

**РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ
ПОЛОСУ И СИММЕТРИЧНЫЕ ТРЕЩИНЫ НА ЛИНИЯХ
КОНТАКТА**

Саркисян В.Г., Хачикян А.С.

Ключевые слова: полуплоскость, полоса, трещина, особенность, контактные напряжения.

Key words: half plane, strip, crack, concentration, contact stress.

Բանալի բառեր. Կիսահարթություն, շերտ, ճաք, կենտրոնացում, կոնտակտային լարումներ

Սարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս.

**Շերտ և ամրակցման եզրերում սիմետրիկ ճաքեր պարունակող առաձգական հարթության
հավասարակշռությունը**

Դիտարկվում է երկու կիսահարթություններ պարունակող և այլ առաձգական նյութից շերտի միջոցով իրար միացված առաձգական հարթության հավասարակշռությունը: Շերտի և կիսահարթությունների հպման գծերի վրա կան սիմետրիկ դասավորված վերջավոր ճաքեր: Որոշված է հարթության լարվածային վիճակը և անջատված է եզակիության գործակիցը:

Sargsyan V.G., Khachikyan A.S.

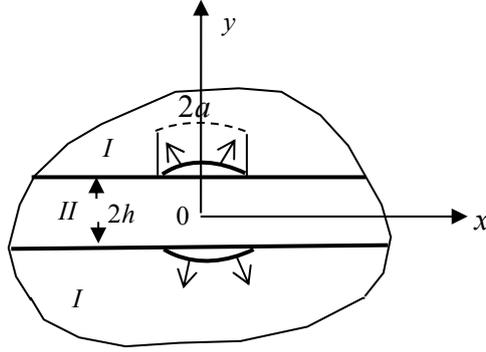
The equilibrium of the elastic plane with the strip and symmetric cracks on the lines of the contacts

The equilibrium of the elastic plane, which is composed from the two similar half plane, joined together by the strip from the other elastic material is considered. On the contact lines of the strip and half planes located two symmetric cracks of finite longitude. The stress station of the plane with separated stress concentration is determined.

Рассматривается напряжённое состояние упругой плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, соединённых полосой из другого упругого материала. На контактных линиях соединения полосы с полуплоскостями существуют две симметрично расположенные трещины. Определяется напряжённое состояние плоскости с выделенной особенностью около вершин трещины.

Введение. Определением напряжённого состояния составной плоскости, содержащей трещины, занимались многие исследователи [1-2]. Исследовались также многие случаи напряжённого состояния составной плоскости, содержащей периодические трещины и накладки [3-5]. Здесь рассмотрено напряжённое состояние составной плоскости с двумя симметричными трещинами.

Постановка задачи. Рассматривается упругая плоскость, составленная из двух одинаковых полуплоскостей, соединённых между собой посредством слоя из другого упругого материала. На линиях контакта слоя с полуплоскостями имеются симметрично расположенные трещины длиной $2a$. В силу симметричности задач рассматривается первая четверть плоскости (фиг.1).



Фиг. 1

Граничные условия на линиях контакта с введением новых неизвестных в виде разности перемещений в области трещины будут:

$$\begin{aligned}
 u_1 - u_2 = u; \quad v_1 - v_2 = v; \quad (0 \leq x < a, y = h), u = v = 0, (a < x < \infty, y = h); \\
 \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}; \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} \quad (y = h; x > 0) \quad \tau_{xy}^{(1)} = u_1 = 0 \quad (x = 0, y > h), \\
 \tau_{xy}^{(2)} = 0, u_2 = 0 \quad (x = 0; 0 < y < h) \quad \tau_{xy}^{(2)} = v_2 = 0, (y = 0, 0 < x < \infty);
 \end{aligned} \quad (1)$$

где индекс «1» относится к полуплоскости, а «2» – к слою. Внешняя нагрузка в виде симметричных усилий приложена к берегам трещин

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(1)} = f(x) \\
 \tau_{xy}^{(1)} = 0 \quad (y = h; 0 < x < a)
 \end{aligned} \quad (2)$$

Бигармоническую функцию Эри представим в виде:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y); & y > h, x > 0 \\ \Phi_2(x, y); & 0 < y < h, x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^{\infty} (A_1(\lambda) + \lambda y B_1(\lambda)) e^{-\lambda y} \cos \lambda x d\lambda$$

$$\Phi_2(x, y) = \int_0^{\infty} (A_2(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y) \cos \lambda x d\lambda, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{h}$$

