

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЁХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ НЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Агаловян Л.А., Закарян Т.В.

Ключевые слова: трёхслойная полоса, динамическая задача, асимптотическое решение.

Key words: three-layer strip, dynamic problem, asymptotic solution.

Բանալի բառեր. Եռաշերտ, դինամիկա, ասիմպտոտիկ լուծում.

Աղալովյան Լ.Ա., Չաքարյան Տ.Վ.

Ոչ սիմետրիկ կառուցվածք ունեցող օրթոտրոպ եռաշերտի համար դինամիկական առաջին եզրային խնդրի լուծման մասին

Ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշված է առաձգականության տեսության դինամիկական առաջին եզրային խնդրի լուծումը ոչ սիմետրիկ կառուցվածք ունեցող օրթոտրոպ եռաշերտի համար: Ընդունված է, որ եռաշերտը գտնվում է հարթ դեֆորմացիոն վիճակում, իսկ շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է: Գտնված է ներքին խնդրի ընդհանուր լուծումը: Ցույց է տրված, որ երբ արտաքին բեռը բազմանդամային ֆունկցիա է երկայնական կոորդինատներից, իտեռացիոն պրոցեսն ընդհատվում է և ստացվում է ներքին խնդրի մաթեմատիկորեն ճշգրիտ լուծումը: Այն լուսաբանված է մասնավոր օրինակով:

Aghalovyan L.A., Zakaryan T.V.

The solution of first dynamic boundary value problem for three-layer orthotropic strip of non-symmetric structure

The solution of first dynamic boundary value problem of the theory of elasticity for three-layer orthotropic strip of non-symmetric structure is founded by the asymptotic method. It's assumed that the strip is considered under conditions of plane deformation and the contact between the layers is full. It's shown that in case when the external forces are the polynomials of longitudinal coordinate the iteration process is interrupted and the mathematically exact solution is obtained for the internal problem of three-layer package. The special case is discussed.

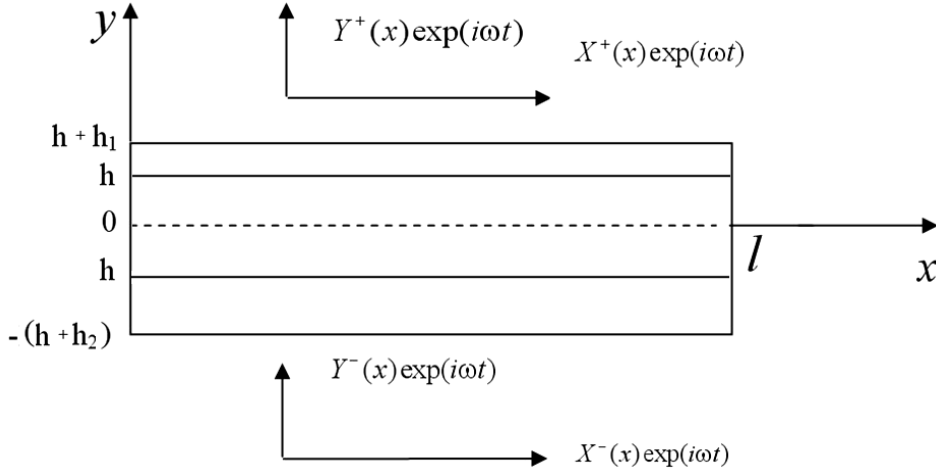
Асимптотическим методом найдено решение первой динамической краевой задачи теории упругости для трёхслойной ортотропной полосы несимметричной структуры. Считается, что полоса находится в условиях плоской деформации, а контакт между слоями – полный. Показано, что, когда внешние воздействия являются многочленами от продольной координаты, итерация обрывается и получается математически точное решение внутренней задачи для трёхслойного пакета. Сказанное проиллюстрировано на частном примере.

Введение. Для решения статических и динамических задач на основе уравнений и соотношений теории упругости для балок, пластин и оболочек весьма эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений. Решению статических краевых задач для однослойных и многослойных тонких тел асимптотическим методом посвящены монографии [1,2]. Решению смешанных динамических задач о собственных и вынужденных колебаниях полос, пластин и оболочек посвящены работы [3-7]. Первая краевая задача теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы асимптотическим методом решена в [8], а для ортотропной полосы – в [9]. Первая динамическая краевая задача для ортотропной прямоугольной пластинки решена в [10].

В данной работе асимптотическим методом найдено решение первой динамической краевой задачи о вынужденных колебаниях ортотропной трёхслойной полосы несимметричной структуры. Подобные задачи представляют большой интерес, в частности, в расчётах подкладок и включений.

