ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №2, 2015 Механика

УДК 539.3

ЕЩЁ РАЗ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: устойчивость, потеря устойчивости, внутреннее и внешнее давления.
Key words: stability, buckling, internal and external impressions.
Բանալի բառեր՝ Կայունություն, կայունության կորուստ, ներքին և արտաքին ճնշումներ

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Դարձյալ գլանային պանելի կայունության մասին

Պանելի կայունությունը միաչափ դրվածքով դիտարկվում է բեռների և ջերմության ազդեցության տակ եզրային պայմանների երկու դեպքի համար: Մի դեպքում կայունության կորուստ տեղի է ունենում ներքին, Իսկ մյուս դեպքում արտաքին ազդեցությունների տակ: Առաջին դեպքում նախնական վիճակի կտրող ճիգի հաշվառումը էապես փոխում է կրիտիկական պարամետրերի արժեքները:

Movsisyan L.A., Nersisyan G.G.
Again on the stability of cylindrical panels

The stability of panels in one-dimentional formulation under loads and temperature for two-case boundery conditions are being considered. In one case buckling of the stability takes place under internal impressions in the other-external.

Устойчивость панели рассматривается в одномерной постановке при воздействии нагрузок и температуры для двух случаев граничных условий. В одном случае потеря устойчивости происходит при внутреннем воздействии, в другом – при внешнем. В первом случае учёт перерезывающего усилия существенно меняет значения критических параметров.

Введение. Известно [1], как изменения тангенциальных граничных условий существенно влияют на значения критических параметров для задачи устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Насколько нам известно, только в [2,3] показано, что для панели при нормальном давлении изменение тангенциального граничного условия приводит не только к количественному изменению критического значения, но и, что более существенно, к качественному: если при однородном условии относительно перемещения панель теряет устойчивость при внешнем давлении, то уже при однородном условии относительно усилия (классический случай свободного опирания) она теряет устойчивость уже при внутреннем давлении.

Оба эти типа задач отличаются друг от друга только тем, что из трёх граничных условий они отличаются друг от друга только одним условием.

В настоящей статье изучается ряд задач при обоих случаях граничных условий. Качественное отличие очевидно.

Постановка задачи

1. Бесконечная цилиндрическая панель находится в постоянном температурном поле и на неё действует нормальное давление (различного типа). Уравнения статики начального состояния для усилий и изгибающего момента дают (одномерная задача)

$$T^0 = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta + R\int\limits_0^\theta q\sin(\theta-\varphi)d\varphi$$
$$N^0 = -\frac{dT^0}{d\theta},\; M^0 = -RT^0 - RC_3 \tag{1.1}$$

Эти величины выражаются через компоненты перемещений следующим образом:

$$T^0 = \frac{Eh}{R\left(1-\text{v}^2\right)}\left[\frac{d\text{v}^0}{d\theta} + w^0 - \alpha R\left(1+\text{v}\right)t_0\right],\; M^0 = -\frac{D}{R^2}\frac{d^2w^0}{d\theta^2} \tag{1.2}$$

Обозначения обычные.

Будут рассмотрены два типа граничных условий

$$а)\; w^0 = M^0 = T^0 = 0 \quad \text{при}\;\; \theta = 0,\, \theta = \theta_0$$
$$б)\; w^0 = M^0 = \text{v}^0 = 0 \quad \text{при}\;\; \theta = 0,\, \theta = \theta_0 \tag{1.3}$$

Аналогичные условия будут и для возмущённого состояния.

В литературе первый случай именуется как «шарнирное опирание со свободным смещением в поперечном направлении», а второй – шарнирное опирание с закреплённым смещением.

2. В первом случае (1.3) кольцевое усилие (перерезывающее также) определяется непосредственно –

$$C_1 = 0,\; C_2 = -\frac{R}{\sin\theta_0}\int\limits_0^{\theta_0} q\sin\left(\theta_0-\varphi\right)d\varphi \tag{2.1}$$

Решение задачи. Будут рассмотрены две задачи.