Используя формулы, выражающие компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений [6], переходя к образам Фурье и удовлетворяя условиям (1), для подынтегральных коэффициентов в выражении бигармонической функции Эри получим:

$$\begin{aligned}
 A_1(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[a_2 (b_4 (\operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h) + 2e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda y (\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \lambda h)) - \right. \\
 \left. - a_3 (b_2 (\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h) + 2e^{-\lambda h} \operatorname{sh} \lambda h (\lambda h e^{\lambda h} - \operatorname{ch} \lambda h)) \right] e^{-2\lambda h}, \\
 B_1(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[-a_2 (b_1 (\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h) + 2 \operatorname{ch} \lambda h) + \right. \\
 \left. + a_3 (b_1 (\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h) + \operatorname{sh} \lambda h) + 2 \operatorname{sh} \lambda h \right] e^{-2\lambda h},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[(a_2 \lambda h (b_4 - \lambda h b_1) + b_4 \operatorname{sh} \lambda h - 2 \operatorname{ch} \lambda h e^{-\lambda h}) + \right. \\
&+ a_3 (\lambda h e^{\lambda h} (\lambda h b_1 - b_2) - b_2 \operatorname{sh} \lambda h + 2 \operatorname{sh} \lambda h e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} \Big] e^{-2\lambda h}, \\
B_2(\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[a_2 e^{-\lambda h} (\operatorname{ch} \lambda h (b_1 \lambda h - b_4 - b_1) + \operatorname{sh} \lambda h (b_1 \lambda h - b_4)) + \right. \\
&+ a_3 e^{-\lambda h} (\operatorname{ch} \lambda h (b_2 - b_1 \lambda h + b_1) + \operatorname{sh} \lambda h (b_2 - b_1 \lambda h)) \Big] e^{-2\lambda h}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= -\frac{1}{4} (d + 4e^{-2\lambda h} \lambda h d_3 d_4 - e^{-4\lambda h} d_4 d_5), \\
d &= \left[(1 + \nu_2) + (3 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right] \left[(3 - \nu_2) + (1 + \nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right], \\
d_3 &= 1 + \nu_2 + (3 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1}; \quad d_4 = -(1 + \nu_2) + (1 + \nu_1) \frac{E_2}{E_1}, \\
d_5 &= 3 - \nu_2 - (3 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$a_2 = -\frac{2}{\lambda^2} \frac{E_2}{\pi} \int_0^a v^1(x) \sin \lambda x dx; \quad a_3 = \frac{2}{\lambda^2} \frac{E_2}{\pi} \int_0^a u^1(x) \cos \lambda x dx,$$

$$b_1 = d_4 e^{-\lambda h}; \quad b_2 = \left[-1(1 + \nu_2)(\lambda h - 1) + ((1 - \nu_1) + (1 + \nu_1)\lambda h) \frac{E_2}{E_1} \right] e^{-\lambda h},$$

$$b_4 = \left(\lambda h d_4 - 2 \frac{E_2}{E_1} \right) e^{-\lambda h}$$

Введём преобразование координат:

$$x = at, \quad y = a\tau; \quad \lambda h = \frac{\eta}{a_0}; \quad a_0 = \frac{a}{h}; \quad u^{(1)}(t) = u'(x); \quad v^{(1)}(t) = v'(x).$$

Удовлетворение условиям (2) приводит к следующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + i\theta \varphi(t) + \int_{-1}^1 M_{11}(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 M_{12}(\tau, t) \bar{\varphi}(\tau) d\tau &= \frac{f(t) d\theta}{E_2 d_1} \\
\int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\theta = \frac{d_1}{2 \left(\frac{E_2}{E_1} + 1 \right)}; \quad \varphi(t) = u^{(1)}(t) + i v^{(1)}(t); \quad d_1 = 1 - \nu_2 - (1 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1}.$$

Решения (5) можно представить в виде [6]

$$\varphi(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \varphi^*(t), \quad (6)$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{2} - i\gamma; \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(1+\nu_2)E_1 + (3-\nu_1)E_2}{(1+\nu_1)E_2 + (3-\nu_2)E_1}; \quad \text{th}\pi\gamma = -\theta$$

Дискретизируя уравнения (5) при помощи квадратурных формул [5], решение (5) сведём к решению следующей системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi^*(\xi_i) \left(\frac{1}{z_j - \xi_i} + H_{11}(\xi_i, z_j) \right) + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{H}_{12}(\xi_i, z_j) \bar{\varphi}^*(\bar{\xi}_i) = i\pi f(z_j) \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi^*(\xi_i) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n-1) (j=1, 2, \dots, n),$$

где

$$H_{11}(t, \tau) = i\pi M_{11}(t, \tau), \quad H_{12} = i\pi M_{12}(t, \tau), \quad a_i = \frac{\pi P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(\xi_i)}{n \text{ch}\pi\gamma P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)}$$

