eta - \xi) \right] v_0(\eta) d\eta = f_0(\xi) \quad (\xi \in L_0) \quad (8)$$

$$N_0(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_* \operatorname{cth}(\sigma_* \hat{H}/2) - 2\sigma}{\sigma} \sin(\sigma \xi) d\sigma \quad (\sigma_* = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + 4\sigma^2})$$

а условия (2) – в условия

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} v_0(\eta) d\eta = Q_j^0 \quad \left(Q_j^0 = \frac{Q_j}{ak_0}; j = \overline{1, n} \right), \quad (9)$$

где a – некий характерный линейный параметр, отличный от нуля, например, $a = a_1$, если $a_1 \neq 0$.

Таким образом, окончательно, решение поставленной граничной задачи сводится к решению определяющего СИУ (8) при условиях (9).

2. Решение определяющего СИУ и вычисление фильтрационных характеристик. Известным численно-аналитическим методом решения СИУ [15–17] решение СИУ (8)–(9) сведём к системе систем линейных алгебраических уравнений. С этой целью сначала каждый отрезок $[\alpha_j, \beta_j]$ системы L_0

преобразуем в отрезок $[-1, 1]$, полагая

$$\xi = \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2}; \quad \eta = \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} \quad (-1 \leq u, t \leq 1; j = \overline{1, n}).$$

В результате, СИУ (8) преобразуется в следующую систему СИУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_j(u) du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^n \int_{-1}^1 \left[R_{jp}(u, t) + \frac{\pi \bar{\alpha} (\beta_p - \alpha_p)}{8} S_{jp}(u, t) + \right. \\ \left. + \frac{\beta_p - \alpha_p}{4} N_{jp}(u, t) \right] v_p(u) du = f_j(t) \quad (j = \overline{1, n}; -1 < t < 1) \end{aligned} \quad (10)$$

а условия (9) – в следующие условия:

$$\int_{-1}^1 v_j(u) du = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} Q_j^0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (11)$$

Здесь приняты обозначения:

$$R_{jp}(u, t) = \left[u - \frac{\beta_j - \alpha_j}{\beta_p - \alpha_p} t + \frac{\beta_p + \alpha_p}{\beta_p - \alpha_p} - \frac{\beta_j - \alpha_j}{\beta_p - \alpha_p} \right]^{-1};$$

$$S_{jp}(u, t) = \operatorname{sign} \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u - \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} - \frac{\beta_p + \alpha_p}{2} \right); \quad (j, p = \overline{1, n})$$

$$\begin{aligned} N_{jp}(u, t) = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_* \operatorname{cth}(\sigma_* H_0/2) - 2\sigma}{\sigma} \times \\ \times \sin \left[\sigma \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u - \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} - \frac{\beta_p + \alpha_p}{2} \right) \right] d\sigma; \\ (\sigma_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\sigma^2}) \quad (j, p = \overline{1, n}) \quad (-1 < t, u < 1) \end{aligned} \quad (12)$$

$$v_j(t) = v_0 \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} \right), \quad f_j(t) = f_0 \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2} t + \frac{\beta_j + \alpha_j}{2} \right) \quad (j = \overline{1, n})$$

Далее положим

$$v_j(t) = \frac{\varphi_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1; \quad j = \overline{1, n}), \quad (13)$$

где $\varphi_j(t)$ – функции из гельдеровского класса функций, определённых на отрезке $[-1, 1]$. Следуя известной методике [15–17], систему СИУ (10)–(12) сведём к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^N \frac{X_m^{(j)}}{N(u_m - t_r)} + \sum_{\substack{p=1 \\ (p \neq j)}}^n \sum_{m=1}^N \frac{X_m^{(p)}}{N} [R_{jp}(u_m, t_r) + \\ \frac{\pi \bar{\alpha}(\beta_p - \alpha_p)}{8} S_{jp}(u_m, t_r) + \frac{\beta_p - \alpha_p}{4} N_{jp}(u_m, t_r)] = f_j(t_r) \quad (j = \overline{1, n}; \quad r = \overline{1, N-1}) \\ \sum_{m=1}^N \frac{\pi}{N} X_m^{(j)} = \frac{2}{\beta_j - \alpha_j} Q_j^0 \quad (j = \overline{1, n}) \end{array} \right. \quad (14)$$

