

УДК 621.38

О ДВУХ ПОДХОДАХ К ИССЛЕДОВАНИЮ КИНЕМАТИКИ УПРУГИХ
МАНИПУЛЯТОРОВ

Гукасян А.А.

Բանալի բառեր. Բազմօղակ առաձգական մանիպուլյատոր, կոորդինատային համակարգ, կինեմատիկական առնչություններ:

Ключевые слова: многозвенный упругий манипулятор, системы координат, кинематические соотношения.

Key words: Multilayer elastic manipulator, coordinate system, kinematic correlation

Ղուկասյան Ա.Ա.

Առաձգական մանիպուլյատորի կինեմատիկայի ուսումնասիրության երկու մոտեցումների մասին

Տարբեր կոորդինատական համակարգերում հետազոտվում է բազմօղակ առաձգական մանիպուլյատորի կինեմատիկան: Ենթադրվում է, որ մանիպուլյատորի օղակները մոդելավորվում են որպես առաձգական ձողեր, իսկ օղակների միացման հանգույցները պարունակում են մեծ կոշտության առաձգական էլեմենտներ: Ընդհանուր դեպքում, օգտվելով առաձգականության գծային տեսությունից ստացված են կինեմատիկական առնչությունները բնութագրող բանաձևեր ինչպես դեկարտյան, այնպես էլ կորագիծ կոորդինատական համակարգերում: Կինեմատիկական առնչությունները (բնութագրիչ կետերի դիրքը, նրանց շարժման արագությունը և արագացումը) ներկայացված են երեք գումարելիների տեսքով, որոնք բնութագրում են ինչպես բացարձակ կոշտ օղակներով և իդեալական միացման հանգույցներով, այնպես էլ միացման առաձգական հանգույցներով և առաձգական օղակներով մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկան: Ստացված առնչությունները դեկարտյան կոորդինատներով կախված են մանիպուլյատորի ընդհանրացված կոորդինատներից, որոնք որոշում են կոնֆիգուրացիան և առաձգական հատկությունները, իսկ կորագիծ կոորդինատներով՝ նաև Լյամեի գործակիցներից: Կոնկրետ դեպքերում կա հնարավորություն համեմատելու ընտրած եղանակներն ու հետազոտության արդյունքները:

Ghukasyan A.A.

On two Approaches to Research of Kinematics of Elastic Manipulators

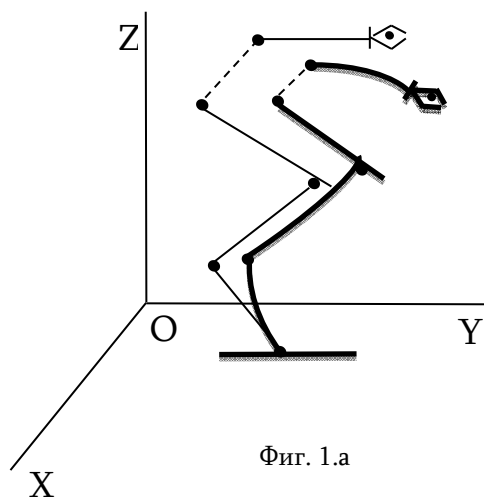
In different coordinate system the kinematics of motion of multilayer elastic manipulator is investigated. It is supposed that the links of manipulators are modeling as elastic bars and connecting points between links contain elastic elements of large rigidity. In general case with the application of linear theory of elasticity the formulas determining the kinematic correlation both for Cartesian coordinate system and curvilinear coordinate system are received. The kinematic correlation (position of character points, their velocity and motion acceleration) are presented in the form of a sum of three component which are characterise the kinematics of motion of manipulator both as absolutely rigidity links and ideal connection links as well as with elastic junctions and elastic links. Obtained correlations at Cartesian coordinates depend on generalized coordinates determined the configuration and elastic features of manipulator and in the curvilinear coordinate system – also from Lamé coefficient. In particular cases it is possible to compare the methods and results of investigations.

