ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 68, №1, 2015 Механика

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО МИНИМАЛЬНОМУ ГАРАНТИРОВАННОМУ ВРЕМЕНИ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ

Аветисян В.В., Степанян В.С.

Բանալի բառեր. Երաշխավորված փնտրում, օպտիմալ ղեկավարում
Ключевые слова: гарантированный поиск, оптимальное управление
Keywords: guaranteed search, optimal control

Ավետիսյան Վ.Վ., Ստեփանյան Վ.Ս.
Հարթության մեջ շարժվող օբյեկտի օպտիմալ ըստ նվազագույն երաշխավորած ժամանակի փնտրումը

Դիտարկվում է հարթության մեջ արագությամբ ղեկակավարվող շարժական օբյեկտի օպտիմալ ըստ նվազագույն երաշխավորված ժամանակի փնտրման խնդիրը, երբ հայտնի է միայն, որ սկզբնական պահին որոնելի օբյեկտը գտնվում է տրված շրջանում: Որպես փնտրող է դիտարկվում եռաչափ տարածության մեջ արագությամբ ղեկավարվող օբյեկտը: Հայտնաբերումը՝ որոնելի օբյեկտի կոորդինատների որոշումն իրականացվում է շարժական կոնի հիմքի միջոցով, որի գագաթը կապված է փնտրող օբյեկտի ընթացիկ դիրքի հետ: Մշակվել է ղեկավարման ալգորիթմ, որի դեպքում որոնելի օբյեկտի երաշխավորված փնտրումն ավարտվում է նվազագույն ժամանակում:

Avetisyan V.V., Stepanyan V.S.
Time-optimi guaranteed search of mobile object in the plane

A problem of time-optimal guaranteed search of moving object with controllable speed in plane is observed, where in the initial moment only the circular of the sought object is known. The sought object is a object with controllable speed. The discovery, i.e. the identification of the precise coordinates of the object, is implemented through the moving information basis of the cone, the apex of which is connected to the current coordinates of the sough object. It is required to locate the object as quickly as possible. A control algorithm is proposed, in which r a guaranteed search of the sought object in minimal time is completed.

Рассматривается задача оптимального по минимальному гарантированному времени поиска подвижного объекта, совершающего управляемое по скорости движение на плоскости в предположении, что известен лишь круг, в котором в начальный момент находится искомый объект. Ищущим принимается объект, управляемый по скорости в трёхмерном пространстве. Поиск – определение координат искомого объекта осуществляется с помощью основания заданного конуса, вершина которого связана с текущим положением ищущего объекта. Разработан алгоритм управления, при котором гарантированный поиск искомого объекта завершается за минимальное время.

Введение. В задачах поиска целевых объектов, возникающих во многих областях, процесс поиска искомого объекта с последующим его обнаружением, ведётся с помощью информационной области, например, световой области, которую можно перемещать в «темном» пространстве поиска с целью освещения искомого объекта при его попадании в эту область. Описанная ситуация в данной работе моделируется с помощью следующей задачи [1,2]. Требуется построить управляемое по скорости пространственное движение ищущего объекта, который из заданного начального положения должен, совершив подходящий маневр, обнаружить целевой объект, совершающий управляемое по скорости движение на горизонтальной плоскости и начальное положение которого известно ищущему объекту с точностью до заданного круга неопределённости. При этом искомый объект считается обнаруженным в случае его попадания в круговое основание конуса, координаты вершины которого – суть текущие координаты ищущего объекта. Для решения этой задачи в [1,2] был предложен подход, состоящий в построении таких управлений, при которых круг обнаружения ищущего объекта за конечное время поглощает расширяющийся во времени круг неопределённости искомого объекта. Такой подход гарантирует успешный поиск, так как управление поиском строится с расчётом на движение искомого объекта в любом, в том числе наихудшем для ишушего объекта, направлении. Задача является многопараметрической и в отличие от [1,2], в которых исследованы случаи, связанные с некоторыми характерными соотношениями между геометрическими и физическими параметрами рассматриваемой поисковой системы, в данной работе исследуется случай, когда начальный радиус и скорость расширения круга обнаружения больше начального радиуса круга неопределённости искомого обьекта и его максимальной скорости, соответственно. Это приводит к расширению множества управлений ищущего объекта, гарантирующих обнаружение искомого объекта за конечное время. В построенном множестве гарантирующих управлений методами линейного программирования решена задача нахождения оптимального по минимальному гарантированному времени поиска управления. Основное отличие постановки задачи данной работы от постановок задач гарантированного поиска целевого объекта [3-11] состоит в том, что в [3-9] поиск ведётся внутри ограниченной области неопределённости искомого объекта, а в [10,11] поиск на плоскости начинается вне области неопределённости, однако в [10] обнаружение искомого объекта осуществляется с помощью круга постояннго радиуса, а в [8] – полуплоскости.

1. Описание поисковой системы и постановка задачи. Пусть имеются два точечных объекта X и Y, из которых X – ищущий, а Y – искомый. Оба объекта, обладая ограниченными линейными скоростями, имеют возможность в каждый момент времени произвольно изменять направление своих движений: X – в пространстве, а Y – на плоскости, согласно следующим уравнениям, ограничениям и начальным данным:

$$X:\ \dot{x} = u,\ \ x(0) = x^0,\ \ |u(t)| \le U,\ \ t \ge 0;\ \ \ x, u \in R^3, \tag{1.1}$$

$$Y:\ \dot{y} = \mathrm{v},\ \ y(0) = y^0,\ \ |\mathrm{v}(t)| \le V,\ \ t \ge 0;\ \ \ y, \mathrm{v} \in R^2. \tag{1.2}$$

В (1.1) и (1.2) x, y – векторы координат объектов; u, v – их управляющие вектор-скорости, которые являются кусочно-непрерывными функциями от t, $t \ge 0$; U, V – максимально возможные скорости объектов X, Y.