1. Основные уравнения и постановка краевой задачи. Требуется найти решение уравнений и соотношений динамической плоской задачи (плоская деформация) теории упругости в области

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, -(h + h_2) \leq y \leq h + h_1, h_1 + 2h + h_2 = H \ll l\} \text{ (фиг.1).}$$



Фиг.1

уравнения движения –

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} = \rho^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} = \rho^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial t^2}, \quad k = I, II, III \quad (1.1)$$

соотношения упругости –

$$\frac{\partial u^k}{\partial x} = \beta_{11}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{12}^k \sigma_{yy}^k, \quad \frac{\partial v^k}{\partial y} = \beta_{12}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{22}^k \sigma_{yy}^k, \quad \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} = a_{66}^k \sigma_{xy}^k, \quad (1.2)$$

$$\beta_{ij}^k = \frac{1}{a_{33}^k} (a_{ij}^k a_{33}^k - a_{i3}^k a_{j3}^k), \quad i, j = 1, 2, \quad a_{66}^k = \frac{1}{G_{12}^k}, \quad k = I, II, III,$$

где $h_1, 2h, h_2$ – толщины первого, второго и третьего слоёв, $\sigma_{\alpha\gamma}$, u , v – компоненты, соответственно, тензора напряжений и вектора перемещения, ρ^k – плотность, a_{ij}^k – постоянные упругости, G_{12}^k – модуль сдвига, $k = I, II, III$ – номера слоёв.

Решение должно удовлетворять граничным условиям:

$$\sigma_{yy}(x, h + h_1) = Y^+(x) \exp(i\omega t), \quad \sigma_{xy}(x, h + h_1) = X^+(x) \exp(i\omega t), \quad (1.3)$$

$$\sigma_{yy}(x, -(h + h_2)) = -Y^-(x) \exp(i\omega t), \quad (1.4)$$

$$\sigma_{xy}(x, -(h + h_2)) = -X^-(x) \exp(i\omega t),$$

где ω – частота вынуждающего воздействия, и условиям полного контакта между слоями :

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^I(x, h) &= \sigma_{yy}^{II}(x, h), \quad \sigma_{xy}^I(x, h) = \sigma_{xy}^{II}(x, h), \\ u^I(x, h) &= u^{II}(x, h), \quad v^I(x, h) = v^{II}(x, h).\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{II}(x, -h) &= \sigma_{yy}^{III}(x, -h), \quad \sigma_{xy}^{II}(x, -h) = \sigma_{xy}^{III}(x, -h), \\ u^{II}(x, -h) &= u^{III}(x, -h), \quad v^{II}(x, -h) = v^{III}(x, -h),\end{aligned}\tag{1.6}$$

а также граничным условиям на поперечных сечениях $x = 0, l$, которые пока не конкретизируем.

Считается, что функции $X^\pm(x), Y^\pm(x)$ имеют производные требуемого порядка. В противном случае необходимо заранее их аппроксимировать полиномами или решение искать в пространстве обобщённых функций.

2. Асимптотическое решение задачи. Чтобы найти решение сформулированной краевой задачи, введём безразмерные координаты $\xi = x/l, \zeta = y/H$ и безразмерные перемещения $U_x^k = u^k/l, U_y^k = v^k/l$. В результате получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon = H/l$ систему:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial \zeta} = l^2 \rho^k \frac{\partial^2 U_x^k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial \zeta} = l^2 \rho^k \frac{\partial^2 U_y^k}{\partial t^2},\tag{2.1}$$

$$\frac{\partial U_x^k}{\partial \xi} = \beta_{11}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{12}^k \sigma_{yy}^k, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_y^k}{\partial \zeta} = \beta_{12}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{22}^k \sigma_{yy}^k, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_x^k}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_y^k}{\partial \xi} = a_{66}^k \sigma_{xy}^k.$$

Решение системы (2.1) будем искать в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^k(\xi, \zeta, t) = \sigma_{ij}^k(\xi, \zeta) \exp(i\omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, \quad i, j = 1, 2, \quad k = I, II, III,\tag{2.2}$$

$$(U_x^k(\xi, \zeta, t), U_y^k(\xi, \zeta, t)) = (U^k(\xi, \zeta), V^k(\xi, \zeta)) \exp(i\omega t).$$

Подставив (2.2) в (2.1), получим систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 \rho^k U^k &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 \rho^k V^k = 0, \\ \frac{\partial U^k}{\partial \xi} &= \beta_{11}^k \sigma_{11}^k + \beta_{12}^k \sigma_{22}^k, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} = \beta_{12}^k \sigma_{11}^k + \beta_{22}^k \sigma_{22}^k,\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^k}{\partial \xi} = a_{66}^k \sigma_{12}^k, \quad \omega_* = H\omega, \quad k = I, II.$$