В различных системах координат исследуется кинематика движения многозвенного упругого манипулятора. Предполагается, что звенья манипулятора моделируются как упругие стержни, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости. В общем случае, с применением линейной теории упругости получены формулы, определяющие кинематические соотношения как в декартовых, так и в криволинейной системе координат. Кинематические соотношения (положения характерных точек, их скорость и ускорения движений) представлены в виде суммы трёх слагаемых, которые характеризуют кинематику движения манипулятора как с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, так и с упругими узлами и упругими звеньями.

Полученные соотношения в декартовых координатах зависят от обобщённых координат, определяющих конфигурацию и упругие свойства манипулятора, а в криволинейной системе координат – также от коэффициентов Ляме. В конкретных случаях имеется возможность сравнения способов и результатов исследования.

Введение. Изучение кинематики движения пространственных манипуляторов является основой для исследования более сложных задач динамики и проектирования системы управления, поскольку кинематика манипулятора в основном определяет работоспособность робота. При исследовании кинематики манипуляторов следует придерживаться следующим основным порядкам: 1) выбрать наиболее подходящие системы координат; 2) составить кинематические уравнения и определить траекторию движения характерных точек звеньев и схвата манипулятора в избранной системе координат; 3) по уравнениям движения определить проекции векторов скорости и ускорения на осях выбранной системы координат; 4) определить модуль и направления вектора скорости, ускорения характерных точек, а также схвата.

Для исследователя выбор той или иной системы координат зависит как от технологического предназначения робота, так и от геометрии конструкции манипулятора. Ниже, на основе математической модели упругого многозвенного манипулятора приводятся результаты исследования кинематики пространственного движения как в декартовых координатах, так и в криволинейной системе координат. Предполагается, что звенья манипулятора (или часть из них) моделируются как



Фиг. 1.а

упругие стержни, а соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости [1-12]. Манипулятор с такими свойствами назовём манипулятором с обобщённой упругостью. Предполагается, что все соединительные узлы между звеньями представляют собой цилиндрические шарниры (вращательные кинематические пары пятого класса), или поступательные кинематические пары пятого класса. Исследования проводятся в рамках линейной теории упругости.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является выявление возможности исследования кинематики упругих манипуляторов с применением различных систем координат, сравнение

результатов и способов исследования. Актуальность такой постановки исследования обуславливается тем, что для современных робототехнических систем пространственные движения всех звеньев, в целом и в отдельности, в зависимости от соединительных механизмов между ними, могут привести к необходимости в рамках исследования одной задачи применять различные системы координат.

1. Математическая модель многозвенного манипулятора. Следуя [8], приведём краткое описание упругой модели манипулятора фиг.1.а. Обобщённые координаты, определяющие конфигурацию манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и с идеальными соединительными узлами, обозначим через компоненты вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, дополнительные координаты, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах – через

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ ($m \leq n$). Деформацию упругих звеньев манипулятора относительно их недеформированного состояния обозначим через вектор $\mathbf{w}(t, \xi) = (w_1(t, \xi), w_2(t, \xi), \dots, w_k(t, \xi))^T$, где ξ – произвольная точка упругого звена. Символ "T" обозначает транспонирование вектора или матрицы фиг. 1.б.

Согласно линейной теории упругости предполагаем, что жёсткость соединительных узлов между звеньями велика ($c_j \sim \varepsilon^{-1}$), обобщённые координаты β_j малы ($\beta_j \sim \varepsilon, j = 1, 2, \dots, m$), компоненты вектора упругих смещений звеньев малы по сравнению с их линейными размерами, то есть $w_l(t, \xi) \sim \varepsilon, w'_l(t, \xi) \sim \varepsilon, \dot{w}_l(t, \xi) \sim \varepsilon, (l = 1, 2, \dots, k)$, где $\varepsilon \ll 1$, частные производные по ξ обозначены штрихом, а по t – точкой. Согласно приведённым предположениям, в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ соединительные узлы становятся идеальными, а звенья – абсолютно твёрдыми телами.

2. Скорость движения упругого манипулятора.