Положим, что в каждый момент времени $t \ge 0$ объекту X точно известны свои фазовые координаты и максимальная скорость объекта Y. О координатах Y объекту X известно лишь то, что в начальный момент времени $t = 0$ Y находится в заданном круге неопределённости

$$y^0 \in D_0 = \{ y \in R^2 :\ \ |y - y_c^0| \le r_0 \} \tag{1.3}$$

с центром в точке $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$ и радиусом r_0, которые также известны X.

Возможность установления точных координат искомого объекта Y осуществляется с помощью подвижной и изменяющейся во времени информационной области

$$G(x(t), C) = \left\{ \begin{matrix} \xi \in R^2 :\ |\xi(t) - x_c(t)| \le l(t) = C x_3(t),\ \ C = |\mathrm{tg}\alpha| \\ x_c(t) = (x_{c1}(t), x_{c2}(t)),\ \ \ 0 < |\alpha| < \pi/2 \end{matrix} \right\},\ \ t \ge 0, \tag{1.4}$$

$$G(x(0), C) = G(x_1(0), x_2(0), x_3(0), C) = G(x_c(0), l(0)) = G_0,$$

представляющая собой круговое (с центром $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$) основание некоторого конуса, вершина которого связана с текущим значением вектора положения X. В дальнейшем, в записи круга обнаружения $G(x(t), C)$ параметр C будем опускать.

При пространственном движении ищущего объекта эволюция информационного круга (1.4) на плоскости (x_1, x_2) при $t > 0$ определяется плоским движением его центра $x_c = (x_{c1}, x_{c2})$ с помощью управлений u_1, u_2 и расширением или сужением области (1.4) путем изменения расстояния x_3 объекта X до плоскости (x_1, x_2) с помощью управления u_3, т.е. изменением её радиуса $l = C x_3$ с помощью управления Cu_3: $\dot{l} = Cu_3$, $l_0 = l(0)$. При $u_3 > 0$ круг G (1.4) расширяется, а при $u_3 < 0$ сужается.

Пусть параметры y_{c1}^0, y_{c2}^0, r_0 и $x_{c1}^0, x_{c2}^0, x_3^0, C$ (или x_{c1}^0, x_{c2}^0, l_0) кругов неопределённости и обнаружения такие, что в начальный момент времени $t = 0$ выполняется условие

$$D_0 \cap G_0 = \varnothing. \tag{1.5}$$

Согласно (1.5), в начальный момент круг обнаружения находится вне круга неопределённости.

Скажем, что положение искомого объекта Y становится точно известным в момент времени $t^* > 0$, когда впервые выполняется условие обнаружения, т.е. условие его попадания в круг обнаружения

$$y(t^*) \in G(x(t^*)), \text{ т.е. } \left| y(t^*) - x_c(t^*) \right| \le l, \quad x_c = (x_{c1}, x_{c2}). \tag{1.6}$$

Так как на плоскости (x_1, x_2) область достижимости искомого объекта (1.2) с фиксированным начальным положением в момент времени $t > 0$ представляет собой круг, то в тот же момент времени областью неопределённости искомого объекта с начальным включением (1.3) также будет круг $D(t)$, $D(t) \supseteq D_0$ с центром в точке y_c^0 и с радиусом $r_0 + Vt$. Следовательно, условие обнаружения (1.6) гарантированно выполнимо, если существуют такой момент времени T и управление изменением круга обнаружения $u(t)$, $0 \le t \le T$, при которых выполняется включение

$$D(T) \subseteq G(x(T)). \tag{1.7}$$

Требуется найти такое управляемое движение объекта X, при котором условие поглощения (1.7) происходит за минимально возможное время T.

Для решения этой задачи сначала рассмотрим задачу 1 – задачу гарантированного поиска.

Задача 1. Для заданного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ и заданных начальных кругов обнаружения G_0 и неопределённости D_0, удовлетворяющих условию (1.5), найти число $T > 0$ и допустимое управление $u(t)$ объекта X на интервале $[0, T]$, для которых при любом начальном положении y^0

объекта Y в круге неопределённости D_0 (1.3) и любом допустимом управлении $\mathrm{v}(t)$ на интервале $[0, T]$ выполняется условие поглощения (1.7), т.е. гарантируется обнаружение (1.6) в некоторый момент времени $t^* > 0$, не позднее времени T: $t^* \le T$.

Для заданной начальной позиции $\{x^0, G_0, D_0\}$ (1.5) управление $u(t)$ – решение задачи 1 – назовём гарантирующим, а время T – гарантированным временем поиска или обнаружения.