Первая задача стандартная: панель под нормальным равномерным внутренним давлением q_0. Только в этом случае именно внутренним получается сжимающее усилие

$$T^0 = Rq_0\left(1-\cos\theta - \text{tg}\frac{\theta_0}{2}\cdot\sin\theta\right) \tag{2.2}$$

Как видно из (2.2), усилие T_0 вовсе не постоянное, как принято в [4] (стр.205-206), к тому же, с обратным знаком.

Вторая задача такая: равномерное усилие действует по длине панели в срединном сечении $\theta = \dfrac{\theta_0}{2}$, $q = p\delta\left(\theta + \dfrac{\theta_0}{2}\right)$

Тогда

$$T^0 = \begin{cases} C\sin\theta,\ C = -\dfrac{P}{2\cos\dfrac{\theta_0}{2}},\ 0 \le \theta \le \dfrac{\theta_0}{2} \\ C\sin\theta + P\sin\left(\theta - \dfrac{\theta_0}{2}\right),\ \dfrac{\theta_0}{2} \le \theta \le \theta_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Усилие N^0 определяется по (1.1).

Система уравнений устойчивости записывается в виде [2]:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\mathrm{v}}{d\theta^2} + \frac{dw}{d\theta} - H\frac{d^3w}{d\theta^3} - \overline{N}^0\frac{d^2w}{d\theta^2} = 0 \\ &H\frac{d^4w}{d\theta^4} + \frac{d\mathrm{v}}{d\theta} + w - \overline{T}^0\frac{d^2w}{d\theta^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $H = \dfrac{h^2}{12R^2}$, $\left(\overline{T}^0, \overline{N}^0\right) = \dfrac{1-\mathrm{v}^2}{Eh}\left(T^0, N^0\right)$.

Если представить усилия $\overline{T}^0$ и $\overline{N}^0$ в виде рядов

$$T^0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\mu_n\theta,\quad N^0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\mu_n\theta\ ,\mu_n = \frac{n\pi}{\theta_0},\ \left(b_n = \mu_n a_n\right) \tag{2.5}$$

и искать решение (2.4) в виде

$$\mathrm{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{v}_n \cos\mu_n\theta\ ,\quad w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin\mu_n\theta\ , \tag{2.6}$$

то определение критических параметров сводится к нахождению минимального корня из условия разрешимости следующей бесконечной системы:

$$\begin{aligned} &\mu_k^2\left(\mu_k^2 - 1\right)w_k + \lambda\left[a_0' - \frac{1}{2}(1+2\chi)a_{2k}'\right]\mu_k^2 w_k + \\ &+\frac{1}{2}\chi\left\{\sum_{n=1}^{k-1}\left[a_{k-n}'\left(1+\chi\frac{k-n}{k}\right) - a_{k+n}'\left(1+\chi\frac{k+n}{k}\right)\right]\mu_n^2 w_n + \right. \\ &\left. + \sum_{n=k+1}^{\infty}\left[a_{n-k}'\left(1+\chi\frac{n-k}{k}\right) - a_{k+n}'\left(1+\chi\frac{k+n}{k}\right)\right]\mu_n^2 w_n\right\} = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Для каждой задачи будет свой λ, при том,

$$\lambda a_m' = \frac{1-\mathrm{v}^2}{EhH}a_m\quad . \tag{2.8}$$

Здесь $\chi = 0$ соответствует неучёту N^0 при определении критических параметров, а $\chi = 1$ – наоборот. Дело в том, что при обсуждаемых граничных условиях его учёт существенно изменяет значения критических параметров [3].