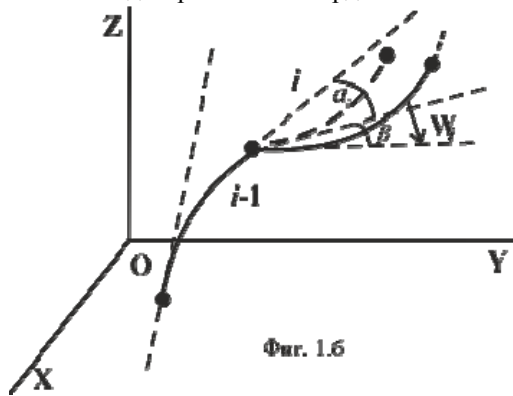
а) **Метод декартовых координат.** Положение характерных точек упругого манипулятора в пространстве определим через вектор \mathbf{q} , компоненты которого являются декартовыми координатами точек относительно инерциальной системы координат

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T \quad (2.1)$$

Кинематику манипулятора с упругими свойствами, в общем случае, можно исследовать на основе соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha, \beta, \mathbf{w}), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{f}(\alpha, \beta, \mathbf{w})$ – заданная N -мерная вектор-функция от вектор-аргументов, структура которой зависит от выбора обобщённых координат жёсткой (α) и



Фиг. 1.б

упругой модели (β, \mathbf{w}) манипулятора, а также от геометрии манипулятора.

В рамках предположений относительно величин вводимых параметров $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), \mathbf{w} = \mathbf{w}(t, \xi)$, то есть

$$\alpha_i \sim 1, i = 1, 2, \dots, n, \beta_j \sim \varepsilon, j = 1, 2, \dots, m, w_l(t, \xi) \sim w'_l(t, \xi) \sim \dot{w}_l(t, \xi) \sim \varepsilon,$$

$$l = 1, 2, \dots, k, \varepsilon \ll 1, t \in [0, T], \xi \in [0, l], T \sim 1, l \sim 1,$$

дальнейшие исследования проведём асимптотическим методом малого параметра ε .

Разложение вектор-функции \mathbf{q} (2.2) относительно β и \mathbf{w} с точностью ε^2 по формуле Тейлора имеет вид:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha, 0, 0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\alpha, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial \mathbf{f}(\alpha, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + O(\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

или

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha) + \mathbf{f}^{1*}(\alpha, \beta) + \mathbf{f}^{2*}(\alpha, \mathbf{w}), \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0), \quad \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j, \quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) = \sum_{l=1}^k \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l$$

$$\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv 0.$$

Из (2.3), (2.4) можно предположить, что в пределах линейной теории упругости положение инерционных элементов упругого манипулятора описывается в рамках жёсткой модели путем введения дополнительного вектора $\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, обусловленного упругостью соединительных узлов между звеньями, и вектора $\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$, обусловленного упругой податливостью звеньев манипулятора.

Вычисляя производные по времени от функции (2.2) с учётом (2.3), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде [8]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{w}} \quad (2.5)$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}), \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}},$$

$$\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{w}},$$

$$(\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0),$$

$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ определяет скорость движения манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ – дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью соединительных узлов, а $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ зависит от упругих свойств звеньев манипулятора.

Для определения компонентов вектора скорости (2.6) необходимо вычислить элементы матриц $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$, $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$. Приведём структуры и общие элементы указанных матриц.

Матрица $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ размерности $(N \times n)$ имеет следующий общий элемент:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{N,n} \quad (2.7)$$

$\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ имеет также размерность $(N \times n)$ с общим элементом

$$\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{N,n}, \quad (2.8)$$

где

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right),$$

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, 0)}{\partial \alpha_j} \equiv 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n).$$

Матрица размерности $(N \times m)$

$$\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right\}_{i,j=1}^{N,m}, \quad (2.9)$$

где общим элементом матрицы $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ является

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j},$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, m).$$

Аналогично, матрица $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$ имеет размерность $(N \times n)$ с элементами

$$\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{N,n}, \quad (2.10)$$

где

$$\frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right), \quad \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, 0)}{\partial \alpha_j} \equiv 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n).$$

Матрица размерности $(N \times k)$

$$\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})}{\partial w_j} \right\}_{i,j=1}^{N,k}. \quad (2.11)$$

Общий элемент матрицы $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$ определяется следующим образом:

$$\frac{\partial f_i^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, k)$$

Следовательно, в общем случае алгоритм вычисления скорости движения упругого манипулятора в декартовой системе координат по формуле (2.5) сводится к необходимости определения элементов матриц (2.7)-(2.11). Из предположений относительно величин (обобщённых координат), обусловленных упругими свойствами соединительных узлов (шарниров) и звеньев, следует, что $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ имеет порядок ε , а порядок вектора $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ не превышает ε^2 .

