ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

УДК 517.977

ОБ УСЛОВИИ ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Барсегян Т.В.

Բանալի բառեր. էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային համակարգ, համակարգի շարժում, լրիվ ղեկավարելիություն, լրիվ ղեկավարելիություն պայման:

Ключевые слова: поэтапно меняющаяся линейная система, движение, вполне управляемость, условия вполне управляемости.

Keywords: stage by stage changing linear system, movement, full controllability, condition of full controllability.

Բարսեղյան Տ.Վ.
Էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային ստացիոնար համակարգերի լրիվ ղեկավարելիության պայմանի մասին

Դիտարկված է էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային դինամիկ համակարգերի ղեկավարման խնդիր: Ստացված է էտապ առ էտապ փոփոխվող գծային ստացիոնար համակարգերի լրիվ ղեկավարելիության պայման, որի ապահովման դեպքում համակարգը կամայական սկզբնական վիճակից կարելի է տեղափոխել կամայական վերջնական վիճակ համապատասխան ղեկավարող ազդեցությամբ:

Barseghyan T.V.
About condition of full controllability of stage by stage changing linear stationary system

The problem of control of stage by stage changing linear dynamic system is considered. The condition of full controllability of stage by stage changing linear stationary system is obtained, in which case the system can move from any initial state to any other final state with corresponded control action.

Рассмотрена задача управления поэтапно меняющимися линейными динамическими системами. Получено условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы, при выполнении которого систему из произвольно заданного начального состояния можно перевести в любое заданное конечное состояние с соответствующим управляющим воздействием.

Введение. Задачи управления динамических объектов на множестве состояний функционирования, т.е. когда изменяются параметры модели динамики, имеют важные теоретическое и прикладное значения. Математическая модель динамики управляемого объекта с изменением состояния функционирования в жёстко ограниченных временных интервалах приведена в [1].

Как в обычных задачах управления, так и в задачах управления поэтапно меняющимися динамическими системами, принципиальным является вопрос управляемости таких систем. Вопросы управляемости линейных динамических систем исследованы в работах [1-5].

В [6, 7] сформулированные теоремы дают необходимые и достаточные условия полной управляемости поэтапно меняющейся линейной нестационарной системы. Однако, практическое применение указанной теоремы, даже для стационарных систем, связано с необходимостью строить фундаментальные матрицы решения однородных частей системы, дифференциальных уравнений, что неудобно. Поэтому целесообразно получить условие полной управляемости системы, выраженное непосредственно через исходные данные системы (т.е. параметры системы).

В данной работе для задачи управления поэтапно меняющейся линейной стационарной системы получено условие вполне управляемости, при выполнении которого систему из произвольно заданного начального состояния можно перевести в любое заданное конечное состояние с соответствующим управляющим воздействием. Построена конкретная система, для которой выполняется полученное условие вполне управляемости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x + B_1(t)u & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ A_2(t)x + B_2(t)u & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ A_m(t)x + B_m(t)u & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B_k(t)$ $(\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{m})$ – матрицы параметров системы (модели объекта), $u(t)$ – управляющее воздействие, соответственно с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B_k(t) - (n \times r)$, $u(t) - (r \times 1)$. В общем случае предположим, что элементы матрицы функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Предполагается, что в заданные промежуточные моменты времени

$0 \le t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = T$

– конец движения предыдущего этапа – является началом следующего этапа, то есть в моменты времени t_k

$$x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k) \text{ при } (k = 1, ..., m-1). \tag{1.2}$$

Определение. Система (1.1), для которой конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых начальных $x(t_0) = x_0$ и конечных $x(T) = x_T$ состояний можно указать управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ такое, что решение $x(t)$, начиная из состояния $x(t_0)$ в момент времени $t = T$, удовлетворяет условию $x(T) = x_T$.

Теперь рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными стационарными дифференциальными уравнениями (стационарный случай системы (1.1)), т.е.

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x + B_1 u & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ A_2 x + B_2 u & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ A_m x + B_m u & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{1.3}$$

Вполне управляемая система (1.1) (или (1.3)) обладает тем свойством, что с помощью соответствующего допустимого управления её можно перевести из произвольного заданного начального состояния в заданное конечное состояние.

Требуется найти условия, при которых объект, описываемый системой (1.3), будет вполне управляемым.