$\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

z_j – корни многочлена Якоби $P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)$

$$M_{11}(t, \tau) = -\frac{1}{2}(K_{22}(t, \tau) - K_{12}(t, \tau)) + \frac{i}{2}(K_{11}(t, \tau) + K_{21}(t, \tau))$$

$$M_{12}(t, \tau) = -\frac{1}{2}(K_{22}(t, \tau) + K_{21}(t, \tau)) + \frac{i}{2}(K_{11}(t, \tau) - K_{21}(t, \tau))$$

$$K_{11}(t, \tau) = -\frac{d\theta}{d_1\pi} \int_0^\infty \cos \eta t \cos \eta \tau G_2(\eta) d\eta$$

$$K_{12}(t, \tau) = -\frac{d\theta}{d_1\pi} \int_0^\infty \cos \eta t \sin \eta \tau G_3(\eta) d\eta \quad (8)$$

$$K_{21}(t, \tau) = -\frac{d\theta}{d_1\pi} \int_0^\infty \sin \eta t \sin \eta \tau G_2(\eta) d\eta$$

$$K_{21}(t, \tau) = -\frac{d\theta}{d_1\pi} \int_0^\infty \sin \eta t \cos \eta \tau G_1(\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned}
G_1(\eta) &= -\frac{e^{-\frac{2\eta}{a_0}}}{d\Delta(\eta)} \left\{ 2d \left(2\frac{\eta}{a_0} \frac{E_2}{E_1} - 1 \right) - 4d_3d_4 \frac{\eta}{a_0} \left(\frac{E_2}{E_1} + 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + e^{-\frac{2\eta}{a_0}} \left[d \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) + d_4d_5 \left(\frac{E_2}{E_1} + 1 \right) \right] \right\} \\
G_2(\eta) &= \frac{e^{-\frac{2\eta}{a_0}}}{d\Delta(\eta)} \left[\left(4\frac{\eta}{a_0} d_2d + 4d_1d_4 \frac{\eta}{a_0} \right) + e^{-\frac{2\eta}{a_0}} d_1 (d + d_4d_5) \right] \\
G_3(\eta) &= G_1(\eta) - 4 \frac{e^{-\frac{2\eta}{a_0}}}{\Delta(\eta)}
\end{aligned}$$

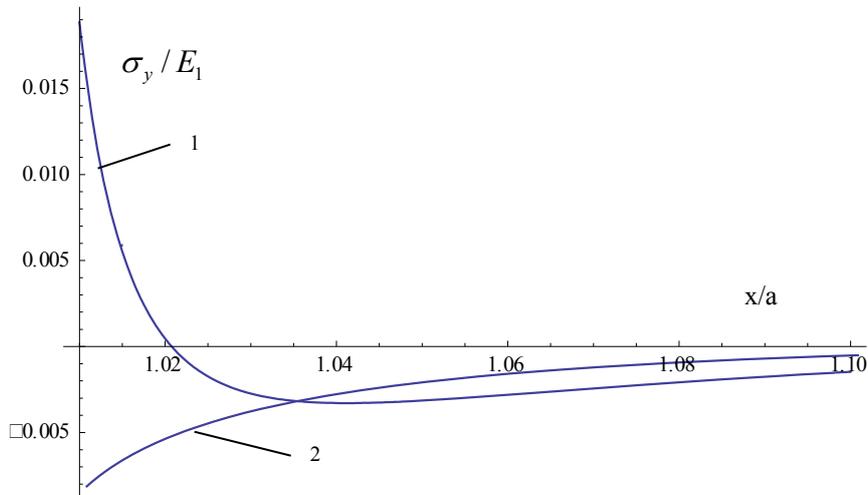
Напряжения на линии контакта имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y^{(1)}(at)}{E_2} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1(\xi_i) a_i}{t - \xi_i} \left(1 - \frac{q(t, \alpha, \beta)}{q(\xi_i, \alpha, \beta)} \right) - i\pi \sum_{i=1}^n \varphi_1(\xi_i) a_i K_{11}(\xi_i, t) - \\
&\quad - \pi \sum_{i=1}^n \varphi_1(\xi_i) a_i K_{12}(t, \xi_i) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1(\xi_i) \bar{a}_i}{t - \bar{\xi}_i} \left(1 - \frac{q(t, \bar{\alpha}, \bar{\beta})}{q(\bar{\xi}_i, \bar{\alpha}, \bar{\beta})} \right) - \\
&\quad - \pi \sum_{i=1}^n \varphi_2(\xi_i) \bar{a}_i K_{11}(t, \bar{\xi}_i) + \pi \sum_{i=1}^n \varphi_2(\xi_i) \bar{a}_i K_{12}(t, \bar{\xi}_i), (1 < t < \infty) \\
\frac{\tau_{xy}^{(1)}(at)}{E_2} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1(\xi_i) a_i}{\xi_i - t} \left(1 - \frac{q(t, \alpha, \beta)}{q(\xi_i, \alpha, \beta)} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_1(\xi_i) a_i K_{21}(t, \xi_i) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_1(\xi_i) a_i K_{22}(t, \xi_i) - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1(\xi_i) \bar{a}_i}{\bar{\xi}_i - t} \left(1 - \frac{q(t, \bar{\alpha}, \bar{\beta})}{q(\bar{\xi}_i, \bar{\alpha}, \bar{\beta})} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_2(\xi_i) \bar{a}_i K_{21}(t, \bar{\xi}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_2(\xi_i) \bar{a}_i K_{22}(t, \bar{\xi}_i), (1 < t < \infty);
\end{aligned} \tag{9}$$