б) Метод криволинейных координат. Криволинейные координаты s_p ($p = 1, 2, 3$) характерных точек манипулятора зависят от декартовых координат $s_p = s_p(q_1, q_2, q_3)$, удовлетворяющих необходимым требованиям дифференцируемости и условию однозначной разрешимости этих зависимостей относительно q_1, q_2, q_3 .

С учётом (2.2) имеем:

$$s_p = s_p[f_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), f_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), f_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})] = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), \quad (p = 1, 2, 3), \quad (2.12)$$

то есть криволинейные координаты характерных точек манипулятора зависят как от геометрии, так и от обобщённых координат жёсткой и упругой моделей манипулятора [9,10]. Методы построения криволинейных систем координат

приведены в работах [13,14]. Здесь рассматриваются лишь ортогональные системы. Вектор скорости движения в криволинейной системе координат имеет вид:

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^3 H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \times \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial w_l} \dot{w}_l \right] \mathbf{s}_p^0, \quad (2.13)$$

где \mathbf{s}_p^0 ($p=1,2,3$) – орт данной оси криволинейных координат, а $H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ ($p=1,2,3$) – коэффициенты Ляме, которые определяются следующим образом:

$$H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial s_p} \right| = \left[\left(\frac{\partial q_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial s_p} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (p=1,2,3) \quad (2.14)$$

Здесь $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s_1, s_2, s_3)$ – радиус-вектор произвольной точки манипулятора относительно инерциальной системы в зависимости от криволинейных координат. (2.13) определяется путём составления полной производной по времени вектора $\boldsymbol{\rho}(s_1, s_2, s_3)$ с учётом (2.12).

В рамках принятой модели манипулятора воспользуемся разложением функций $s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ и $H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ ($p=1,2,3$) по формуле Тейлора относительно упругих величин β_j ($j=1,2,\dots,m$) и $w_l(t, \xi)$ ($l=1,2,\dots,k$) с точностью ε .

$$s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + O(\varepsilon^2) \quad (2.15)$$

$$H_p = H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l + O(\varepsilon^2), \quad (p=1,2,3). \quad (2.16)$$

Подставляя (2.15), (2.16) в (2.13) и выводя обобщённые матрицы Ляме $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$, $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w})$, $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ и $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$, скорость движения манипулятора с обобщённой упругостью в криволинейной системе координат с точностью ε представим в виде [9]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}), \quad (2.17)$$

где

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\boldsymbol{\beta}},$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\mathbf{w}}.$$

Здесь также, как в (2.6), скорость движения удаётся представить в виде суммы трёх слагаемых, где $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ также является вектором скорости движения характерных точек манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными шарнирами, а

$\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ обусловлены упругостью соединительных узлов и звеньев манипулятора, соответственно.

Матрица $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ имеет размерность $(3 \times n)$ с элементами

$$\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \right\}_{p,i=1}^{3,n}. \quad (2.18)$$

Матрица $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$ имеет следующие элементы, которые зависят от упругости соединительных узлов:

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0) = \left\{ \sum_{j=1}^m \left[H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j \partial \alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \right] \beta_j \right\}_{p,i=1}^{3,n} \quad (2.19)$$

Элементы матрицы $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w})$ зависят от $\mathbf{w}(t, \xi)$ и являются

$$\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w}) = \left\{ \sum_{l=1}^k \left[H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial^2 s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l \partial \alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} \right] w_l \right\}_{p,i=1}^{3,n} \quad (2.20)$$

Матрицы $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$ и $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w})$ имеют размерность $(3 \times n)$.

Матрицы $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ и $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ имеют размерность $(3 \times m)$, $(3 \times k)$, соответственно с элементами

$$\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \right\}_{p,j=1}^{3,m}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) = \left\{ H_p(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_l} \right\}_{p,l=1}^{3,k}. \quad (2.22)$$

Из (2.18)-(2.22) следует, что при $\beta_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0$, а при $w_l(t, \xi) = 0$ ($l = 1, 2, \dots, k$) $\mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0$.