Суждение о существовании решения задачи управления системы (1.3), целесообразно иметь, опираясь лишь на исходные данные задачи. Поэтому желательно иметь условия, позволяющие судить о существовании решения задачи управления (о вполне управляемости) по элементам матрицы A_k и B_k $(k = 1, \ldots, m)$.

2. Движение поэтапно меняющейся линейной системы. Следующая теорема определяет представление решения системы (1.1) с условиями (1.2).

Теорема 1. Для любых начальных значений $x(t_0) = x_0$ и допустимых управлений $u(t)$ существует решение $x(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее условиям $x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k)$, $(k = 1, ..., m-1)$ и для $t \in [t_{k-1}, t_k)$ представляется в виде

$$x(t) = V(t, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, \tau]u(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t} H_k[t, \tau]u(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

где

$$V(t, t_j) = X_k[t, t_{k-1}]V(t_{k-1}, t_j)$$

$$V(t_k, t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}], \quad (k = 1, ..., m;\ j = 0, ..., k-1) \tag{2.2}$$

$H_k[t, \tau] = X_k[t, \tau]B_k(\tau)$, а через $X_k[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части k -го уравнения системы (1.1).

Отметим, что согласно введённому обозначению, при $j = k - 1$ $V(t_k, t_{k-1}) = X_k[t_k, t_{k-1}]$, а при $j = k$ $V(t_k, t_k) = E$.

Доказательство. Формула (2.1) выведена в [6]. Поэтому здесь выводить не будем, а лишь непосредственной подстановкой убедимся, что решение системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ определяется формулой (2.1).

Пусть $t \in [t_{k-1}, t_k)$, дифференцируя обе части формулы (2.1), будем иметь:

$$\dot{x}(t) = \dot{V}(t, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} \dot{V}(t, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, \tau]u(\tau)d\tau + H_k[t, t]u(t) + \\ + \int_{t_{k-1}}^{t} \dot{H}_k[t, \tau]u(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

Учитывая, что

$$\dot{X}_k[t, t_{k-1}] = A_k(t)X_k[t, t_{k-1}]$$

$$H_k[t, t] = X_k[t, t]B_k(t) = B_k(t)$$

$$\dot{V}(t, t_0) = A_k(t)X_k[t, t_{k-1}]V(t_{k-1}, t_0) = A_k(t)V(t, t_0)$$

$$\dot{V}(t, t_j) = \dot{X}_k[t, t_{k-1}]V(t_{k-1}, t_j) = A_k(t)X_k[t, t_{k-1}]V(t_{k-1}, t_j) = A_k(t)V(t, t_j)$$

$$\dot{H}_k[t, \tau] = \dot{X}_k[t, \tau]B_k(\tau) = A_k(t)X_k[t, \tau]B_k(\tau) = A_k(t)H_k[t, \tau]$$

из формулы (2.3) получим

$$\dot{x}(t) = A_k(t)V(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} A_k(t)V(t,t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]u(\tau)d\tau + B_k(t)u(t) +$$

$$+\int_{t_{k-1}}^{t} A_k(t)H_k[t,\tau]u(\tau)d\tau = A_k(t)\left[V(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t,t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau]u(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. +\int_{t_{k-1}}^{t} H_k[t,\tau]u(\tau)d\tau\right] + B_k(t)u(t) = A_k(t)x + B_k(t)u(t)$$

Следовательно, решение (2.1) удовлетворяет уравнению (1.1) при $t \in [t_{k-1}, t_k)$. Кроме того, решение $x(t)$ (2.1) удовлетворяет начальному значению $x(t_0) = x_0$. Действительно, в случае $k = 1$ $t \in [t_0, t_1)$ при $t = t_0$ из формулы (2.1) имеем $x(t_0) = V(t_0,t_0)x(t_0) = x(t_0) = x_0$.

Справедливость теоремы доказана.

3. Условия вполне управляемости стационарной системы. Получим условия полной управляемости системы (1.3) с условиями (1.2), выраженные непосредственно через матрицы A_k и B_k $(k = 1,\dots,m)$.