Решение сингулярно-возмущённой системы (2.3) складывается из решений внутренней задачи (Γ^{int}) и пограничного слоя (Γ^{b}) [1,11]

$$I = I^{\text{int}} + I^{\text{b}}\tag{2.4}$$

Решение внутренней задачи (Γ^{int}) имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{k \text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{k(s)}(\xi, \zeta), \quad i, j = 1, 2, \quad s = \overline{0, N}, \\ (U^{k \text{int}}, V^{k \text{int}}) &= \varepsilon^s (U^{k(s)}, V^{k(s)}), \quad k = I, II, III.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в (2.3), после известной процедуры для определения $\sigma_{ij}^{k(s)}, U^{k(s)}, V^{k(s)}$ получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \rho^k U^{k(s)} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \rho^k V^{k(s)} = 0, \\ \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{11}^k \sigma_{11}^{k(s)} + \beta_{12}^k \sigma_{22}^{k(s)}, \quad \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} = \beta_{12}^k \sigma_{11}^{k(s)} + \beta_{22}^k \sigma_{22}^{k(s)}, \\ \frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} = a_{66}^k \sigma_{12}^{k(s)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из этой системы напряжения можно выразить через перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(-\beta_{12}^k \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{22}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(\beta_{11}^k \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\ \sigma_{12}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \Delta_1^k = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - (\beta_{12}^k)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставив значение $\sigma_{12}^{k(s)}$ в первое уравнение (2.6), для определения $U^{k(s)}$ получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 U^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}^k \omega_*^2 \rho^k U^{k(s)} = f_u^{k(s)}, \quad (2.8)$$

где

$$f_u^{k(s)} = -a_{66}^k \frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 V^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}. \quad (2.9)$$

Подставив значение $\sigma_{22}^{k(s)}$ из (2.7) во второе уравнение (2.6), получим следующее уравнение для определения $V^{k(s)}$:

$$\frac{\partial^2 V^{k(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta_1^k}{\beta_{11}^k} \omega_*^2 \rho^k V^{k(s)} = f_v^{k(s)}, \quad (2.10)$$

где

$$f_v^{k(s)} = \frac{\beta_{12}^k}{\beta_{11}^k} \frac{\partial^2 U^{k(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\Delta_1^k}{\beta_{11}^k} \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} \quad (2.11)$$

Решением уравнения (2.8) является

$$U^{k(s)} = C_1^{k(s)}(\xi) \sin \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta + C_2^{k(s)}(\xi) \cos \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta + \bar{u}^{k(s)} \quad (2.12)$$

а уравнения (2.10) –

$$V^{k(s)} = C_3^{k(s)}(\xi) \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^k}{\beta_{11}^k} \rho^k} \omega_* \zeta + C_4^{k(s)}(\xi) \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^k}{\beta_{11}^k} \rho^k} \omega_* \zeta + \bar{v}^{k(s)}, \quad (2.13)$$

где $\bar{u}^{k(s)}$, $\bar{v}^{k(s)}$ – частные решения уравнений (2.8), (2.10), соответственно.

Подставив значения $U^{k(s)}$, $V^{k(s)}$ в формулы (2.7), для вычисления напряжения $\sigma_{12}^{k(s)}$ будем иметь:

$$\sigma_{12}^{k(s)} = \omega_* \sqrt{\rho^k / a_{66}^k} \left(C_1^{k(s)} \cos \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta - C_2^{k(s)} \sin \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{12}}^{k(s)}, \quad (2.14)$$

$$f_{\sigma_{12}}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial \bar{u}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

а для напряжения $\sigma_{22}^{k(s)}$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{k(s)} = \omega_* \sqrt{\beta_{11}^k \rho^k / \Delta_1^k} \left(C_3^{k(s)} \cos \sqrt{\Delta_1^k \rho^k / \beta_{11}^k} \omega_* \zeta - \right. \\ \left. - C_4^{k(s)} \sin \sqrt{\Delta_1^k \rho^k / \beta_{11}^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{22}}^{k(s)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$f_{\sigma_{22}}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(\beta_{11}^k \frac{\partial \bar{v}^{k(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}^k \frac{\partial u^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right).$$

Используя решения (2.14), (2.15), удовлетворим условиям (1.3), (1.4), которые примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) = X^{+(s)}, \quad \sigma_{12}^{II(s)}(\xi, -\zeta_2) = -X^{-(s)}, \\ \sigma_{22}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) = Y^{+(s)}, \quad \sigma_{22}^{II(s)}(\xi, -\zeta_2) = -Y^{-(s)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$X^{\pm(0)} = \varepsilon X^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (2.17)$$

$$Y^{\pm(0)} = \varepsilon Y^{\pm}, \quad Y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0.$$