Для случая (2.2) коэффициенты

$$a_0' = \frac{1}{\theta_0}\left(\theta_0 - 2\mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$a_n' = \frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{\theta_0^2 - \left(n\pi\right)^2}\left\{\sin\theta_0 - \mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2}\left[\cos\theta_0 + \left(-1\right)^{n+1}\right]\right\} \tag{2.9}$$

а для второй задачи (2.3)

$$a_0' = \frac{1}{\theta_0}\left(1 - \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$a_0' = \frac{\left(-1\right)^{n+1}\theta_0}{\theta_0^2 - \left(n\pi\right)^2}\left\{\frac{\cos\theta_0}{\cos\frac{\theta}{2}} + 2\left[\cos\frac{\theta}{2} + \left(1\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}\right]\right\} \tag{2.10}$$

Соответственно для первой и второй задач искомым λ будет:

$$\lambda = 12\left(1 - \mathrm{v}^2\right)\frac{q}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^3 \quad \text{и} \quad \lambda = 12\left(1 - \mathrm{v}^2\right)\frac{P}{Eh}\left(\frac{R}{h}\right)^2 \tag{2.11}$$

В табл.1 приведены $\lambda_{\text{кр}}$ для обеих задач при некоторых θ_0 (очерёдность сохранена). В каждой клетке первые числа соответствуют случаю $\chi = 0$ (без учёта N^0), а вторые – с учётом.

Как видно из таблицы, учёт N^0 существенно уменьшает значения критических параметров.

Таблица 1

№ \ θ_0	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$
I	38.414 24.284	8.139 5,187	1.896 1.222
II	59.425 40.369	8.352 5.656	1.449 0.977

3. При граничных условиях по второму варианту из (1.3) рассмотрим три задачи.

В случае равномерного нормального давления (уже внешнего) с точностью $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ усилие T^0 – постоянное

$$T^0 = -Rq\,. \tag{3.1}$$

Теперь – аналог второй задачи из предыдущего пункта. Для получения выражения для T^0 начало новой системы координат поместим в середине сечения панели (точек приложения усилия P). Тогда для систем (1.2) и (1.3) $(q = t_0 = 0)$ будем иметь следующие граничные условия:

$$\frac{dw^0}{d\theta} = \mathrm{v}_0 = 0, \; N^0 = -\frac{P}{2} \quad \text{при} \;\; \theta_1 = 0$$
$$w = M^o = \mathrm{v}^0 = 0 \quad \text{при} \;\; \theta_1 = \frac{\theta_0}{2}\;, \left(\theta = \theta_1 + \frac{\theta_0}{2}\right) \tag{3.2}$$

Если перейти теперь от θ_1 к координатам θ, то в окончательном виде для T^0 получим выражение

$$T^0 = -\frac{P}{2}\left(\sin\theta + C\cos\theta\right)$$
$$C\left[\sin\frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0}{2}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right)\cos\frac{\theta_0}{2}\right] = \cos\frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{2}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{12}\right)\sin\frac{\theta_0}{2} - 1 - \frac{1}{8}\theta_0^2 \tag{3.3}$$

Коэффициенты ряда T^0 будут:

$$a_0 = P\left(\cos\frac{\theta_0}{2} - 1 - C\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$
$$a_n = \frac{P\theta_0}{(h\pi)^2 - \theta_0^2}\left\{\left[1 + (-1)^n\right]\left(\mathrm{C}\sin\frac{\theta_0}{2} - \cos\frac{\theta_0}{2}\right) + 2\cos\frac{n\pi}{2}\right\} \tag{3.4}$$

В случае, когда панель находится в постоянном температурном поле t_0, решение соответствующей задачи для усилия T^0 даёт

$$T^0 = C\left(\cos\theta + \mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2}\sin\theta\right), \; C = \frac{Eh}{12\left(1 - \nu^2\right)}\frac{h^2}{R^2}\frac{\alpha t_0}{\Delta}$$
$$\Delta = \frac{2}{\theta_0}\mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2} - 1 - \frac{\theta_0^2}{12} \tag{3.5}$$