Так как A_k – постоянная матрица, то нормированная фундаментальная матрица решений уравнений

$\dot{x} = A_k x \qquad t \in [t_{k-1}, t_k)$

имеет вид [3]

$X_k[t, t_{k-1}] = e^{A_k(t-t_{k-1})}$,

поэтому решение системы (1.3) для момента времени $t \in [t_{k-1}, t_k)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, согласно формулам (2.1) и (2.2), можно записать в виде

$$x(t) = V(t,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t,t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A_j(t_j-\tau)}B_j u(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t} e^{A_k(t-\tau)}B_k u(\tau)d\tau, \qquad (3.1)$$

где

$$V(t,t_j) = e^{A_k(t-t_{k-1})}V(t_{k-1},t_j)$$
$$V(t_k,t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} e^{A_{k-i}(t_{k-i}-t_{k-i-1})} \qquad k = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,k-1 \qquad (3.2)$$

Если управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ обеспечивает переход движения системы (1.3) к моменту времени $t = T$ в положение $x(T) = x_T$, то при $t = t_m = T$ (при $k = m$) из (3.1) с учётом (3.2) будем иметь:

$$x(T) = V(T,t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{m} V(T,t_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A_j t_j}e^{-A_j\tau}B_j u(\tau)d\tau. \qquad (3.3)$$

В теории матриц доказано, что матрица $e^{-A_j\tau}$ допускает представление

$$e^{-A_j\tau}=\sum_{i=0}^{p_j-1}\alpha_i^{(j)}(-\tau)A_j^i\ ,$$

где функции $\alpha_i^{(j)}(\tau)$ – коэффициенты интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра [4, 8] (скалярная функция) и функции $\alpha_i^{(j)}(\tau)$ $(i=0,\ldots,p_j-1)$, линейно независимы. А p_j – степень минимального многочлена матриц A_j $(j=1,\ldots,m)$. Числа p_j обусловлены кратностями собственных значений матрицы A_j. Очевидно, что $p_j\le n$ $(j=1,\ldots,m)$, где n – размерность вектора состояния.

В частном случае, когда все корни характеристического уравнения матрицы A_j являются простыми, имеем:

$$e^{-A_j\tau}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^{(j)}(-\tau)A_j^i\ . \tag{3.4}$$

Не углубляясь в теорию матриц, вопросы теории функции от матриц подробно изучены в работах [8], отметим лишь то, что матричная экспонента может быть представлена линейной комбинацией степеней этой матрицы.

Учитывая приведённое представление матрицы $e^{-A_j\tau}$, уравнение (3.3) представим в виде:

$$\sum_{j=1}^{m}V(T,t_j)e^{A_jt_j}\sum_{i=0}^{p_j-1}A_j^iB_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_i^{(j)}(-\tau)d\tau=x(T)-V(T,t_0)x(t_0)\,. \tag{3.5}$$

Вводя следующие обозначения:

$$L=x(T)-V(T,t_0)x(t_0)\,,\ C_j=V(T,t_j)e^{A_jt_j}\qquad j=1,\ldots,m\,, \tag{3.6}$$

формула (3.5) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{m}C_j\sum_{i=0}^{p_j-1}A_j^iB_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_i^{(j)}(-\tau)d\tau=L\ . \tag{3.7}$$

Запишем формулу (3.7) в виде

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}C_j\Bigg[&B_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_0^{(j)}(-\tau)d\tau+A_jB_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_1^{(j)}(-\tau)d\tau+\\&+\cdots+A_j^{p_j-1}B_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}u(\tau)\alpha_{p_j-1}^{(j)}(-\tau)d\tau\Bigg]=L.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Вводя следующие обозначения:

$$h_i^{(j)}(t)=\begin{cases}0 & \text{при }\ t_0\le t<t_{j-1}\\ \alpha_i^{(j)}(-t) & \text{при }\ t_{j-1}\le t<t_j \qquad\qquad i=0,1,\ldots,p_{j-1}\\ 0 & \text{при }\ t_j\le t\le T \qquad\qquad\ \ j=1,2,\ldots,m\end{cases}$$

равенство (3.8) запишется в виде:

$$\sum_{j=1}^{m} C_j \left[B_j \int_{t_0}^{T} u(t) h_0^{(j)}(t)dt + A_j B_j \int_{t_0}^{T} u(t) h_1^{(j)}(t)dt + \dots + A_j^{p_j-1} B_j \int_{t_0}^{T} u(t) h_{p_j-1}^{(j)}(t)dt \right] = L$$

Введём следующие обозначения:

$$U^{(j)} = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{T} u(t) h_0^{(j)}(t)dt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_{t_0}^{T} u(t) h_{p_j-1}^{(j)}(t)dt \end{pmatrix}, \quad K^{(j)} = C_j (B_j, A_j B_j, \dots, A_j^{p_j-1} B_j) \tag{3.9}$$

где вектор $U^{(j)}$ имеет размерность $(p_j r \times 1) = (q_j \times 1)$, а блочная матрица $K^{(j)}$ имеет размерность $(n \times p_j r) = (n \times q_j)$.