Итак, скорость движения характерных точек (схвата) манипулятора в криволинейной системе координат, в общем случае, в рамках принятой упругой модели, определяется путём вычисления элементов матриц (2.18) – (2.22).

3. Ускорение движения упругого манипулятора.

а) **Метод декартовых координат.** Вычисляя производные по времени от функции (2.5), можно определить ускорение движения характерных точек манипулятора с обобщённой скоростью в виде

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}). \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}})$ соответствует ускорению движения абсолютно жёсткой модели манипулятора и зависит от обобщённой координаты $\boldsymbol{\alpha}$, от обобщённой скорости $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ и ускорения $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.2)$$

Элементы матрицы $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ определяются согласно (2.7), а матрица $\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ имеет следующие элементы:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k \right\}_{i,j=1}^{N,n}$$

Слагаемое $\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}})$ зависит от упругих свойств соединительных узлов манипулятора и является также функцией от обобщённых координат $\boldsymbol{\beta}$, скорости $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ и ускорения $\ddot{\boldsymbol{\beta}}$. При $\beta_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) $\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0, 0) \equiv 0$.

Из (2.5) следует:

$$\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ddot{\boldsymbol{\beta}} \quad (3.3)$$

Матрицы $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ и $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ определяются согласно (2.8), (2.9), соответственно.

Матрица $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ имеет размерность $(N \times n)$ с общим элементом

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ F_{ij}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right\}_{i,j=1}^{N,n},$$

$$\text{где } F_{ij}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \right] =$$

$$= \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \dot{\alpha}_p + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \dot{\beta}_k$$

$$(F_{ij}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

$$\text{Матрица } \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ F_{ij}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \right\}_{i,j=1}^{N,m}, \quad \text{где } \quad \text{согласно} \quad (2.9),$$

$$F_{ij}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \alpha_l \partial \beta_j},$$

$\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}})$ обусловлена упругостью звеньев манипулятора и определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^*(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}) = \\ = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \ddot{\mathbf{w}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где матрицами $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ и $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})$, согласно (2.10), (2.11),

соответственно, являются:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \left\{ F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \right\}_{i,j=1}^{N,n}, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \left\{ F_{ij}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) \right\}_{i,j=1}^{N,k},$$

где

$$\begin{aligned} F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{\alpha}_k + \sum_{p=1}^k \frac{\partial^2}{\partial w_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{w}_p \\ (F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, 0, 0) &\equiv 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, n) \\ F_{ij}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_i \partial w_j} \dot{\alpha}_l, \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

б) Ускорение в криволинейных координатах. Вектор ускорения \mathbf{a} в криволинейной системе координат можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{p=1}^3 a_p s_p^0. \quad (3.5)$$

Поскольку здесь рассматриваются только ортогональные системы, то из (3.5) следует, что [11,12]

$$\begin{aligned} a_p &= \mathbf{a} \cdot s_p^0 = \frac{1}{H_p} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \quad \text{или} \\ a_p &= \frac{1}{H_p} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \right\} \quad (p = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \dot{s}_p, \quad \text{то} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{s}_p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \quad \text{и} \\ \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} &= \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{s}_p} = \frac{\partial}{\partial \dot{s}_p} \frac{v^2}{2} \quad (p = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.7)$$

с другой стороны,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial s_p \partial s_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial s_p \partial s_2} \dot{s}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial s_p \partial s_3} \dot{s}_3, \quad (3.8)$$

где, согласно (2.12),

$$\begin{aligned} \dot{s}_p &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial w_l} \dot{w}_l \\ (p &= 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Дифференцируя выражение для скорости \mathbf{v} по какой-либо координате s_p ($p = 1, 2, 3$), имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial s_p} \quad (p = 1, 2, 3) \quad (3.10)$$

Подставляя (3.7) и (3.10) в (3.6), для проекции вектора ускорения получим следующее выражение:

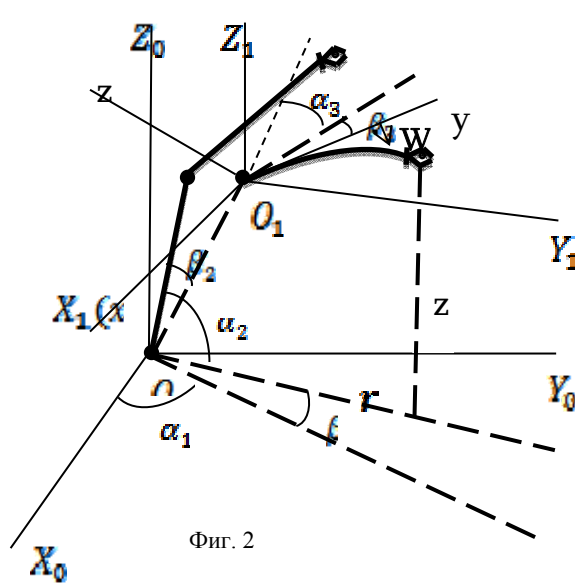
$$a_p = \frac{1}{H_p} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{s}_p} \right) - \frac{\partial v^2}{\partial s_p} \right\} \quad (p = 1, 2, 3), \quad (3.11)$$

где вектор скорости движения характерных точек манипулятора с обобщённой упругостью в криволинейной системе координат в рамках принятой математической модели с точностью ε представляется в виде [9,10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \sum_{p=1}^3 \left[H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right] s_p^o + \\ & + \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_j \partial \alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial H_p(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \right) \beta_j \right] \dot{\alpha}_i \right\} s_p^o + \\ & + \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{l=1}^k \left(H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l \partial \alpha_i} + \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial H_p(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} \right) w_l \right] \dot{\alpha}_i \right\} s_p^o + \\ & + \sum_{p=1}^3 \left[H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j \right] s_p^o + \sum_{p=1}^3 \left[H_p(\mathbf{a}, 0, 0) \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} \dot{w}_l \right] s_p^o \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.11) и (3.12) также позволяют представить вектор ускорения в виде следующих трёх слагаемых:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}) + \mathbf{a}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{a}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}).$$



Вектор слагаемого $\mathbf{a}^1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}})$ соответствует ускорению движения абсолютно жёсткой модели манипулятора, а слагаемые $\mathbf{a}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{a}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}})$ зависят от упругости соединительных узлов и упругости звеньев манипулятора, соответственно.

4. Пример. В качестве иллюстрации приведённых методов исследований, определим скорость движения двухзвенного упругого манипулятора в криволинейной системе координат фиг.2. Подробное описание математической модели упругого манипулятора и исследование

кинematики движения в декартовой системе координат в общем случае приведено в [8]. Результаты нижеприведённых вычислений можно сравнить с результатами, полученными в [8].

Обобщённые координаты абсолютно жёсткой модели обозначим через $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$. Координаты, обусловленные упругостью шарниров O_0 и O_1 по степеням подвижности, обозначим через $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, а вектор упругих смещений точек $\xi \in [0, l_2]$ второго звена обозначим через $\mathbf{w}(t, \xi) = (0, 0, w_3(t, \xi))^T$. Линейные размеры звеньев обозначим через l_1, l_2 , соответственно.

Движение упругого манипулятора удобно исследовать цилиндрическими координатами (φ, r, z) :

$$\begin{aligned} s_1 &= \varphi = \varphi^*(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 + \beta_1, \\ s_2 &= r = r^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3(t, \xi)), \\ s_3 &= z = z^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3(t, \xi)), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} r^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3(t, \xi)) &= \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) - \\ &- w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + l_1 \cos(\alpha_2 - \beta_2), \\ z^*(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3(t, \xi)) &= \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + \\ &+ w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + l_1 \sin(\alpha_2 - \beta_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Разложения (2.15) для (4.2) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha_1 + \beta_1 \\ r &= r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0) + \frac{\partial r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_2} \beta_2 + \frac{\partial r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 + \\ &+ \frac{\partial r^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial w_3} w_3 + o(\varepsilon^2), \\ z &= z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0) + \frac{\partial z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_2} \beta_2 + \frac{\partial z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 + \\ &+ \frac{\partial z^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial w_3} w_3 + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Скорость движения упругого манипулятора в рамках принятой модели определяется выражением (2.17). Представим эту формулу в цилиндрических координатах для определения скорости движения произвольной точки рассматриваемого упругого манипулятора.