откуда определяются неизвестные

$$X_m^{(j)} = \varphi_j(u_m) \quad (j = \overline{1, n}; \quad m = \overline{1, N})$$

где N – любое натуральное число, а

$$u_m = \cos \left[\frac{\pi(2m-1)}{2N} \right] \quad (m = \overline{1, N}), \quad t_r = \cos \left(\frac{\pi r}{N} \right) \quad (r = \overline{1, N-1})$$

– чебышевские узлы, т.е. корни, соответственно, многочленов Чебышева первого рода $T_N(u)$ и второго рода $U_{N-1}(t)$.

Очевидно, что система систем линейных уравнений (13) состоит из nN числа уравнений и содержит столько же неизвестных.

После решения системы (14), согласно (13), величины безразмерных скоростей на j -том отрезке верхней грани полосы в чебышевских узлах u_m будут определяться по формуле

$$v_j(u_m) = \frac{\varphi_j(u_m)}{\sqrt{1-u_m^2}} = \frac{X_m^{(j)}}{\sqrt{1-u_m^2}} \quad (m = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, n}) \quad (15)$$

Теперь можно вычислить также важную фильтрационную характеристику задачи – расход жидкости $Q(x)$ через любое поперечное сечение $l_x = \{0 \leq y \leq H\}$ ($-\infty < x < \infty$) полосы, выражающийся формулой [4]

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_L \text{sign}(x-s) v(s) ds \quad (-\infty < x < \infty)$$

В этой формуле, как и выше, перейдём к безразмерным величинам:

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad v_0(\xi) = v(a\xi)/k_0, \quad Q_0(\xi) = Q(a\xi)/ak_0$$

В результате, получим

$$Q_0(\xi) = \frac{1}{2} \int_{L_0} \text{sign}(\xi - \eta) v_0(\eta) d\eta \quad (-\infty < \xi < \infty) \quad (16)$$

Если далее каждый отрезок $[\alpha_j, \beta_j]$ ($j = \overline{1, n}$) системы L_0 , как и выше, преобразовать в отрезок $[-1, 1]$, то формула (16) примет вид:

$$Q_0(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j - \alpha_j}{4} \int_{-1}^1 \text{sign}\left(\xi - \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u - \frac{\beta_j + \alpha_j}{2}\right) v_j(u) du,$$

где функции $v_j(t)$ задаются формулой (13). Отсюда при помощи решения системы (14) придём к следующей расчётной формуле:

$$Q_0(\xi) = \frac{\pi}{4N} \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) \sum_{m=1}^N \text{sign}\left(\xi - \frac{\beta_j - \alpha_j}{2} u_m - \frac{\beta_j + \alpha_j}{2}\right) X_m^{(j)} \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

3. Частный случай, числовые результаты и выводы. Рассмотрим частный случай, когда $n = 1$ и, следовательно, система L состоит из одного отрезка $[a_1, b_1]$. Примем также $a_1 = -a$, $b_1 = a$. В этом случае определяющее СИУ задачи имеет вид (7), где $L = [-a, a]$, а после перехода к безразмерным величинам, согласно (8), – вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\bar{\alpha}\pi}{4} \text{sign}(\eta - \xi) + \frac{1}{2} N_0(\eta - \xi) \right] v_0(\eta) d\eta = f_0(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (17)$$

В данном частном случае имеем только одно условие (2):

$$\int_{-a}^a v(s) ds = Q,$$

которое в безразмерных величинах преобразуется в условие

$$\int_{-1}^1 v_0(\eta) d\eta = \bar{Q}_0 \quad (\bar{Q}_0 = Q/ak_0). \quad (18)$$