С помощью обозначения (3.9) уравнение (3.7) (или (3.8)) запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{m} K^{(j)} U^{(j)} = L . \tag{3.10}$$

Полученное матричное уравнение (3.10) запишем по строкам. Поскольку

$$K^{(j)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(j)} & \cdots & K_{1q_j}^{(j)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1}^{(j)} & \cdots & K_{nq_j}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad U^{(j)} = \begin{pmatrix} U_1^{(j)} \\ \vdots \\ U_{q_j}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$V(T,t_0) = \begin{pmatrix} V_{11}(T,t_0) & \cdots & V_{1n}(T,t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{n1}(T,t_0) & \cdots & V_{nn}(T,t_0) \end{pmatrix},$$

где $q_j = p_j r$, уравнения (3.10) с учётом (3.6) представятся в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} K_{11}^{(1)} U_1^{(1)} + \dots + K_{1q_1}^{(1)} U_{q_1}^{(1)} + \dots + K_{11}^{(m)} U_1^{(m)} + \dots + K_{1q_m}^{(m)} U_{q_m}^{(m)} = x_1(T) - \sum_{i=1}^{n} V_{1i}(T,t_0) x_i(t_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{n1}^{(1)} U_1^{(1)} + \dots + K_{nq_1}^{(1)} U_{q_1}^{(1)} + \dots + K_{n1}^{(m)} U_1^{(m)} + \dots + K_{nq_m}^{(m)} U_{q_m}^{(m)} = x_n(T) - \sum_{i=1}^{n} V_{ni}(T,t_0) x_i(t_0) \end{cases} \tag{3.11}$$

Пусть $q_j \geq n \quad (j = 1, \dots, m)$. Введём вектор-столбец приведённой системы уравнений (3.11) $K_i^{(j)} = (K_{1i}^{(j)}, K_{2i}^{(j)}, \dots, K_{ni}^{(j)})^T$ и

$$\tilde{x}(T)=\begin{pmatrix} x_1(T)-\sum_{i=1}^{n}V_{1i}(T,t_0)x_i(t_0) \\ \vdots \\ x_n(T)-\sum_{i=1}^{n}V_{ni}(T,t_0)x_i(t_0) \end{pmatrix}. \qquad (3.12)$$

Здесь и далее верхний индекс "T" означает операцию транспонирования.

Тогда, систему уравнений (3.11) можно записать так:

$$\tilde{x}(T)=\sum_{i=1}^{q_1}K_i^{(1)}U_i^{(1)}+\cdots+\sum_{i=1}^{q_m}K_i^{(m)}U_i^{(m)}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q_j}K_i^{(j)}U_i^{(j)}.$$

Таким образом, вектор $\tilde{x}(T)$ (3.12) (или произвольный вектор из R^n) представлен в виде линейной комбинации составляющих другого $\sum_{j=1}^{m}q_j$ -мерного вектора $U=(U_1^{(1)},\ldots,U_{q_1}^{(1)},\ldots,U_1^{(m)},\ldots,U_{q_m}^{(m)})^T$.

Для того, чтобы таким образом представить любой n-мерный вектор $\tilde{x}(T)$ (3.12), достаточно иметь n независимых векторов среди векторов $K_i^{(j)}$ $(i=1,\ldots,q_j;\ j=1,\ldots,m)$. А это означает, что ранг матрицы

$$\begin{aligned}\bar{K}&=(K^{(1)},\ldots,K^{(m)})=(K_1^{(1)},\ldots,K_{q_1}^{(1)},\ldots,K_1^{(m)},\ldots,K_{q_m}^{(m)})=\\ &=\{C_1(B_1,A_1B_1,\ldots,A_1^{p_1-1}B_1),\ldots,C_m(B_m,A_mB_m,\ldots,A_m^{p_m-1}B_m)\}\end{aligned} \qquad (3.13)$$

равен n. Размерность матрицы $\bar{K}$ равен $\left(n\times\sum_{j=1}^{m}q_j\right)$.