Коэффициенты Ляме (2.14) для цилиндрической системы имеют вид:

$$\begin{aligned} H_\varphi &= H_1(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3) = r(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3), \\ H_r &= H_2 = 1, \quad H_z = H_3 = 1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где, согласно (2.16),

$$H_1(\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, w_3) = H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0) + \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_2} \beta_2 + \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 + \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial w_3} w_3 + o(\varepsilon^2). \quad (4.5)$$

Из (4.2) следует:

$$\begin{aligned} H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0) &= \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + l_1 \cos \alpha_2 \\ \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_2} \beta_2 &= [\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + l_1 \sin \alpha_2] \beta_2 \\ \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial \beta_3} \beta_3 &= \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ \frac{\partial H_1(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0)}{\partial w_3} w_3 &= -w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Определим элементы обобщённых матриц Лямэ $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$, $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w})$, $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ и $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$.

Матрица $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ (2.18) для рассматриваемого манипулятора, согласно (4.2) – (4.6), имеет следующие элементы:

$$\mathbf{H}_1^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0) = \begin{pmatrix} l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \sin \alpha_2 - \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) & \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 0 & l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & -\xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Вектором скорости движения произвольной точки второго звена (в том числе схвата при $\xi = l_2$) абсолютно жёсткой модели манипулятора, согласно (2.17), является $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\alpha_2, \alpha_3, 0, 0) \dot{\boldsymbol{\alpha}}$ или в проекциях

$$\begin{aligned} v_{1,\varphi} &= \dot{\alpha}_1 [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)], \\ v_{1,r} &= -\dot{\alpha}_2 l_1 \sin \alpha_2 - \xi (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_3) \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \\ v_{1,z} &= \dot{\alpha}_2 l_1 \cos \alpha_2 + \xi (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_3) \cos(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Определим вектор \mathbf{v}_2 (2.17) скорости движения манипулятора с помощью матриц $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$ (2.19) и $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ (2.21). Проведя необходимые вычисления, с учётом (4.1) - (4.6), получим:

$$\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0) = \begin{pmatrix} H_{2(1.1)}^* & 0 & 0 \\ 0 & H_{2(2.2)}^* & H_{2(2.3)}^* \\ 0 & H_{2(3.2)}^* & H_{2(3.3)}^* \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned}
H_{2(1.1)}^* &= [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
H_{2(2.2)}^* &= [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\
H_{2(2.3)}^* &= -\beta_2 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - \beta_3 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\
H_{2(3.2)}^* &= [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
H_{2(3.3)}^* &= -\beta_2 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)
\end{aligned}$$

Аналогичными вычислениями определим элементы матрицы $\mathbf{H}_4^*(\mathbf{a}, 0, 0)$.

$$\mathbf{H}_4^*(\mathbf{a}, 0, 0) = \begin{pmatrix} l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) & \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 0 & -l_1 \cos \alpha_2 - \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & -\xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Проекции вектора скорости \mathbf{v}_2 движения манипулятора, обусловленные упругостью соединительных узлов O_0 и O_1 (фиг. 2), согласно (2.17), (2.19), (2.21), (4.9), (4.10), с точностью до ε^2 имеют вид:

$$\begin{aligned}
v_{2,\varphi} &= \left\{ [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right\} \dot{\alpha}_1 + \\
&+ [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \dot{\beta}_1 \\
v_{2,r} &= \left\{ [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right\} \dot{\alpha}_2 - \\
&- \xi (\beta_2 + \beta_3) \dot{\alpha}_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \dot{\beta}_2 + \xi \dot{\beta}_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
v_{2,z} &= \left\{ [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right\} \dot{\alpha}_2 - \\
&- \xi (\beta_2 + \beta_3) \dot{\alpha}_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \dot{\beta}_2 - \xi \dot{\beta}_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3)
\end{aligned} \quad (4.11)$$