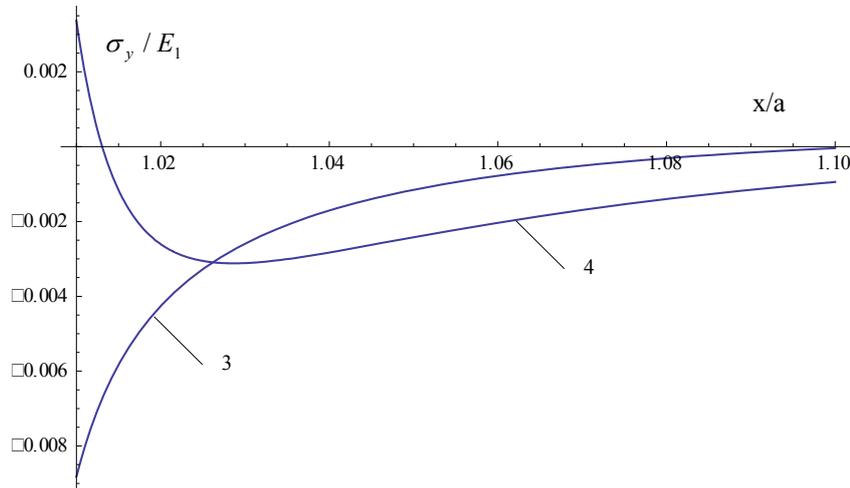
где

$$\begin{aligned}
q(t, \alpha, \beta) &= -\left(\frac{2}{t+1} \right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) \cdot (n+1, n+\beta+1, \\
&\quad 2n+\alpha+\beta+2, \frac{2}{1+t}), \quad \varphi_1(t) = u^{(1)}(t) + iv^{(1)}(t), \quad \varphi_2(t) = u^{(1)}(t) - iv^{(1)}(t)
\end{aligned}$$

Были проведены вычисления значений контактных напряжений σ_y для некоторых значений отношений модулей упругости полосы и плоскости (фиг.2,3) при $f(t) = 10^8 \text{ Па}$.



Фиг.2. Нормальные контактные напряжения при $E_2/E_1 = 0,1; 0,2$



Фиг.3. Нормальные контактные напряжения при $E_2/E_1 = 5,0; 10,0$

В таблице приведены значения коэффициентов особенности напряжений при тех же значениях отношения модулей упругости.

$$K(1) = \frac{2}{n + \alpha + \beta + 1} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i^*(\xi_i) P_n^{(\alpha, \beta)}(1)}{(1 - \xi_i) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)} \quad (10)$$

Таблица. Коэффициенты особенностей напряжений

E_2/E_1	0,1	0,2	5,0	10,0
$k \cdot 10^3$	19,38	10,34	74,80	309,80

Как видно из таблицы, контактные напряжения при той же степени неоднородности, когда более жёстким является материал полосы, на порядок больше, чем, когда более жёстким является материал полуплоскости.

Для коэффициента напряжений, как видно из (6), получено выражение известного типа. Более детальный расчёт зависимости контактных напряжений показывает, что основная уравновешивающая часть напряжений распределена более равномерно в однородном случае. При увеличении разномодульности напряжения больше концентрируются около особой точки, при этом, более сильно, когда увеличивается жёсткость материала полосы.

Заключение: Полученное решение даёт возможность легко оценить контактные напряжения, что нетрудно распространить на всю плоскость. При этом, авторы хотели бы особо отметить положительное значение квадратурных формул [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. О напряжённом состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. №1. С.131-137.
2. Cook N.S., Erdogan F. Stresses in bounded materials with a crack perpendicular to the interface. // Int.J.Eng. Sci.-1972-10, №8.-р.677-697.
3. Акопян В.Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин. //Доклады НАН Армении. 2002. Т.102. №1. С.29-34.
4. Ni L., Nemat-Nasser S. Interface cracks in anisotropic dissimilar materials: general case //Quarterly of Applied Mathematics. 1992. V.26. P.300-305.
5. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. //Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgia. Vol.156 (2011). Pp.101-111.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.

Сведения об авторах:

Саркисян Вардан Гарегинович – Кандидат техн.наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2

Телефон: 61-55-78

Хачикян Альберт Серобович – Кандидат физ.-мат.наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2

Телефон: 74-02-89.

Поступила в редакцию 20.08.2014