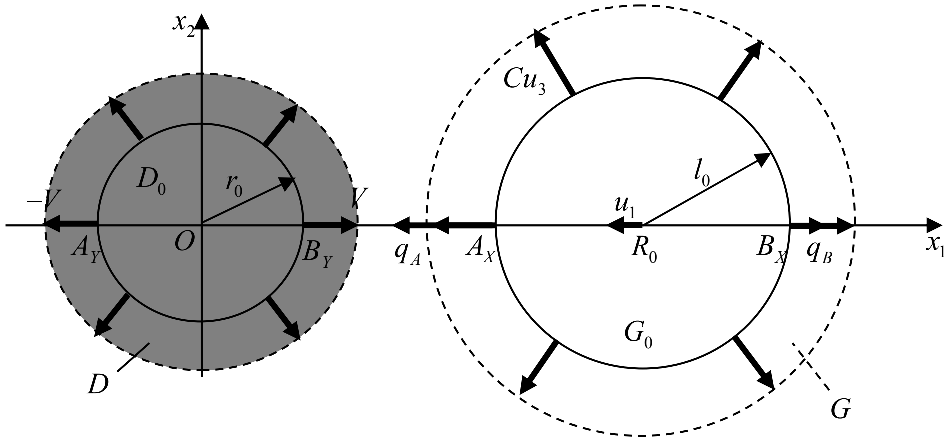
В зависимости от параметров $\{x^0, G_0, D_0, U, V\}$ исходной модели поисковой системы (1.1) - (1.5), задача 1 может иметь множество решений. Тогда для выделения единственного решения естественно наложить ещё требование оптимальности, например, времени поиска, т.е. рассмотреть задачу 2.

Задача 2. Для заданного начального положения $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3$ и заданного круга неопределённости D_0 найти гарантирующее управление $u(t)$, при котором гарантированное время обнаружения искомого объекта T минимально.

2. Методика построения управлений, гарантирующих обнаружение за конечное время. Переходя к решению задачи 1, не нарушая общности, положим, что центр $y_c^0 = (y_{c1}^0, y_{c2}^0) \in R^2$ круга неопределённости $D_0 \subset R^2$ искомого объекта Y совпадает с началом декартовой системы координат Ox_1x_2, а ищущий объект X в начальный момент времени $t = 0$, в соответствии с (1.5), находится в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x_1^0 = R_0$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = C^{-1}l_0$, $R_0 > 0$, т.е. центр круга обнаружения x_c^0 находится в точке $(R_0, 0)$ на оси Ox_1 (фиг. 1). Положим, что выполняются соотношения

$$R_0 > l_0 + r_0, \qquad l_0 > r_0, \tag{2.1}$$

которые полностью описывают начальное расположение (1.5) кругов D_0 и G_0.



Фиг. 1

Пусть $A_X(A_Y)$ и $B_X(B_Y)$ – соответственно, левая и правая точки пересечения круга обнаружения G_0 (круга неопределённости D_0) с осью Ox_1 (фиг.1). Для осуществления поглощения (1.7), в рамках метода экстремального прицеливания [12], X должен двигаться с такой скоростью $u=(u_1,u_2,u_3)$, чтобы точки круга обнаружения A_X и B_X перемещались вдоль оси Ox_1 (т.е. $u_2=0$). При этом, скорости точек A_X и B_X в их движении по оси Ox_1 будут, соответственно, $q_A=u_1-Cu_3$ и $q_B=u_1+Cu_3$. В соответствии с этим, необходимым и достаточным условием осуществления поглощения круга неопределённости кругом обнаружения является существование такого момента времени $T>0$ и управлений u_1,u_3 (1.1), при которых выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &q_A T+R_0-l_0\le -VT-r_0, \qquad q_A=u_1-Cu_3,\\ &q_B T+R_0+l_0\ge VT+r_0, \qquad q_B=u_1+Cu_3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

Запишем систему (2.2) в виде:

$$R_0-l_0+r_0\le(-u_1+Cu_3-V)T\,, \tag{2.3}$$

$$R_0+l_0-r_0\ge(-u_1-Cu_3+V)T\,. \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) следует, что если для заданных параметров R_0,r_0,l_0 (2.1) и U,V,C относительно u_1,u_3 выполняется система неравенств

$$-u_1+Cu_3-V>0\,,\quad -u_1-Cu_3+V\le 0\,,\quad u_1^2+u_3^2\le U^2\,, \tag{2.5}$$

то условие поглощения (система соотношений (2.3), (2.4)) имеет место при любом $T\in[T^-,+\infty)$, где найденная из (2.3) величина

$$T^-=\frac{R_0-l_0+r_0}{-u_1+Cu_3-V}>0 \tag{2.6}$$

– это момент, начиная с которого точка A_X оказывается левее от левой точки A_Y.

Если для заданных параметров R_0,r_0,l_0 (2.1) и U,V,C относительно u_1,u_3 выполняется система неравенств

$$-u_1+Cu_3-V>0\,,\quad -u_1-Cu_3+V>0\,,\quad u_1^2+u_3^2\le U^2\,, \tag{2.7}$$

то из (2.4) можно определить и конечный момент времени

$$T^+=\frac{R_0+l_0-r_0}{-u_1-Cu_3+V}>0\,,$$

при котором B_Y пока ещё находится не правее от точки B_X.

Если при параметрах R_0,r_0,l_0 (2.1) и U,V,C (2.7) выполняется также неравенство $T^-\le T^+$, которое после несложных преобразований приобретает вид

$$R_0(Cu_3-V)\ge(l_0-r_0)u_1\,, \tag{2.8}$$

то система (2.3), (2.4), а значит, условие поглощения (1.7) имеет место при любом $T \in [T^-, T^+]$.

В обоих случаях ((2.5) и (2.7)-(2.8)) время T^- (2.6) является первым моментом поглощения, т.е. гарантированным временем поиска или обнаружения..