В результате, относительно функций $C_j^{I(s)}(\xi)$, $C_j^{III(s)}(\xi)$ получим систему:

$$\omega_* \sqrt{\rho^I / a_{66}^I} \left(C_1^{I(s)} \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta_1 - C_2^{I(s)} \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta_1 \right) + f_{\sigma_{12}}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) = X^{+(s)}(\xi),$$

$$\omega_* \sqrt{\beta_{11}^I \rho^I / \Delta_1^I} \left(C_3^{I(s)} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* \zeta_1 - C_4^{I(s)} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* \zeta_1 \right) +$$

$$+ f_{\sigma_{22}}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) = Y^{+(s)}(\xi),$$

$$\omega_* \sqrt{\rho^{III} / a_{66}^{III}} \left(C_1^{III(s)} \cos \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* \zeta_2 + C_2^{III(s)} \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* \zeta_2 \right) +$$

$$+ f_{\sigma_{12}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_2) = -X^{-(s)}(\xi), \quad (2.18)$$

$$\omega_* \sqrt{\beta_{11}^{III} \rho^{III} / \Delta_1^{III}} \left(C_3^{III(s)} \cos \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* \zeta_2 + C_4^{III(s)} \sin \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* \zeta_2 \right) +$$

$$+ f_{\sigma_{22}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_2) = -Y^{-(s)}(\xi)$$

К системе (2.18) необходимо присоединить вытекающие из условий контакта между слоями (1.5), (1.6) алгебраические уравнения. Соответствующая объединённая алгебраическая система из двенадцати уравнений относительно двенадцати неизвестных $C_1^{k(s)}$, $C_2^{k(s)}$, $C_3^{k(s)}$, $C_4^{k(s)}$, $k = I, II, III$ распадается на две системы относительно соответствующих шести неизвестных. Решив первую из этих систем, определим $C_1^{k(s)}$, $C_2^{k(s)}$:

$$\begin{aligned}
C_1^{I(s)} &= \frac{1}{A_1^I} \left(d_1^{(s)} + \frac{A_2^I g_2^{(s)}}{g_1} \right), & C_2^{I(s)} &= \frac{g_2^{(s)}}{g_1}, \\
C_1^{II(s)} &= \frac{1}{b_1} \left(\frac{m_3 g_2^{(s)}}{g_1} - m_4^{(s)} \right), & C_2^{II(s)} &= \frac{1}{b_1} \left(\frac{m_1 g_2^{(s)}}{g_1} - m_2^{(s)} \right) \\
C_1^{III(s)} &= \frac{1}{A_1^{III}} \left(d_3^{(s)} - \frac{A_2^{III} g_3^{(s)}}{g_1} \right), & C_2^{III(s)} &= \frac{g_3^{(s)}}{g_1},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$\begin{aligned}
m_1 &= -\frac{A_2^{II0}}{A_1^I} \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_1 A_1^{II0}}{A_1^I} \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0), \\
m_3 &= \frac{A_1^{II0}}{A_1^I} \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_1 A_2^{II0}}{A_1^I} \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0), \\
m_2^{(s)} &= b_1 A_1^{II0} \left(d_9^{(s)} - \frac{A_2^{I0} d_1^{(s)}}{A_1^I} \right) - A_2^{II0} \left(d_5^{(s)} - \frac{A_1^{I0} d_1^{(s)}}{A_1^I} \right), \\
m_4^{(s)} &= b_1 A_2^{II0} \left(d_9^{(s)} - \frac{A_2^{I0} d_1^{(s)}}{A_1^I} \right) + A_1^{II0} \left(d_5^{(s)} - \frac{A_1^{I0} d_1^{(s)}}{A_1^I} \right), \\
g_1 &= \frac{1}{b_1 A_1^I A_1^{III}} \left[\left(\cos 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \right. \\
&+ b_1 \sin 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \left. \right) \cos \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \\
&+ b_3 \left(b_1 \cos 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \\
&\left. \left. - \sin 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
g_2^{(s)} &= \frac{1}{b_1 A_1^{III}} \left[\left(b_1 d_7^{(s)} + A_1^{II0} m_4 + A_2^{II0} m_2 + \frac{b_1 b_3 A_1^{III0} d_3^{(s)}}{A_1^{III}} \right) \cos \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \right. \\
&\left. + \left(b_1 d_{10}^{(s)} - A_2^{II0} m_4 + A_1^{II0} m_2 - \frac{b_1 A_2^{III0} d_3^{(s)}}{A_1^{III}} \right) b_3 \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
g_3^{(s)} &= \frac{1}{b_1^2 A_1^I} \left[\left(b_1 d_7^{(s)} + A_1^{II0} m_4 + A_2^{II0} m_2 + \frac{b_1 b_3 A_1^{III0} d_3^{(s)}}{A_1^{III}} \right) \times \right. \\
&\times \left(b_1 \cos 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \\
&\left. \left. - \sin 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) - \right.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(b_1 d_{10}^{(s)} - A_2^{II0} m_4 + A_1^{II0} m_2 - \frac{b_1 A_2^{III0} d_3^{(s)}}{A_1^{III}} \right) \left(\cos 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \\
& \left. + b_1 \sin 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right), \\
& A_1^I = \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta_1, \quad A_2^I = \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta_1, \\
& A_3^I = \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* \zeta_1, \quad A_4^I = \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* \zeta_1, \quad I, III = \zeta_1, \zeta_2, \\
& A_1^{i0} = \cos \sqrt{a_{66}^i \rho^i} \omega_* \zeta_0, \quad A_2^{i0} = \sin \sqrt{a_{66}^i \rho^i} \omega_* \zeta_0, \\
& A_3^{i0} = \cos \sqrt{\Delta_1^i \rho^i / \beta_{11}^i} \omega_* \zeta_0, \quad A_4^{i0} = \sin \sqrt{\Delta_1^i \rho^i / \beta_{11}^i} \omega_* \zeta_0, \quad i = I, II, III, \\
& b_1 = \sqrt{a_{66}^I \rho^I / a_{66}^{II} \rho^{II}}, \quad b_2 = \sqrt{\beta_{11}^{II} \rho^{II} \Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I \Delta_1^{II}}, \\
& b_3 = \sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II} / a_{66}^{III} \rho^{III}}, \quad b_4 = \sqrt{\beta_{11}^{III} \rho^{III} \Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II} \Delta_1^{III}}, \\
& d_1^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \left(X^{+(s)}(\xi) - f_{\sigma_{12}}^I(\xi, \zeta_1) \right), \\
& d_2^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(Y^{+(s)}(\xi) - f_{\sigma_{22}}^I(\xi, \zeta_1) \right), \\
& d_3^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^{III} / \rho^{III}} \left(-X^{-(s)}(\xi) - f_{\sigma_{12}}^{III}(\xi, -\zeta_2) \right), \\
& d_4^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(-Y^{-(s)}(\xi) - f_{\sigma_{22}}^{III}(\xi, -\zeta_2) \right), \\
& d_5^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \left(f_{\sigma_{12}}^{II(s)}(\xi, \zeta_0) - f_{\sigma_{12}}^I(\xi, \zeta_0) \right), \\
& d_6^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(f_{\sigma_{22}}^{II(s)}(\xi, \zeta_0) - f_{\sigma_{22}}^I(\xi, \zeta_0) \right), \\
& d_7^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^{II} / \rho^{II}} \left(f_{\sigma_{12}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_0) - f_{\sigma_{12}}^{II(s)}(\xi, -\zeta_0) \right), \\
& d_8^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \left(f_{\sigma_{22}}^{III(s)}(\xi, -\zeta_0) - f_{\sigma_{22}}^{II(s)}(\xi, -\zeta_0) \right), \\
& d_9^{(s)} = \bar{u}^{II(s)}(\xi, \zeta_0) - \bar{u}^I(\xi, \zeta_0), \\
& d_{10}^{(s)} = \bar{u}^{III(s)}(\xi, -\zeta_0) - \bar{u}^{II(s)}(\xi, -\zeta_0), \\
& d_{11}^{(s)} = \bar{v}^{II(s)}(\xi, \zeta_0) - \bar{v}^I(\xi, \zeta_0), \\
& d_{12}^{(s)} = \bar{v}^{III(s)}(\xi, -\zeta_0) - \bar{v}^{II(s)}(\xi, -\zeta_0).
\end{aligned}$$

Из второй системы определяются $C_3^{k(s)}$, $C_4^{k(s)}$:

$$\begin{aligned}
C_3^{I(s)} &= \frac{1}{A_3^I} \left(d_2^{(s)} + \frac{A_4^I \bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1} \right), & C_4^{I(s)} &= \frac{\bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1}, \\
C_3^{II(s)} &= \frac{1}{b_2} \left(\frac{\bar{m}_3 \bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1} - \bar{m}_4^{(s)} \right), & C_4^{II(s)} &= \frac{1}{b_2} \left(\frac{\bar{m}_1 \bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1} - \bar{m}_2^{(s)} \right), \\
C_3^{III(s)} &= \frac{1}{A_3^{III}} \left(d_4^{(s)} - \frac{A_4^{III} \bar{g}_3^{(s)}}{\bar{g}_1} \right), & C_4^{III(s)} &= \frac{\bar{g}_3^{(s)}}{\bar{g}_1},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{m}_1 &= -\frac{A_4^{II0}}{A_3^I} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_2 A_3^{II0}}{A_3^I} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0), \\
\bar{m}_3 &= \frac{A_3^{II0}}{A_3^I} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_2 A_4^{II0}}{A_3^I} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0), \\
\bar{m}_2^{(s)} &= b_2 A_3^{II0} \left(d_{11}^{(s)} - \frac{A_4^{I0} d_2^{(s)}}{A_3^I} \right) - A_4^{II0} \left(d_6^{(s)} - \frac{A_3^{I0} d_2^{(s)}}{A_3^I} \right), \\
\bar{m}_4^{(s)} &= b_2 A_4^{II0} \left(d_{11}^{(s)} - \frac{A_4^{I0} d_2^{(s)}}{A_3^I} \right) + A_3^{II0} \left(d_6^{(s)} - \frac{A_3^{I0} d_2^{(s)}}{A_3^I} \right), \\
\bar{g}_1 &= \frac{1}{b_2 A_3^I A_3^{III}} \left[\left(\cos 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_2 \sin 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \cos \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \right. \\
&\quad \left. + b_4 \left(b_2 \cos 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
\bar{g}_2^{(s)} &= \frac{1}{b_2 A_3^{III}} \left[\left(b_2 d_8^{(s)} + A_3^{II0} \bar{m}_4 + A_4^{II0} \bar{m}_2 + \frac{b_2 b_4 A_3^{III0} d_4^{(s)}}{A_3^{III}} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \cos \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \right. \\
&\quad \left. + \left(b_2 d_{12}^{(s)} - A_4^{II0} \bar{m}_4 + A_3^{II0} \bar{m}_2 - \frac{b_2 A_4^{III0} d_4^{(s)}}{A_3^{III}} \right) b_4 \sin \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
\bar{g}_3^{(s)} &= \frac{1}{b_2 A_3^I} \left[\left(b_2 d_8^{(s)} + A_3^{II0} \bar{m}_4 + A_4^{II0} \bar{m}_2 + \frac{b_2 b_4 A_3^{III0} d_4^{(s)}}{A_3^{III}} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(b_2 \cos 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \right.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \\
& - \left(b_2 d_{12}^{(s)} - A_4^{II0} \bar{m}_4 + A_3^{II0} \bar{m}_2 - \frac{b_2 A_4^{III} d_4^{(s)}}{A_3^{III}} \right) \times \\
& \times \left(\cos 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \\
& \left. + b_2 \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \Big].
\end{aligned}$$

Подставив значения $C_j^{k(s)}$ в формулы (2.12), (2.13), определим перемещения, а по формулам (2.7), (2.14), (2.15) вычисляются напряжения. Согласно формулам (2.12), (2.19), имеем:

$$U^{I(s)} = \frac{d_1^{(s)} g_1 + A_2^I g_2^{(s)}}{A_1^I g_1} \sin \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta + \frac{g_2^{(s)}}{g_1} \cos \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega_* \zeta + \bar{u}^{I(s)}, \quad (2.23)$$

$$U^{II(s)} = \frac{m_3 g_2^{(s)} - m_4^{(s)} g_1}{b_1 g_1} \sin \sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta + \frac{m_1 g_2^{(s)} - m_2^{(s)} g_1}{b_1 g_1} \cos \sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega_* \zeta + \bar{u}^{II(s)},$$

$$U^{III(s)} = \frac{d_3^{(s)} g_1 - A_2^{III} g_3^{(s)}}{A_1^{III} g_1} \sin \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* \zeta + \frac{g_3^{(s)}}{g_1} \cos \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega_* \zeta + \bar{u}^{III(s)},$$

а используя (2.13), (2.21), получим

$$V^{I(s)} = \frac{d_2^{(s)} \bar{g}_1 + A_4^I \bar{g}_2^{(s)}}{A_3^I \bar{g}_1} \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^I}{\beta_{11}^I} \rho^I} \omega_* \zeta + \frac{\bar{g}_2^{(s)}}{\bar{g}_1} \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^I}{\beta_{11}^I} \rho^I} \omega_* \zeta + \bar{v}^{I(s)}, \quad (2.24)$$

$$V^{II(s)} = \frac{\bar{m}_3 \bar{g}_2^{(s)} - \bar{m}_4^{(s)} \bar{g}_1}{b_2 \bar{g}_1} \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^{II}}{\beta_{11}^{II}} \rho^{II}} \omega_* \zeta + \frac{\bar{m}_1 \bar{g}_2^{(s)} - \bar{m}_2^{(s)} \bar{g}_1}{b_2 \bar{g}_1} \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^{II}}{\beta_{11}^{II}} \rho^{II}} \omega_* \zeta + \bar{v}^{II(s)},$$

$$V^{III(s)} = \frac{d_4^{(s)} \bar{g}_1 - A_4^{III} \bar{g}_3^{(s)}}{A_3^{III} \bar{g}_1} \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^{III}}{\beta_{11}^{III}} \rho^{III}} \omega_* \zeta + \frac{\bar{g}_3^{(s)}}{\bar{g}_1} \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^{III}}{\beta_{11}^{III}} \rho^{III}} \omega_* \zeta + \bar{v}^{III(s)}.$$