Теперь СИУ (17)–(18) по известной процедуре, как выше, можно свести к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^N \frac{1}{N} \left[\frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \frac{\bar{\alpha}\pi}{4} \text{sign}(\eta_m - \xi_r) + \frac{1}{2} N_0(\eta_m - \xi_r) \right] X_m = f_0(\xi_r) \quad (r = \overline{1, N-1}) \\ \sum_{m=1}^N \frac{\pi}{N} X_m = \bar{Q}_0 \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\eta_m = \cos \left[\frac{\pi(2m-1)}{2N} \right] \quad (m = \overline{1, N}); \quad \xi_r = \cos \left(\frac{\pi r}{N} \right) \quad (r = \overline{1, N-1})$$

и приняты обозначения

$$v_0(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (-1 < \xi < 1); \quad X_m = \varphi(\eta_m).$$

Функция $\Phi(\xi)$ определена на отрезке $[-1,1]$ и удовлетворяет условию Гельдера.

Систему линейных уравнений можем записать в канонической форме:

$$\sum_m^N K_{rm} X_m = c_r \quad (r = \overline{1, N}), \quad c_r = \begin{cases} f_0(\xi_r) & (r = \overline{1, N-1}); \\ Q_0 & (r = N) \end{cases}$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \frac{\bar{\alpha}\pi}{4} \text{sign}(\eta_m - \xi_r) + \frac{1}{2} N_0(\eta_m - \xi_r) \right] & (m = \overline{1, N}; r = \overline{1, N-1}); \\ \frac{\pi}{N} & (m = \overline{1, N}; r = N) \end{cases} \quad (20)$$

После решения системы (20) для вычисления безразмерных скоростей вместо (15) будем иметь расчётную формулу

$$v(\eta_m) = \frac{\Phi(\eta_m)}{\sqrt{1-\eta_m^2}} = \frac{X_m}{\sqrt{1-\eta_m^2}} \quad (m = \overline{1, N}), \quad (21)$$

а, согласно (16), в данном частном случае

$$Q_0(\xi) = \frac{\pi}{2N} \sum_{m=1}^N \text{sign}(\xi - \eta_m) X_m \quad (-\infty < \xi < \infty) \quad (22)$$

В данном частном случае по формуле (3) вычислим также пьезометрическое давление на нижнюю грань $y = H$ полосы Ω $(-\infty < x < \infty; \lambda_* = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2})$:

$$h(x, H) = \frac{e^{-\alpha H/2}}{2\pi k_0} \int_{-a}^a K_*(|x-s|, H) v(s) ds = \frac{e^{-\alpha H/2}}{2\pi k_0} \int_{-a}^a v(s) ds \int_0^\infty \frac{\cos[\lambda(x-s)] \lambda_* d\lambda}{\lambda^2 \text{sh}(\lambda_* H/2)}$$

Отсюда, после перехода к безразмерным величинам

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad v_0(\xi) = v(a\xi)/k_0,$$

$$h_0(\xi, \hat{H}) = h(a\xi, H)/a, \quad \hat{H} = H/a,$$

получим

$$h_0(\xi, \hat{H}) = \frac{e^{-\bar{\alpha}\hat{H}/2}}{2\pi} \int_{-1}^1 v_0(\eta) d\eta \int_0^\infty \frac{\sigma_* \cos[\sigma(\xi - \eta)]}{\sigma^2 \text{sh}(\sigma_* \hat{H}/2)} d\sigma$$

$$(-\infty < \xi < \infty; \sigma_* = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + 4\sigma^2})$$

Для производной же от безразмерного пьезометрического давления будем иметь:

$$\frac{dh_0(\xi, \hat{H})}{d\xi} = -\frac{e^{-\bar{\alpha}\hat{H}/2}}{2\pi} \int_{-1}^1 v_0(\eta) d\eta \int_0^\infty \frac{\sigma_* \sin[\sigma(\xi - \eta)]}{\sigma \text{sh}(\sigma_* \hat{H}/2)} d\sigma \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