Учитывая (2.5) и (2.7)-(2.8), для заданных параметров R_0, r_0, l_0 (2.1) и U, V, C рассмотрим область

$$H = \bigcup_{i=1}^{3} H_i\,, \tag{2.9}$$

где

$$H_1 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{ll} -u_1 + Cu_3 - V > 0, & \\ -u_1 - Cu_3 + V \le 0, & \end{array} u_1^2 + u_3^2 \le U^2 \right\}, \tag{2.10}$$

$$H_2 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{ll} -u_1 + Cu_3 - V > 0, & R_0(Cu_3 - V) \ge (l_0 - r_0)u_1 \\ -u_1 - Cu_3 + V > 0, & Cu_3 - V \ge 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \le U^2 \end{array} \right\}, \tag{2.11}$$

$$H_3 = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \begin{array}{ll} -u_1 + Cu_3 - V > 0, & R_0(Cu_3 - V) \ge (l_0 - r_0)u_1 \\ -u_1 - Cu_3 + V > 0, & Cu_3 - V < 0, \quad u_1^2 + u_3^2 \le U^2 \end{array} \right\}. \tag{2.12}$$

Области $H_i,\ i = 1, 2, 3$ (фиг.2) – выпуклые, так как представляют собой части круга, ограниченные дугами и двумя отрезками, соединяющими концы $u^P(u_1^P, u_3^P), u^K(u_1^K, u_3^K)$; $u^N(u_1^N, u_3^N), u^P(u_1^P, u_3^P)$; $u^M(u_1^M, u_3^M), u^N(u_1^N, u_3^N)$ дуг $u^P u^K$; $u^N u^P$; $u^M u^N$, соответственно, с внутренней точкой $u^Q(u_1^Q, u_3^Q)$ круга. На фиг.2 горизонтальными отрезками заштрихована область H_1, вертикальными – области H_2 и H_3, угловые вершины u^P, u^Q, u^K, u^N, u^M которых имеют следующие координаты:

$$u_1^P = \frac{V - C\sqrt{(1 + C^2)U^2 - V^2}}{1 + C^2} < 0\,, \quad u_3^P = \left[U^2 - \left(u_1^P\right)^2 \right]^{1/2} > 0 \tag{2.13}$$

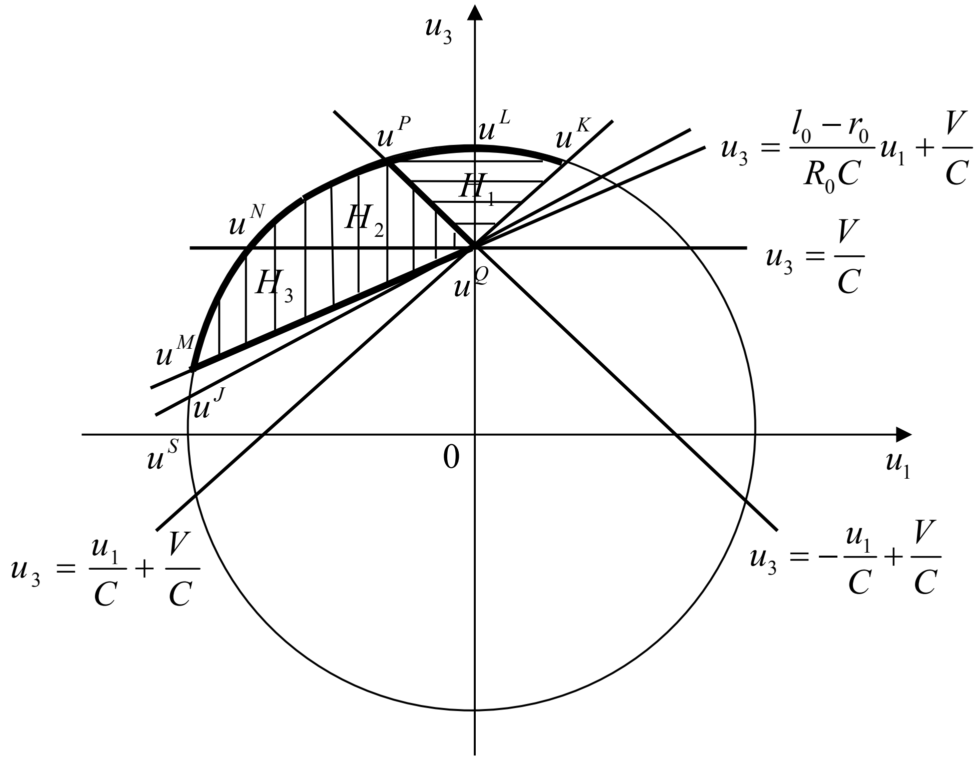
$$u_1^Q = 0\,, \quad u_3^Q = \frac{V}{C} > 0\,, \tag{2.14}$$

$$u_1^N = \left[U^2 - \left(u_3^N\right)^2 \right]^{1/2} > 0\,, \quad u_3^N = \frac{V}{C} > 0\,, \tag{2.15}$$

$$u_1^K = \frac{V + C\sqrt{(1 + C^2)U^2 - V^2}}{1 + C^2} > 0\,, \quad u_3^K = \left[U^2 - \left(u_1^K\right)^2 \right]^{1/2} > 0 \tag{2.16}$$

$$u_1^M(R_0) = \frac{-[(l_0 - r_0)/R_0]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2} < 0\,, \tag{2.17}$$

$$u_3^M(R_0) = \frac{CV - [(l_0 - r_0)/R_0]\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2}.$$