Как следует из формул (2.23), (2.24), при

$$g_1 = 0 \quad \text{и} \quad \bar{g}_1 = 0 \quad (2.25)$$

будет возникать резонанс. Уравнением для определения резонансных частот соответствующих $g_1 = 0$, согласно (2.20), является:

$$\begin{aligned}
& (1 + b_1) \left[(1 + b_3) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (1 - b_3) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \right] + \\
& + (1 - b_1) \left[(1 - b_3) \sin(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + (1 + b_3) \sin(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \right] = 0, \quad (2.26)
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{a_{66}^I \rho^I} \omega h_1, \quad \alpha_2 = 2\sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}} \omega h, \quad \alpha_3 = \sqrt{a_{66}^{III} \rho^{III}} \omega h_2,$$

а уравнением резонансных частот соответствующих $\bar{g}_1 = 0$, согласно (2.22), является

$$(1+b_2)\left[(1+b_4)\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+(1-b_4)\sin(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3)\right]+$$

$$+(1-b_2)\left[(1-b_4)\sin(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3)+(1+b_4)\sin(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)\right]=0, \quad (2.27)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega h_1, \quad \gamma_2 = 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega h, \quad \gamma_3 = \sqrt{\Delta_1^{III} \rho^{III} / \beta_{11}^{III}} \omega h_2.$$

Как следует из формул (2.23), (2.24), (2.26), (2.27), во всех слоях возникает резонанс при одинаковых, соответствующих значениях резонансных частот.

Из полученного решения (2.7), (2.12)-(2.15), (2.19)-(2.22) легко вывести более простые формулы для пакета симметричной структуры. Для этого случая $h_1 = h_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$, $a_{ij}^I = a_{ij}^{III}$.

Отметим, что найденное решение, как правило, не будет удовлетворять условиям на боковой поверхности. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя. Решение пограничного слоя и его сопряжение с решением внутренней задачи осуществляется, как в [1,9].

Если функции $X^\pm(x), Y^\pm(x)$ являются многочленами, итерационный процесс обрывается на определённом приближении и получается математически точное решение. В качестве иллюстрации приведём решение, соответствующее

$Y^+(x) = \text{const}$, $X^\pm = 0$, $Y^- = 0$. Согласно формулам (2.9), (2.12), (2.14), (2.19), (2.20), имеем:

$$C_1^{j(s)} = 0, \quad C_2^{j(s)} = 0, \quad U^{j(s)} = 0, \quad \sigma_{12}^{j(s)} = 0, \quad j = I, II, III. \quad (2.28)$$

Используя формулы (2.7), (2.11), (2.13), (2.15), (2.21), (2.22), будем иметь:

$$d_2^{(0)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I} \rho^I Y^{+(0)}, \quad d_k^{(0)} = 0, \quad d_i^{(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad k = 4, 6, 8, 11, 12,$$

$$C_3^{I(0)} = \frac{1}{A_3^I} \left(d_2^{(0)} + \frac{A_4^I \bar{g}_2^{(0)}}{\bar{g}_1} \right), \quad C_4^{I(0)} = \frac{\bar{g}_2^{(0)}}{\bar{g}_1},$$

$$C_3^{II(0)} = \frac{1}{b_2} \left(\frac{\bar{m}_3 \bar{g}_2^{(0)}}{\bar{g}_1} - \bar{m}_4^{(0)} \right), \quad C_4^{II(0)} = \frac{1}{b_2} \left(\frac{\bar{m}_1 \bar{g}_2^{(0)}}{\bar{g}_1} - \bar{m}_2^{(0)} \right),$$

$$C_3^{III(0)} = -\frac{A_4^{III} \bar{g}_3^{(0)}}{A_3^{III} \bar{g}_1}, \quad C_4^{III(0)} = \frac{\bar{g}_3^{(0)}}{\bar{g}_1},$$

$$\bar{m}_1 = -\frac{A_4^{II0}}{A_3^I} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_2 A_3^{II0}}{A_3^I} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0),$$

$$\bar{m}_3 = \frac{A_3^{II0}}{A_3^I} \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \frac{b_2 A_4^{II0}}{A_3^I} \cos \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0),$$