а коэффициенты a_n для T^0 будут:

$$a_0 = \frac{2C}{\theta_0\Delta}\mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2}$$
$$a_n = \frac{2(-1)^n\theta_0 C}{\Delta\left[\theta_0^2 - (n\pi)^2\right]}\left\{\sin\theta_0 + \mathrm{tg}\frac{\theta_0}{2}\left[(-1)^n - \cos\theta_0\right]\right\} \tag{3.6}$$

Как видно из первого примера, так и из общего исследования в рассматриваемом случае граничных условий, начальным перерезывающим усилием N^0 в уравнениях устойчивости можно пренебречь. Тогда, однажды интегрируя первое уравнение и учитывая его во втором, полученная бесконечная система будет такова:

$$\mu_n^2\left(\mu_n^2-1\right)w_n+d_nf+\frac{1}{2}\lambda\Bigg[\left(2a_0^1-a_{2n}^1\right)\mu_n^2w_n+$$
$$+\sum_{q=1}^{n-1}\left(a_{n-q}^1-a_{n+q}^1\right)\mu_q^2w_q+\sum_{q=n+1}^{\infty}\left(a_{q=n}^1-a_{q+n}^1\right)\mu_q^2w_q\Bigg]=0 \tag{3.7}$$

Здесь λ для первых двух задач имеет вид (2.11), а для температурной задачи – $\lambda=\alpha t_0$, f – постоянный множитель при интегрировании первого уравнения,

$$d_n=\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi} \tag{3.8}$$

Так как для первого примера $T^0=\text{const}$, то систему (2.4) можно проинтегрировать и определение критического значения $\lambda_{\text{кр}}$ сведётся к следующему уравнению:

$$k\theta_0\left(1-\lambda Hk^2\right)+\frac{1}{12}k^3\theta_0^3-2\left(1+Hk^2\right)\operatorname{tg}\frac{kv_0}{2}=0,\ k=\sqrt{1+\lambda} \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) не похоже на формулу (3.195) стр.157, Вольмир. работа [5].
В табл.2 приведены некоторые значения критической нагрузки.

Таблица 2

θ_0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\pi$	$3/4\pi$
$\lambda_{\text{кр}}$	10.679	5.570	1.920	0.642	0.298

Критические значения параметров соответствующих задач приведены в табл.3.

Таблица 3

θ_0 / №	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
IV	5.867	2.685	1.513	0.842	0.371	0.116
V	0.811	0.767	0.639	0.466	0.264	0.138

Заключение. Рассмотренные примеры позволяют сделать ряд выводов. Отметим наиболее существенные.

1. При равномерном давлении кольцевое усилие – сжимающее при внутреннем давлении при первых условиях из (1.3), в то время как для вторых условий, наоборот.
2. При равномерном давлении в первом случае кольцевое усилие существенно зависит от координаты, в то время как для второго с большей точностью можно принять постоянным.

3. При первых граничных условиях на значения критических параметров существенно влияет учёт начальных перерезывающих усилий.
4. При первых граничных условиях температурное поле на значения критических параметров не влияет, в то время как для второго случая возможна и потеря устойчивости только вследствие температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хофф Н. Низкие критические напряжения для круговой цилиндрической оболочки конечной длины, находящейся под действием осевого сжатия. //Прикладная механика (тр.амер.общ.мех.). 1965. №3. С.60-70.
2. Мовсисян Л.А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. //Докл. АН Арм.ССР. 1971. Т.LII. №2. С.70-75.
3. Мовсисян Л.А. К устойчивости цилиндрической круговой арки. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1984. Т.XXXVII. №1. С.16-22.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.Л.: Огиз-Гостехиздат, 1946. 532с.
5. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ГИФМЛ,1963. 879с.

Сведения об авторах:

Мовсисян Лаврентий Александрович,
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2
Тел.: (+37410) 568210; **E-mail:** mechins@sci.am

Нерсисян Гриша Геворкович,
К.ф.н., доцент, Ар.Г.А.У.
Адрес: г.Ереван, пр.Азатутян, 7$^{\underline{б}}$, кв.37. **Тел.:** 20-68-79.

Поступила в редакцию 26.03.2014