

УДК 539.3

**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ В  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ  
ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ**

**Джилавян С.А., Казарян А.А.**

**Բանալի բառեր.** դիֆրակցիա, ալիքային դաշտ, պիեզոէլեկտրիկ, մետաղական շերտ, դիէլեկտրիկ, կիսաանվերջ շերտ, մակերևութային ալիք:

**Ключевые слова:** дифракция, волновое поле, пьезоэлектрик, металлический слой, диэлектрик, полубесконечный слой, поверхностная волна.

**Key words:** diffraction, wave field, piezoelectric, metallic layer, dielectric, semi-infinite layer, surface wave.

**Ջիլավյան Ս.Հ., Դազարյան Հ.Ա.**

**Պիեզոէլեկտրական կիսատարածությունում սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիան դիէլեկտրիկ կիսատարածությունում առկա կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա**

Պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածությունում գտնվող կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա սահքի հարթ էլեկտրառաձգական ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը բերվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի տիպի խնդրի իրական առանցքի վրա:

Դիֆրակցիայի խնդիրը լուծվում է օգտագործելով Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդը: Կիսաանվերջ մետաղական շերտի՝ էլեկտրոդի առկայությունը բերում է ալիքների դիֆրակցիայի՝ պիեզոէլեկտրական կիսատարածությունում տարածվում են ծավալային և երկու մակերևութային ալիքներ: Բացահայտվել են ալիքային դաշտի մի քանի առանձնահատկություններ:

**Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A.**

**Diffraction of Plane Shear Wave in Piezoelectric Semi-Space at a Semi-Infinite Metallic Layer in the Dielectric Medium**

The problem of diffraction of plane shear electro-elastic wave in a piezoelectric medium with a semi-infinite metallic layer in dielectric half-space is reduced to the solution to Riemann problem in analytic functions theory. The problem of diffraction is solved using Fourier transformation. The presence of the semi-infinite metallic layer leads to a diffraction of waves and some special features, a result of which two surface electro-elastic waves occur in a piezoelectric medium.

Задача дифракции плоской электроупругой волны сдвига в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрическом полупространстве сводится к решению задачи типа Римана на действительной оси в теории аналитических функций. Решается задача методом интегрального преобразования Фурье. Наличие полубесконечного металлического слоя (электрода) в диэлектрике приводит к распространению дифрагированных объёмных и двух поверхностных электроупругих волн в пьезоэлектрическом полупространстве. Выявлены некоторые особенности волнового поля.

**Введение.** При исследовании волновых процессов в деформируемых средах некоторые характерные свойства существенно влияют на волновое поле, но важным

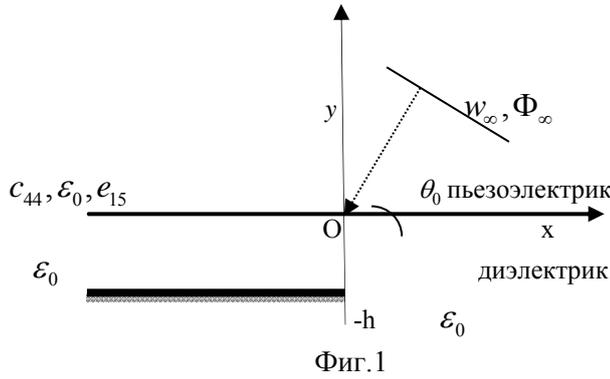
из них является конструктивная неоднородность (слоистость, наличие включений), которая порождает новые эффекты – локализованные волны [1-4]. Изучения вопросов дифракции сдвиговых плоских волн и распространения локализованных (поверхностных) волн относятся к числу наиболее актуальных проблем динамических задач составных электроупругих сред. Задачи распространения сдвиговых поверхностных волн в сложных структурах при разных сочетаниях граничных условий исследованы во многих работах в этой области. Известно, что различные физико-механические свойства контактирующих сред приводят к существенным изменениям волнового поля, так, в пьезоэлектрическом полупространстве без акустического контакта с диэлектрической средой распространяются поверхностные сдвиговые волны [2, 3]. В данной работе рассмотрена задача дифракции плоской волны сдвига в электроупругой составной среде (пьезоэлектрик-диэлектрик) при наличии тонкого полубесконечного, металлического, заземлённого слоя (электрода) в диэлектрике. Этот слой является причиной дифракции электроупругой волны, при этом, в пьезоэлектрическом полупространстве возбуждаются поверхностные волны сдвига и проявляются некоторые особые явления. Задача решается методом интегрального преобразования Фурье, используя метод факторизации, аппарат обобщённых функций и методы теории функций комплексного переменного [5, 6]. Задача сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси. Не только ярко выраженная анизотропия пьезоэлектрика усложняет исследование волнового процесса, но и ряд новых свойств, проявляющихся в результате взаимодействия физических полей разной природы.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача дифракции сдвиговой плоской электроупругой волны в составном пространстве, отнесённом к декартовой системе координат  $Oxyz$ . Пьезоэлектрическая среда – пьезоэлектрик класса  $6mm$  гексагональной симметрии с совпадающей с осью  $Oz$  главной осью кристалла, занимает полупространство  $y > 0$ , а диэлектрическая среда – полупространство  $y < 0$ . Диэлектрическая среда граничит с пьезоэлектрическим полупространством в плоскости  $Oxz$  без акустического контакта. В пьезоэлектрическом полупространстве из бесконечности под углом  $\theta_0$  (угол скольжения падающей волны) к плоскости  $y = 0$  распространяется электроупругая волна сдвига (фиг.1)

$$w_{\infty}(x, y) = e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0}$$

$$\Phi_{\infty}(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0} \quad (1.1)$$