и, следовательно, приняв во внимание (21), можем записать

$$\frac{dh_0(\xi, \hat{H})}{d\xi} = -\frac{e^{-\bar{\alpha}\hat{H}/2}}{2N} \sum_{m=1}^N X_m \int_0^\infty \frac{\sigma_* \sin[\sigma(\xi - \eta_m)]}{\sigma \text{sh}(\sigma_* \hat{H}/2)} d\sigma. \quad (23)$$

Таким образом, в обсуждаемом частном случае расчётными формулами будут формулы (21)-(23). Для численной реализации этих формул рассмотрены два частных случая.

I случай. В этом случае принято, что

$$h(x, y)|_{y=0} = f(x) = \text{const} \quad (-a < x < a)$$

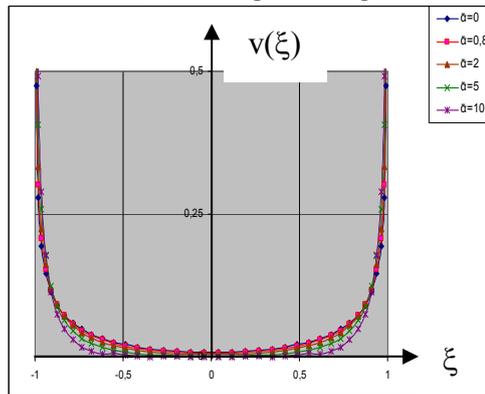
т.е. на интервале $(-a, a)$ заданное давление постоянно и, следовательно, $f_0(\xi) \equiv 0$.

Кроме того, принято $\bar{Q}_0 \equiv 0,1$; $\hat{H} = 0,5$.

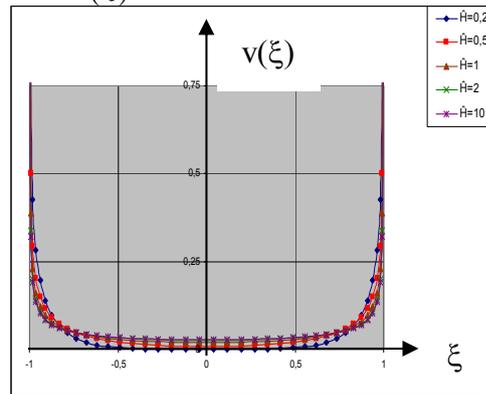
Для таких значений параметров по формуле (21) при различных значениях параметра неоднородности $\bar{\alpha}$ вычислены значения скорости $v(\xi)$ и по ним построены графики её изменения (фиг.2). Анализ этих кривых показывает, что в центральной части интервала $(-1,1)$ по мере возрастания $\bar{\alpha}$ значения $v(\xi)$ убывают, а вблизи его концов, наоборот, они возрастают, причём при $\xi \rightarrow +1$ скорости во всех случаях круто возрастают, стремясь к бесконечности. На фиг.3 приведены графики изменения $v(\xi)$ для различных значений приведённой высоты \hat{H} , когда

$$f_0(\xi) \equiv 0; \quad \bar{\alpha} = 0,5; \quad \bar{Q}_0 \equiv 0,1$$

Здесь наблюдается обратная картина изменения $v(\xi)$.



фиг. 2



фиг. 3

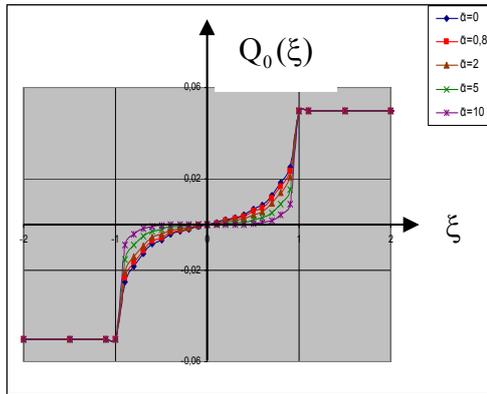
Далее по формуле (22) вычислены значения безразмерного расхода жидкости по вертикальным сечениям полосы \hat{H} для различных $\bar{\alpha}$, когда