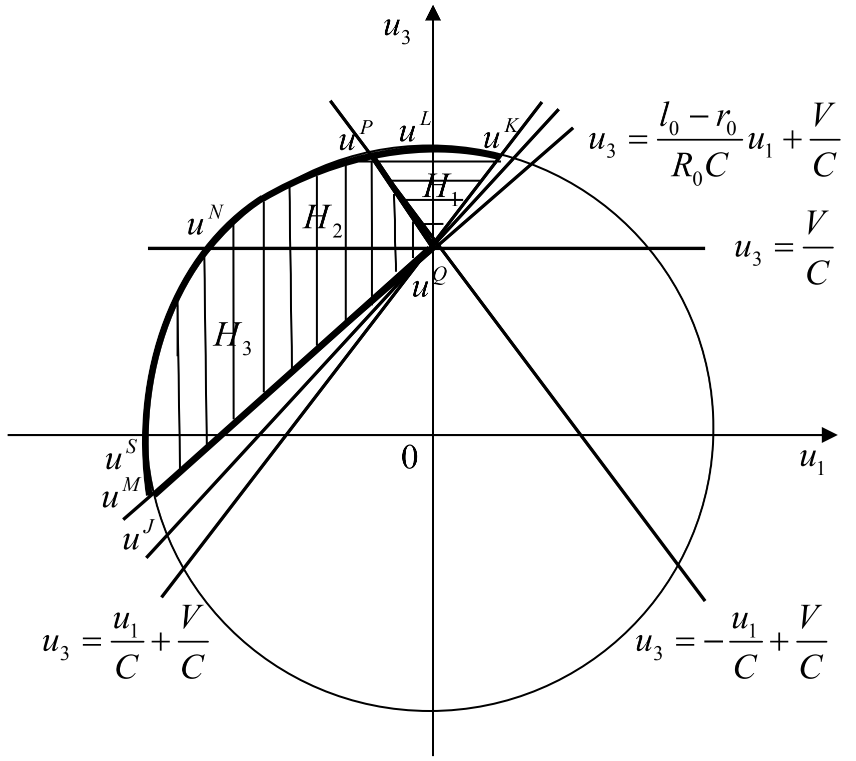


Фиг. 2

Как следует из (2.12) – (2.17) и фиг.2, где $u^S = (-U, 0)$ и $u^L = (0, U)$, при $R_0 \to \infty$ линия $u^M(R_0)u^Q$ вращается вокруг точки u^Q по часовой стрелке и стремится к положению $u^N u^Q$ (координата $u_1^M(R_0)(u_3^M(R_0)) \to u_1^N(u_3^N)$. При $R_0 \to l_0 + r_0$ линия $u^M(R_0)u^Q$ вокруг точки u^Q вращается против часовой стрелки и стремится к положению линии $u^J u^Q$ (координата $u_1^M(R_0)(u_3^M(R_0)) \to u_1^J(u_3^J)$, где координаты точки u^J – точки пересечения прямой $u^M(R_0)u^Q$ с окружностью $u_1^2 + u_3^2 = U^2$ при $R_0 = l_0 + r_0$ определяются таким образом:

$$u_1^J = \frac{-[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2} < 0,$$

$$u_3^J = \frac{CV - [(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/(l_0 + r_0)]^2 + C^2}. \quad (2.18)$$



Фиг. 3

Отметим, что знак координаты u_3^J (2.18) зависит от параметров задачи следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&u_3^J > 0, \quad \text{если} \quad V > \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U \qquad (a)\\
&u_3^J \le 0, \quad \text{если} \quad \frac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0} U \ge V \qquad (b)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Случаю (2.19)(*a*) соответствует фиг.2, а случаю (2.19)(*b*) – фиг.3.

Из (2.10)-(2.12), с учётом (2.13)-(2.19), следует, что области H_1 и H_2 не зависят от параметра R_0, а область H_3 зависит. Поэтому, изменение области H от параметра R_0 следующее:

$$
\begin{aligned}
&H(R_0) \to H_1 \cup H_2 \quad \text{при} \quad R_0 \to \infty, \\
&H(R_0) \to H_3^J \cup H_2 \cup H_1 \quad \text{при} \quad R_0 \to l_0 + r_0,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

где

$$H_3^J = \left\{ (u_1, u_3) \in R^2 : \ u_1^J \le u_1 \le u_1^Q, \ u_3^J \le u_1 < u_3^N = u_3^Q, \ u_1^2 + u_1^2 \le U^2 \right\}.$$

Двигаясь при управлении $u = (u_1, 0, u_3)$, где $(u_1, u_3) \in H$ (2.9), объект X

обнаруживает Y не позже момента времени $T^{-}(u_1,u_3)$ (2.6). Причём, если $(u_1,u_3)\in H_1$, то $0<T^{-}<T^{+}=\infty$, а если $(u_1,u_3)\in H_2$, то $0<T^{-}\le T^{+}<\infty$.

Область H (2.9) назовём областью гарантирующих управлений, $u=(u_1,0,u_3)$ – управление, гарантирующее поиск за конечное время, а соответствующий момент первого поглощения $T^{-}(u_1,u_3)$ (2.6) – гарантированным временем поиска.

Из (2.10)-(2.12) следует, что $H_i\ne\varnothing,\ i=1,2,3$ в том и только в том случае, когда

$$CU>V\,. \tag{2.21}$$

Некоторые частные случаи, связанные с различными соотношениями между величинами CU и V, а также параметрами r_0 и l_0, были исследованы в [1,2].