Для определения вектора скорости \mathbf{v}_3 (2.17) вычислим элементы матрицы $\mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0, \mathbf{w})$ и $\mathbf{H}_5^*(\mathbf{a}, 0, 0)$ согласно (2.20), (2.22), (4.1) - (4.6):

$$\mathbf{H}_3^*(\mathbf{a}, 0, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} -w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) & 0 & 0 \\ 0 & -w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) & w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 0 & -w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) & w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Аналогичными вычислениями получим элементы обобщённой матрицы $\mathbf{H}_5^*(\mathbf{a}, 0, 0)$

$$\mathbf{H}_5^*(\mathbf{a}, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Проекции вектора скорости \mathbf{v}_3 (2.17) движения манипулятора, обусловленного упругостью второго звена (фиг. 2), согласно (2.17), (4.12) и (4.13), имеют вид:

$$\begin{aligned}
v_{3,\varphi} &= -\dot{\alpha}_1 w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \\
v_{3,r} &= w_3(t, \xi)(\dot{\alpha}_3 - \dot{\alpha}_2) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - \dot{w}_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
v_{3,z} &= w_3(t, \xi)(\dot{\alpha}_3 - \dot{\alpha}_2) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \dot{w}_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Следовательно, проекции вектора скорости движения манипулятора с обобщённой упругостью определяются следующими выражениями (3.12), (4.8), (4.11), (4.14):

$$\begin{aligned}
v_\varphi &= v_{1,\varphi} + v_{2,\varphi} + v_{3,\varphi} = \left\{ \left[l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \right. \\
&+ l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \left. \right\} \dot{\alpha}_1 + \\
&+ \left[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\beta}_1 \\
v_r &= v_{1,r} + v_{2,r} + v_{3,r} = \left\{ \left[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \beta_2 + \beta_3 \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - \right. \\
&- l_1 \sin \alpha_2 - \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \left. \right\} \dot{\alpha}_2 + \\
&+ \left[\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \xi(\beta_2 + \beta_3) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\alpha}_3 + \\
&+ \left[l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\beta}_2 + \xi \dot{\beta}_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \dot{w}_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
v_z &= v_{1,z} + v_{2,z} + v_{3,z} = \left\{ \left[l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \beta_2 + \beta_3 \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \right. \\
&+ l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \left. \right\} \dot{\alpha}_2 + \\
&+ \left[w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - \xi(\beta_2 + \beta_3) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\alpha}_3 - \\
&- \left[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \right] \dot{\beta}_2 - \xi \dot{\beta}_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + \dot{w}_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Заключение. В рамках общей математической модели многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и упругими звеньями с применением линейной теории упругости параллельно приводятся результаты исследования кинематики движения как в декартовых, так и в криволинейной системах координат. Предложенный приближённый способ исследования в обоих случаях позволяет представить кинематические величины движения манипулятора в виде суммы трёх слагаемых, которые характеризуют кинематику движения манипулятора как с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами, так и с упругими узлами и упругими звеньями. Результаты исследования показывают возможность применения различных систем координат при изучении движений упругого манипулятора, эффективность которых зависит как от конструкции, так и от технологического предназначения робота.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
2. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоским движением упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №5. С.33-41.
3. Болотник Н.Н., Гукасян А.А. Управление движением манипулятора с учётом упругих колебаний струны. //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №4. С.38-46.
4. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня. //ПММ. 1982. Т.46. Вып.4. С.587-595.

5. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3. С.63-71.
6. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.79-87.
7. Мачкалян Р.Н. Одна задача кинематического управления движением схвата двухзвенного манипулятора с упругими соединительными узлами. //АГПУ. Ученые записки. №2. 2005. С.13-19.
8. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.68-83.
9. Гукасян А.А. Кинематика упругого манипулятора в криволинейной системе координат. //Доклады НАН РА. 2014. Т.114. №3. С.222-229.
10. Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н. Кинематика движения манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейной системе координат. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.114-120.
11. К.Фу, Р. Гонсалес, К.Ли. Робототехника. / Перевод с английского под ред. доктора техн.наук В.Г. Градецкого. Мир, 1989. 620 с.
12. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. 478 с.
13. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.
14. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть I. М.: Наука, 1967. 467с.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апрегович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Е-mail: ghukasyan10@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.11.2014