$$f_0(\xi) \equiv 0; \quad \bar{Q}_0 \equiv 0,1; \quad \hat{H} = 0,5.$$

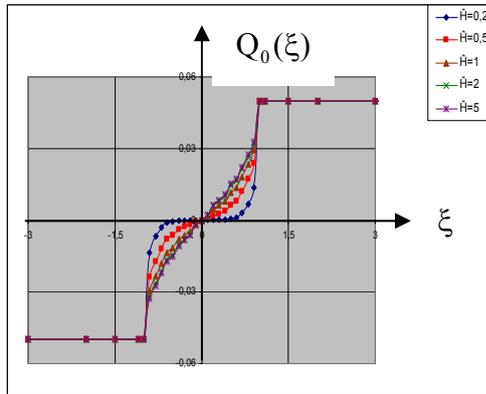
По результатам вычислений построены графики изменения $Q_0(\xi)$ (фиг. 4). Здесь по мере возрастания $\bar{\alpha}$ значения $Q_0(\xi)$ в интервале $(-1,1)$ по абсолютной величине убывают, а на лучах $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$ постоянны, отличаясь друг от друга лишь знаком. На фиг.5 приведены графики $Q_0(\xi)$ для различных \hat{H} , когда

$$f_0(\xi) \equiv 0; \quad \bar{\alpha} = 0,5; \quad \bar{Q}_0 \equiv 0,1$$

Здесь в зависимости от \hat{H} наблюдается обратная картина изменения $Q_0(\xi)$.

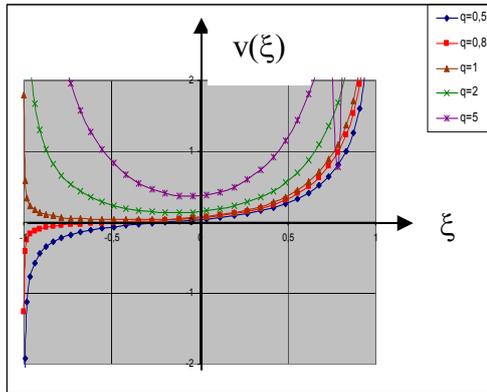


фиг. 4

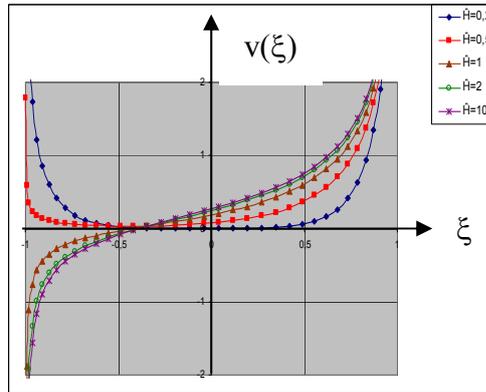


фиг. 5

II случай. В этом случае принято $f(x) \equiv \beta x$ и соответственно положено $f_0(\xi) \equiv 1$. При фиксированных $\hat{H} = 0,5$ и $\bar{\alpha} = 0,5$ и для различных $q = \bar{Q}_0$ построены графики скорости $v(\xi)$ изменения (фиг. 6).

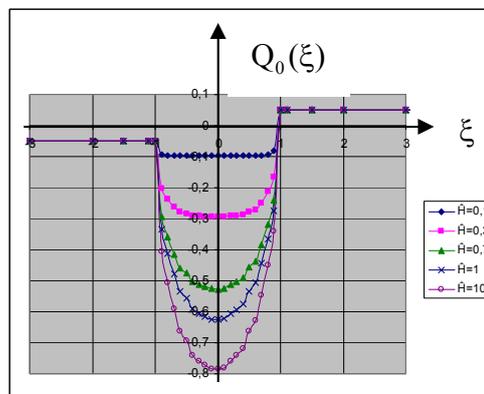


фиг. 6



фиг. 7

Здесь при возрастании $q = \bar{Q}_0$ значения $v(\xi)$ возрастают, причем в интервале $(-1, 0)$ они изменяют знак, становясь положительными с постепенным возрастанием. При $\xi \rightarrow \pm 1$ скорости бесконечно возрастают.