3. Нахождение оптимальных гарантирующих управлений. Перейдём к решению задачи 2 – нахождению в области (2.9) гарантирующих управлений, доставляющих минимум гарантированному времени поиска (2.6):

$$T^{\min}=\min_{(u_1,u_3)\in H}T^{-}(u_1,u_3)=\min_{(u_1,u_3)\in H}\left(\frac{R_0-l_0+r_0}{-u_1+Cu_3-V}\right). \tag{3.1}$$

Задача (3.1) равносильна задаче

$$\varphi(u_1,u_3)=-u_1+Cu_3\to\max\,,\quad (u_1,u_3)\in H\,. \tag{3.2}$$

Так как в (3.2) $\operatorname{grad}\varphi(u_1,u_3)=(-1,C),\ C>0$, то максимум в (3.2), а значит, минимум в (3.1) достигается в одной из точек части $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$ дуговой границы $\overset{\frown}{u^M u^K}$ области H:

$$\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}=\left\{(u_1,u_3):\ u_1^M(R_0)\le u_1<0,\ u_3^M(R_0)\le u_3<U,\ u_1^2+u_3^2=U^2\right\} \tag{3.3}$$

и представляет собой объединение дуг $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^N}$, $\overset{\frown}{u^N u^P}$, $\overset{\frown}{u^P u^L}$:

$$\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}=\overset{\frown}{u^M(R_0)u^N}\cup\overset{\frown}{u^N u^P}\cup\overset{\frown}{u^P u^L}\,, \tag{3.4}$$

где

$$\overset{\frown}{u^M(R_0)u^N}=\left\{(u_1,u_3):u_1^M(R_0)\le u_1<u_1^N;u_3^M(R_0)<u_3<u_3^N;u_1^2+u_3^2=U^2\right\} \tag{3.5}$$

$$\overset{\frown}{u^N u^P}=\left\{(u_1,u_3):\quad u_1^N\le u_1<u_1^P,\ \ u_3^N\le u_3<u_3^P,\quad u_1^2+u_3^2=U^2\right\} \tag{3.6}$$

$$\overset{\frown}{u^P u^L}=\left\{(u_1,u_3):\quad u_1^P\le u_1<0,\ \ u_3^P\le u_3<U,\quad u_1^2+u_3^2=U^2\right\} \tag{3.7}$$

$$u^L=(u_1^L,u_3^L),\quad u_1^L=0,\quad u_3^L=U$$

Таким образом, в соответствии с вышесказанным, задача (3.1) сведена к задаче отыскания максимума функции $\varphi(u_1,u_3)=-u_1+Cu_3$ на дуге $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$:

$$\varphi(u_1,u_3) = -u_1 + Cu_3 \to \max\,, \quad (u_1,u_3) \in \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}\,. \tag{3.8}$$

Зависимость дуги $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$ от R_0, аналогично (2.20), следующая: $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L} \to \overset{\frown}{u^N u^L}$ при $R_0 \to \infty$; $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L} \to \overset{\frown}{u^J u^L}$ при $R_0 \to l_0 + r_0$ и, поэтому, имеют место включения:

$$\overset{\frown}{u^J u^L} \subset \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L} \subset \overset{\frown}{u^N u^L}\,, \qquad l_0 + r_0 < R_0 < \infty\,, \tag{3.9}$$

где

$$\overset{\frown}{u^J u^L} = \left\{ (u_1,u_3):\quad u_1^J \le u_1 < 0,\quad u_3^J \le u_3 < U,\quad u_1^2 + u_3^2 = U^2 \right\}. \tag{3.10}$$

Отметим, что, если выполняются соотношения (2.19)(a), то

$$\overset{\frown}{u^J u^L} \subset \overset{\frown}{u^S u^L}\,, \tag{3.11)(a}$$

а, если выполняются соотношения (2.19)(b), то, наоборот,

$$\overset{\frown}{u^J u^L} \supset \overset{\frown}{u^S u^L}\,, \tag{3.11)(b}$$

где

$$\overset{\frown}{u^S u^L} = \left\{ (u_1,u_3):\quad -U < u_1 < 0,\quad 0 < u_3 < U,\quad u_1^2 + u_3^2 = U^2 \right\}. \tag{3.12}$$

Функция $\varphi(u_1,u_3) = -u_1 + Cu_3$ максимального значения на окружности $u_1^2 + u_3^2 = U^2$ достигает в точке

$$u^* = (u_1^*, u_3^*)\,, \tag{3.13}$$

$$u_1^* = -\frac{U}{\sqrt{1+C^2}}\,, \quad u_3^* = \frac{CU}{\sqrt{1+C^2}}\,, \quad C > 0\,,$$

которая, с учётом вышесказанного, находится на дуге $\overset{\frown}{u^S u^L}$ (3.12).

Поскольку, с учётом (3.8)-(3.11),

$$\overset{\frown}{u^S u^L} = \overset{\frown}{u^S u^M(R_0)} \cup \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}\,, \tag{3.14}$$

где

$$\overset{\frown}{u^S u^M(R_0)} = \left\{ (u_1,u_3):\ -U < u_1 \le u_1^M,\ \ 0 < u_3 \le u_3^M,\ \ u_1^2 + u_3^2 = U^2 \right\},$$

а $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$ определяется согласно (3.3), (3.4), то в зависимости от параметров задачи R_0, U, V, C точка (3.13) либо принадлежит дуге $\overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}$ (3.3),

$$u^* \in \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L}\,, \tag{3.15}$$

либо находится вне этой дуги – на дуге $\overset{\frown}{u^S u^M(R_0)}$ (3.14) :

$$u^* \in \overset{\frown}{u^S u^M(R_0)} = \overset{\frown}{u^S u^L} \setminus \overset{\frown}{u^M(R_0)u^L} \ . \tag{3.16}$$

В случае (3.15) точка (3.13) является оптимальной в задаче (3.1): $u^{\min} \equiv u^*$, а в случае (3.16) оптимальной является конечная точка $u^M(R_0)$ дуги $\overset{\frown}{u^S u^M(R_0)}$:

$$u^{\min} = u^M(R_0), \tag{3.17}$$

т.е.

$$u_1^{\min} = u_1^M(R_0) = \frac{-[(l_0 - r_0)/R_0]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2}$$

$$u_3^{\min} = u_3^M(R_0) = \frac{CV - [(l_0 - r_0)/R_0]\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2}$$

Перейдём к нахождению условий для параметров задачи, при которых выполняется одно из включений (3.15) или (3.16).