$$\bar{m}_2^{(0)} = \frac{d_2^{(0)}}{A_3^I} (A_4^{II0} A_3^{I0} - b_2 A_3^{II0} A_4^{I0}),$$

$$\bar{m}_4^{(0)} = -\frac{d_2^{(0)}}{A_3^I} (b_2 A_4^{II0} A_4^{I0} + A_3^{II0} A_3^{I0}),$$

$$\bar{g}_1 = \frac{1}{b_2 A_3^I A_3^{III}} \left[\left(\cos 2\sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + b_2 \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \cos \sqrt{\Delta_1''' \rho''' / \beta_{11}'''} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \\
& + b_4 \left(b_2 \cos 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \\
& \left. - \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \sin \sqrt{\Delta_1''' \rho''' / \beta_{11}'''} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \Big], \\
\bar{g}_2^{(0)} &= \frac{1}{b_2 A_3'''} \left[\left(A_3'' \bar{m}_4 + A_4'' \bar{m}_2 \right) \cos \sqrt{\Delta_1''' \rho''' / \beta_{11}'''} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) + \right. \\
& \left. + \left(A_4'' \bar{m}_4 + A_3'' \bar{m}_2 \right) b_4 \sin \sqrt{\Delta_1''' \rho''' / \beta_{11}'''} \omega_* (\zeta_2 - \zeta_0) \right], \\
\bar{g}_3^{(0)} &= \frac{1}{b_2^2 A_3'} \left[\left(A_3'' \bar{m}_4 + A_4'' \bar{m}_2 \right) \times \right. \\
& \times \left(b_2 \cos 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) - \right. \\
& \left. - \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) - \\
& \left. - \left(A_4'' \bar{m}_4 + A_3'' \bar{m}_2 \right) \left(\cos 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \sin \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) + \right. \right. \\
& \left. \left. + b_2 \sin 2\sqrt{\Delta_1'' \rho'' / \beta_{11}''} \omega_* \zeta_0 \cos \sqrt{\Delta_1' \rho' / \beta_{11}'} \omega_* (\zeta_1 - \zeta_0) \right) \right].
\end{aligned}$$

В результате, имеем следующее математически точное решение внутренней задачи

$$u^k = 0, \quad \sigma_{12}^k = 0, \quad v^k = lV^{k(0)} \exp(i\omega t),$$

$$V^{k(0)} = C_3^{\kappa(0)}(\xi) \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^\kappa}{\beta_{11}^\kappa}} \rho^k \omega_* \zeta + C_4^{\kappa(0)}(\xi) \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^\kappa}{\beta_{11}^\kappa}} \rho^k \omega_* \zeta, \quad (2.30)$$

$$V^{\kappa(s)} = 0, \quad s \neq 0$$

$$\sigma_{xx}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{k(0)} \exp(i\omega t), \quad \sigma_{yy}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{22}^{k(0)} \exp(i\omega t)$$

$$\sigma_{11}^{k(0)} = -\frac{\beta_{12}^k}{\Delta_1^k} \frac{\partial V^{k(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{22}^{k(0)} = \frac{\beta_{11}^k}{\Delta_1^k} \frac{\partial V^{k(0)}}{\partial \zeta}.$$

Заключение. Найдено решение первой динамической краевой задачи теории упругости для трёхслойной ортотропной полосы несимметричной структуры. Считается, что полоса находится в условиях плоской деформации. Асимптотическим методом выведены характеристические уравнения и рекуррентные формулы для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Установлены условия возникновения резонанса. Доказано, что значения резонансных частот для всех слоёв одинаковы и зависят от физико-механических и геометрических параметров всех слоёв. Показано, что при полиномиальных внешних нагружениях итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение во внутренней задаче. Приведён иллюстрационный пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468 с.
3. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях.// Докл. НАН Армении. 1999. Т.99 №4. С.315-321.
4. Агаловян Л.А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. // В сб.: «Тр. XVIII Международной конф. по теории оболочек и пластин». Саратов: 1997. Т.1. С.30-38.
5. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.
6. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.18-28.
7. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией. // В сб.: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести». Ереван. Изд-во «Гитутюн» НАН Армении, 2006. С.42-49.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы. // Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2008. Т.72. Вып.4. С.633-634; Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 72 (2008), pp 452-460. Elsevier 2008.
9. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. // В сб.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван. 2007. С. 21-27.
10. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. №4. С.304-309.
11. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович,

Академик НАН Армении, зав. отделом Института механики НАН Армении

Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (+37410) 52-58-35; E-mail: aghal@mechins.sci.am

Закарян Татевик Владиковна,

Научн.сотр. Института механики НАН Армении

Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (+37410) 63-88-82; E-mail: zaqaryantatevik@mail.ru

Поступила в редакцию 16.10.2014