Так как $\sum_{j=1}^{m}q_j=\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\right)r\geq n$, то числа $U_1^{(j)},\ldots,U_{q_j}^{(j)}$ $(j=1,\ldots,m)$ определяются из (3.10) (или из (3.11)), вообще говоря, неоднозначно. Однако, их однозначность и не требуется. Важно, что эти числа существуют. Каждый их набор с помощью интегральных соотношений (3.9) определяет функции $u_1(t),\ldots,u_r(t)$.

В самом деле, пусть числа $U_1^{(j)},\ldots,U_{q_j}^{(j)}$ $(j=1,\ldots,m)$ каким-либо способом определены. Тогда интегральные равенства (3.9) можно рассматривать как моментные соотношения относительно функций $u_1(t),\ldots,u_r(t)$. При этом, следуя [4, 5], их можно разбить на группы. К первой группе относим моментные соотношения относительно функции $u_1(t)$. Ко второй – относительно $u_2(t)$ и т.д. Так как функции $\alpha_0^{(j)}(-t),\ldots,\alpha_{p_m-1}^{(j)}(-t)$ $(j=1,\ldots,m)$ (следовательно, и функции $h_0^{(j)}(t),\ldots,h_{p_m-1}^{(j)}(t)$) линейно независимы, первая группа этих соотношений определяет $u_1(t)$. По этой же причине из остальных соотношений последовательно находим $u_2(t),\ldots,u_r(t)$. Таким образом, если известны $U_1^{(j)},\ldots,U_{q_j}^{(j)}$ $(j=1,\ldots,m)$, то определение управления $u(t)$ всегда возможно [5].

Согласно обозначению (3.6), постоянные матрицы $C_j\ (j=1,\dots,m)$ с размерностями $n\times n$ имеют максимальный ранг, так как являются произведением фундаментальных матриц решения однородной части системы (1.3).

Поэтому ранг матрицы $\overline{K}$ (3.13) эквивалентен рангу матрицы

$K=\{B_1,A_1B_1,\dots,A_1^{p_1-1}B_1,\dots,B_m,A_mB_m,\dots,A_m^{p_m-1}B_m\}$.

Следовательно, полученный результат можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. Линейная стационарная система (1.3) вполне управляема на отрезке времени $t_0\le t\le T$ тогда и только тогда, когда матрица

$$K=\{B_1,A_1B_1,\dots,A_1^{p_1-1}B_1,\dots,B_m,A_mB_m,\dots,A_m^{p_m-1}B_m\} \qquad (3.14)$$

имеет ранг, равный n.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 не требуется, чтобы постоянные $U_1^{(j)},\dots,U_{q_j}^{(j)}$ $(j=1,\dots,m)$ определялись однозначно. Не нужно также, чтобы моментные соотношения (3.9) определяли вектор-функции $u(t)$ однозначно. Важно было установить лишь существование хотя бы одного управления, переводящего систему из одного заданного состояния x_0 в другое, также заданное состояние x_T.

Пусть система (1.3) такая, что все собственные значения матрицы A_j $(j=1,\dots,m)$ являются простыми, следовательно, имеет место формула (3.4). Тогда, согласно теореме 2, условия вполне управляемости можно сформулировать следующим образом.

Следствие. Если все собственные значения матрицы A_j $(j=1,\dots,m)$ являются простыми, то линейная стационарная система (1.3) вполне управляема на отрезке времени $t_0\le t\le T$ тогда и только тогда, когда матрица

$$K=\{B_1,A_1B_1,\dots,A_1^{n-1}B_1,\dots,B_m,A_mB_m,\dots,A_m^{n-1}B_m\} \qquad (3.15)$$

имеет ранг, равный n.

Замечание. Если вместо системы (1.3) рассматривать стационарную систему

$\dot{x}=Ax+Bu$, $t\in[t_0,T]$,

то для вполне управляемости этой системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$(B,AB,\dots,A^{n-1}B)$

был равен n [2-5], который также следует из теоремы 2 (или следствия).

4. Пример. Рассмотрим следующую поэтапно меняющуюся стационарную систему со скалярным управлением

$$\dot{x}=\begin{cases}A_1x+b^{(1)}u & \text{при } t\in[t_0,t_1)\\ A_2x+b^{(2)}u & \text{при } t\in[t_1,T]\end{cases}, \qquad (4.1)$$

где

$$x\in R^2,\ A_i=\begin{pmatrix}a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)}\\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)}\end{pmatrix},\ b_i=\begin{pmatrix}b_1^{(i)}\\ b_2^{(i)}\end{pmatrix}\ \ i=1,2$$

с промежуточным условием $x(t_1-0)=x(t_1+0)=x(t_1)$.