После проведённого исследования с использованием формул (2.13) – (2.20) и представлений (3.4)-(3.7), (3.14), для случаев $C > 1$ и $C \le 1$ получены следующие результаты:

1. $u^* \in \overset{\frown}{u^P u^L}$, (3.18)

при

$$\frac{C^2 - 1}{\sqrt{1 + C^2}} U \ge V, \quad C > 1 \tag{3.19}$$

для любого $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$,

2. $u^* \in \overset{\frown}{u^N u^P}$, (3.20)

при

$$\frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U \ge V > \frac{C^2 - 1}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad C > 1 \tag{3.21}$$

или

$$\frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U \ge V > 0, \quad 0 < C \le 1 \tag{3.22}$$

для любого $R_0 \in (l_0 + r_0, \infty)$,

3. $u^* \in \overset{\frown}{u^S u^M(R_0) u^N}$, (3.23)

при

$$CU \ge V > \frac{C^2}{\sqrt{1 + C^2}} U, \quad C > 0 \tag{3.24}$$

для любого $R_0 \in (l_0 + r_0,\, \infty)$.

Более подробно остановимся на третьем случае (3.23), (3.24).

А) Пусть выполняются (2.19)(a), (3.11)(a). Так как, в этом случае

$$\overset{\frown}{u^S u^M (R_0) u^N} = \overset{\frown}{u^S u^J} \cup \overset{\frown}{u^J u^M (R_0) u^N}\,,$$

то из (3.23) следует, что

$$u^* \in \overset{\frown}{u^S u^J}\ (1) \quad \text{или} \quad u^* \in \overset{\frown}{u^J u^M (R_0) u^N}\ (2). \tag{3.25}$$

В случае (3.25) (1), оптимальной в задаче (3.1) является точка $u^M (R_0)$ для всех $R_0 \in (l_0 + r_0,\, \infty)$.

В случае (3.25) (2), для нахождения оптимальной точки определим то значение параметра $R_0 \in (l_0 + r_0,\, \infty)$, при котором имеет место совпадение точек $u^M (R_0)$ (2.18) и u^* (3.13): $u^M (R_0) = u^*$. В рассматриваемом случае обе эти точки находятся на дуге $\overset{\frown}{u^S u^L}$ окружности (3.11), поэтому достаточно приравнять первые координаты (2.17) и (3.13) точек $u^M (R_0)$ и u^*, соответственно, и разрешить полученное уравнение

$$u_1^M (R_0) = u_1^* \tag{3.26}$$

или в явном виде уравнение

$$\frac{-[(l_0 - r_0)/R_0]V - C\sqrt{\{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2\}U^2 - V^2}}{[(l_0 - r_0)/R_0]^2 + C^2} = -\frac{U}{\sqrt{1+C^2}}$$

относительно R_0. Последнее после несложных преобразований приводится к следующему квадратному уравнению относительно $R_0 \in (r_0 + l_0,\, \infty)$

$$[V^2(1+C^2) - C^4U^2]R_0^2 - 2UV\sqrt{1+C^2}\,(l_0 - r_0)R_0 + (l_0 - r_0)^2U^2 = 0\,. \tag{3.27}$$

Так как в соответствии с (3.24) коэффициент у главного члена в (3.27) положительный, то это уравнение имеет два положительных корня, из которых условию равенства вторых координат точек $u^M (R_0)$ и u^* удовлетворяет наибольший корень

$$R_0^* = \frac{U(l_0 - r_0)}{V\sqrt{1+C^2} - C^2U}\,, \quad r_0 + l_0 < R_0^* < \infty\,. \tag{3.28}$$

Таким образом, получаем

$$u^* \in \overset{\frown}{u^J u^M (R_0)}\,,\ R_0^* < R_0 < \infty \quad \text{и} \quad u^* \in \overset{\frown}{u^M (R_0) u^N}\,,\ l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*\,. \tag{3.29}$$

В) Пусть теперь выполняются (2.19)(b), (3.11)(b). Тогда по аналогии со случаем А) (3.25)(2) получаем

$$u^* \in \overset{\frown}{u^S u^M (R_0)}\,,\ R_0^* < R_0 < \infty \quad \text{и} \quad u^* \in \overset{\frown}{u^M (R_0) u^N}\,,\ l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*\,, \tag{3.30}$$

где R_0^* определяется формулой (3.28).