фиг. 8

На фиг.7 приведены графики изменения $v(\xi)$ при фиксированных $\bar{\alpha} = 0,5$; $q = \bar{Q}_0 = 0,1$, но для различных \hat{H} . Здесь также при возрастании \hat{H} в интервале $(-1,0)$ скорости меняют знак. На фиг.8 показаны графики изменения $Q_0(\xi)$ для различных \hat{H} .

4. Заключение. Основными результатами данной работы являются явные представления фильтрационных характеристик рассматриваемой задачи: пьезометрического давления, компонент скоростей, расхода жидкости и выявление закономерностей их изменения в довольно широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров, в том числе, показателя неоднородности грунтового основания. Одновременно в рассматриваемой задаче показана эффективность метода интегральных уравнений, который успешно может быть применён для решения широкого класса смежных граничных задач теории фильтрации и теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Фильчаков П.Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т.1–2. Киев: Изд. АН УССР, 1959–1960. 308с., 256с.
4. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.: Наука, 1969. 546с.
5. Булавацкий В.М. Математические модели консолидации водонасыщенных пористых сред и нагруженные дифференциальные уравнения. // [Компьютерная математика](#). 2011. Вып.2. С.13–20.
6. Strzelecki T., Strzelecki M., Cuprum K. Relation between filtration and soil consolidation theories. // *Studia Geotechnica et Mechanica*. Vol. 37. №1. 2015. Pp.105–114.
7. Барсегян Р.М. Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1977. 303 с.
8. Tokmajyan H.V., Mkhitaryan S.M., Grigoryan M.S. On two Plane Problems Steady-State Fluid Filtration in Porous Heterogeneous Soil Laer. // *Proceedings of 3rd International Conference on Contemporary Problems in Architecture and Construction*. November 20-24, 2011, Beijing, China. Edited by Guo-hua SONG, Lin-an LIU, Tao CHEN and Fei LI, p. 2-14–2-19.
9. Аветисян С.А. О двух смежных граничных задачах теории фильтрации и теории упругости для экспоненциально неоднородной полосы. МЕХАНИКА-2013. // Труды межд. Школы-конференции молодых учёных, посвящ. 70-летию НАН Армении. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. Ереван-2013, с.40-44.
10. Григорян М.С. О двух смежных граничных задачах теории фильтрации и теории упругости для клиновидной области. МЕХАНИКА-2013. // Труды Межд. Школы-конференции молодых учёных, посвящ. 70-летию НАН Армении. 1–4 октября 2013, Цахкадзор, Армения. Ереван-2013, с.129-133.
11. Мхитарян С.М., Токмаджян О.В., Шемян Л.А., Григорян М.С. О двух пространственных задачах теории установившейся фильтрации жидкости в пористом грунтовом слое конечной или бесконечной мощности. // *Изв. ЕрГУАС*. 2013. №2. С.46–57.
12. Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
13. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327 с.
14. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщённых функций. М.: Наука, 1977. 288 с.

15. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
16. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis an solution of crack problems, pp.368-425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
17. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of singular Integral Equations. //Quart. Appl Math., vol. XXXV, №1, pp.173-185, 1977.

Сведения об авторах:

Аветисян Сирануш Араратовна,

Мл. науч. сотрудник, Институт механики НАН Армении,

Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, ИМех. НАН РА

Тел.: (37494)-99-98-42; **E-mail:** ashonik@rambler.ru

Мкртчян Мгер Мушегович,

Мл. науч. сотрудник, Институт механики НАН Армении.

Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, ИМех. НАН РА

Тел.: (37410)-43-16-52; **E-mail:** mher_1982@mail.ru

Поступила в редакцию 14.11.2014