На отрезках времени $[t_0,t_1]$ и $[t_1,T]$ матрицы управляемости системы

$$\dot{x} = A_1 x + b^{(1)} u \text{ и } \dot{x} = A_2 x + b^{(2)} u \tag{4.2}$$

имеют вид:

$$K_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} & a_{11}^{(i)} b_1^{(i)} + a_{12}^{(i)} b_2^{(i)} \\ b_2^{(i)} & a_{21}^{(i)} b_1^{(i)} + a_{22}^{(i)} b_2^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1,2\,.$$

Предположим, что их ранги не равны двум. Это имеет место, в частности, при $a_{11}^{(i)} = a_{22}^{(i)} \neq 0$, $a_{12}^{(i)} = a_{21}^{(i)} = 0$, $b_j^{(i)} \neq 0$ $i = 1,2$; $j = 1,2$, так как в этом случае

$$\det K_i = (b_1^{(i)})^2 a_{21}^{(i)} - (b_2^{(i)})^2 a_{12}^{(i)} + b_1^{(i)} b_2^{(i)} (a_{22}^{(i)} - a_{11}^{(i)}) = 0\,.$$

Матрица управляемости системы (4.1) на отрезке времени $[t_0, T]$ согласно формуле (3.14) (теоремы 2) будет:

$$K = (b^{(1)}, A_1 b^{(1)}, b^{(2)}, A_2 b^{(2)})\,. \tag{4.3}$$

Чтобы система (4.1) на отрезке времени $[t_0, T]$ была вполне управляемой, согласно теореме 2, ранг матрицы управляемости (4.3) должен быть равен двум.

В частности, для системы (4.1) справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть выполнены следующие условия: $a_{11}^{(i)} = a_{22}^{(i)} \neq 0$, $a_{12}^{(i)} = a_{21}^{(i)} = 0$, $b_j^{(i)} \neq 0$ $i = 1,2$; $j = 1,2$. Тогда $\operatorname{rang} K_i \neq 2$ $(i = 1,2)$, а $\operatorname{rang} K = 2$, т.е. система (4.1) на отрезке времени $[t_0, T]$ вполне управляема.

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой, т.е. вычисляя ранги соответствующих матриц управляемости, получим, что ранги матриц K_1 и K_2 не равны двум, а ранг матрицы K равен двум.

Иллюстрирующим примером такой системы является

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 + 2u \end{cases} \quad \text{при } t \in [t_0, t_1) \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - u \end{cases} \quad \text{при } t \in [t_1, T], \tag{4.5}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\; b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\; b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы управляемости K_1, K_2, K имеют следующий вид:

$$K_1 = (b^{(1)},\, A_1 b^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\; K_2 = (b^{(2)},\, A_2 b^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$K = (b^{(1)},\, A_1 b^{(1)},\, b^{(2)},\, A_2 b^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что ранги матриц K_1 и K_2 не равны двум, а ранг матрицы K равен двум. Поэтому поэтапно меняющаяся система (4.4)-(4.5) на отрезке времени $[t_0, T]$, согласно теореме 2, вполне управляема.

Заключение. Доказана теорема, определяющая представление решения поэтапно меняющейся линейной нестационарной системы. Получено условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы, выраженное непосредственно через исходные параметры системы. Проведено сравнение с известным условием Калмана. Показано, что на отдельных отрезках времени не вполне управляемыми системами образованная поэтапно меняющаяся система может быть вполне управляемой на всем отрезке времени. Широкое практическое применение может иметь полученное условие вполне управляемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвейкин В.Г., Муромцев Д.Ю. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения. М.: Наука, 2007. 128 с.
2. Калман Р. Об общей теории систем управления. //Труды I Конгресса ИФАК. Т.2. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С.521-547.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
4. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.
5. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504с.
6. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems. //Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012. Vol. 22. № 1. Pp. 31-39.
7. Барсегян В.Р. Об одной задаче управления поэтапно меняющимися линейными динамическим системами. Аналитическая механика, устойчивость и управление. //Тр. X международной Четаевской конференции. Казань, 12-16 июня 2012. Т.3. Часть I. С.191-197.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560с.

Сведения об авторе:

Барсегян Тигран Ваняевич – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет
E-mail: t.barseghyan@mail.ru

Поступила в редакцию 19.03.2014