Подытожив результаты (3.18) – (3.30), в итоге, для рассмотренных возможных случаев 1–3, получаем, что минимальное гарантированное время $T^{\min} = T^-(u_1^{\min}, u_3^{\min})$ в задаче (3.1) вычисляется при следующих оптимальных гарантирующих управлениях $u_1^{\min}, u_3^{\min}$:

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^* \quad \text{при} \quad l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \quad \text{если} \quad V \in \left(0,\, \dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U\right], \end{cases} \tag{3.31}$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^* & \text{при} \quad l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*, \\ & \text{если} \quad V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\ CU\right] \cap \left(0,\ \dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U\right], \\ u_{1,3}^M(R_0) & \text{при} \quad R_0^* < R_0 < \infty, \\ & \text{если} \quad V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\ CU\right] \cap \left(0,\ \dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U\right], \end{cases} \tag{3.32}$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^M(R_0) & \text{при} \quad l_0 + r_0 < R_0 < \infty, \quad \text{если} \quad u_3^J \ge u_3^* \\ & \text{и} \quad V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\ CU\right] \cap \left(\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U,\ \infty\right), \end{cases} \tag{3.33}$$

$$u_{1,3}^{\min} = \begin{cases} u_{1,3}^* & \text{при} \quad l_0 + r_0 < R_0 \le R_0^*, \quad \text{если} \quad u_3^* > u_3^J \\ & \text{и} \quad V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\ CU\right] \cap \left(\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U,\ \infty\right), \\ u_{1,3}^M(R_0) & \text{при} \quad R_0^* < R_0 < \infty, \quad \text{если} \quad u_3^* > u_3^J \\ & \text{если} \quad V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\ CU\right] \cap \left(\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U,\ \infty\right), \end{cases} \tag{3.34}$$

в которых $u_1^M(R_0), u_3^M(R_0)$, u_3^*, R_0^* и u_3^J определяются уже известными соотношениями (2.17), (3.13), (3.28), (2.18) соответственно.

Расчёт оптимальных гарантирующих управлений (3.31)-(3.34) производится по следующей последовательности.

1. При заданных параметрах R_0, l_0, r_0 и U, V, C удовлеторяющих (2.1) и (2.21) соответственно, вычисляются величины $\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U$ и $\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U$.

2. Если максимальная скорость искомого объекта $V \in \left(0, \dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U\right]$, то согласно (3.31), управление объекта X, определяемое формулой (3.10), обеспечивает обнаружение искомого объекта за минимальное гарантированное время $T^{\min} = T^{-}(u_1^*, u_3^*)$ (2.6) при любом начальном расстоянии $R_0 \in (r_0 + l_0, \infty)$ между центрами кругов неопределённости D_0 и обнаружения G_0.

3. Если максимальная скорость искомого объекта Y удовлетворяет включению $V \in \left(0, \dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U\right] \cap \left(0, \dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U\right]$, то согласно (3.32), существует контрольное начальное расстояние R_0^*, вычисляемое по формуле (2.28), такое, что для любого $R_0 \in (r_0 + l_0, R_0^*]$ оптимальные гарантирующие управляющие скорости прямолинейного перемещения и расширения круга обнаружения неизменны и вновь вычисляются с помощью (3.13): $u_1^{\min} = u_1^*$, $u_3^{\min} = u_3^*$. А для $R_0 \in (R_0^*, \infty)$ оптимальные гарантирующие управляющие скорости вычисляются по формуле (3.17). Причём, с увеличением начального расстояния R_0 модуль постоянной скорости прямолинейного перемещения центра круга обнаружения $u_1^{\min} = u_1(R_0)$ уменьшается, а постоянная скорость $u_3^{\min} = \sqrt{U^2 - (u_1(R_0))^2}$ расширения круга обнаружения, наоборот, увеличивается.

4. Если максимальная скорость искомого объекта Y удовлетворяет включению $V \in \left(\dfrac{C^2}{\sqrt{1+C^2}}U,\ CU\right] \cap \left(\dfrac{l_0 - r_0}{l_0 + r_0}U, \infty\right)$, то согласно (3.33), (3.34), оптимальные гарантирующие управляющие скорости определяются в зависимости от взаимного расположения точек u^J (2.18) и u^* (3.13) на дуге $\widehat{u^S u^N}$. Так, если $u_3^J > u_3^*$, то $u^{\min} = u^M(R_0)$ для всех $R_0 \in (r_0 + l_0, \infty)$ – (3.33), а если $u_3^J < u_3^*$, то в (3.34) оптимальные гарантирующие управления определяются тем же способом, как и в (3.32).

Заключение. В многопараметрической задаче поиска подвижного объекта предложен и обоснован конструктивный алгоритм управления, оптимальное по минимальному гарантированному времени поиска. Полученные в явном виде формулы (3.31)-(3.34) и (3.1) позволяют вычислить оптимальное гарантирующее управление и соответствующее минимальное время гарантированного поиска в зависимости от начального расстояния между центрами круга обнаружения ищущего и круга неопределённости искомого объектов. Изложенный алгоритм, в силу простоты и доступности, удобно применять в различных поисковых системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальное гарантирующее управление поиском движущегося на плоскости целевого объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С.3-9.
2. Аветисян В.В. Оптимизация гарантирующего управления поиском подвижного объекта // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 2. С.68-78.
3. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Вып.1. С.3-12.
4. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Вып. 4. № 1. С.827-862.
5. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. Гарантированное управление поиском подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С.58-66.
6. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С.31-39.
7. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск неподвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С.62-69.
8. Аветисян В.В. Управление поиском неподвижного объекта с целью захвата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 6. С.160-168.
9. Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. Гарантированный поиск целевого объекта электромеханической системой при минимальных световых энергозатратах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 5. С.151-164.
10. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: 1987. 76с.
11. Меликян А.А. Задача оптимального быстродействия с поиском целевой точки // ПММ. 1990. Т.54. Вып. 1. С.3-11.
12. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи поиска и управления. М.: Наука, 1978. 270с.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович – д.ф.-м.н., профессор факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 94) 44 95 60;
E–mail: vanavet@yahoo.com

Степанян Ваан Сейранович – аспирант факультета математики и механики ЕГУ,
Тел.: (+374 98) 900846;
E-mail: nop144d@gmail.com

Поступила в редакцию 01.12.2014