В диэлектрическом полупространстве заземлённый металлический слой (электрод) занимает полуплоскость  $y = -h, x < 0$ . Ставится задача определения электроупругого волнового поля в рассматриваемой среде, обусловленного наличием пьезоэффекта в полупространстве  $y > 0$  и полубесконечного металлического слоя в диэлектрическом полупространстве  $y < 0$ .



В этих соотношениях  $\omega$  – частота колебаний,  $t$  – параметр времени,  $k = \omega/c$ ,  $c = \sqrt{c_{44}(1 + \chi)/\rho}$  – волновое число и скорость распространения сдвиговой электроупругой волны в пьезоэлектрической среде, соответственно,  $e_{15}, \epsilon_{11}, c_{44}$  – пьезоэлектрическая, диэлектрическая и упругая постоянные пьезоэлектрика, а  $\rho$  – плотность,  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная среды  $y < 0$ .

Пьезоэлектрическая среда ( $y > 0$ ) находится в условиях антиплоской деформации. Отметим, что учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель  $e^{-i\omega t}$ ) и задача решается в амплитудах. Для определения амплитуды перемещения  $w(x, y)$  точек в полупространстве  $y > 0$  и амплитуд электрических потенциалов (в квазистатическом приближении) в двух полупространствах  $\Phi(x, y), \Phi_1(x, y)$  имеем следующие уравнения [1]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w = 0 \quad y > 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0 \quad (1.3)$$

Решения уравнений (1.2), (1.3) должны удовлетворять следующим условиям на плоскости  $y = 0$  (непрерывность электрического поля) [1-4]:

$$\sigma_{yz}(x, +0) = 0$$

$$\Phi(x, 0) = \Phi_1(x, 0), \quad D_2(x, 0) = D_{12}(x, 0) \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma_{yz}(x, y)$  – амплитуда напряжения в пьезоэлектрике,  $D_2(x, y), D_{12}(x, y)$  – составляющие вектора электрической индукции в пьезоэлектрике и диэлектрике, соответственно:

$$\sigma_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad D_2 = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad y > 0$$

$$D_{12} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \quad y < 0 \quad (1.5)$$

При наличии металлического слоя в полуплоскости  $y = -h, x < 0$  имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, -h+0) &= \Phi_1(x, -h-0) = \Phi^+(x) \\ D_{12}(x, -h+0) - D_{12}(x, -h-0) &= -\varepsilon_0 \Psi^-(x) \end{aligned} \quad (1.6)$$

В соотношениях (1.6) введены функции:

$$\Phi^+(x) = \Phi_1(x, -h)\theta(x), \quad \varepsilon_0 \Psi^-(x) = d(x)\theta(-x),$$

где  $d(x)$  представляет разницу значений  $D_{12}(x, y)$  на  $y = -h+0$  и  $y = -h-0$  при  $x < 0$ ,  $\theta(x)$  – известная функция Хевисайда.

**2. Решение задачи.** Введём функции

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w(x, y) - w_\infty(x, y) \\ \varphi(x, y) &= \Phi(x, y) - \Phi_\infty(x, y) \end{aligned} \quad y > 0 \quad (2.1)$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной  $x$  к уравнениям (1.2), (1.3), получим уравнения относительно трансформантов [2-4]:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2) \bar{u} = 0 \quad y > 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi} + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} = 0$$

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_1}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_1 = 0 \quad y < 0 \quad (2.3)$$

и следующие условия при  $y = 0$ :

$$c_{44} \frac{d\bar{w}}{dy} + e_{15} \frac{d\bar{\Phi}}{dy} = 0, \quad e_{15} \frac{d\bar{w}}{dy} - \varepsilon_{11} \frac{d\bar{\Phi}}{dy} = -\varepsilon_0 \frac{d\bar{\Phi}_1}{dy}, \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 \quad (2.4)$$

и условия при  $y = -h$ :

$$\bar{\Phi}^+(\sigma) = \bar{\Phi}_1(\sigma, -h+0) = \bar{\Phi}_1(\sigma, -h-0) \quad (2.5)$$

$$\bar{D}_{12}(\sigma, -h+0) - \bar{D}_{12}(\sigma, -h-0) = -\varepsilon_0 \bar{\Psi}^-(\sigma)$$

Для трансформантов Фурье искомых функций получим:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= C_1(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} + 2\pi e^{-iky \sin \theta_0} \delta(\sigma - k \cos \theta_0) \\ \bar{\Phi} &= C_2(\sigma) e^{-|\sigma| y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{w} \quad y > 0 \\ \bar{\Phi}_1 &= C_3(\sigma) \operatorname{ch} |\sigma| y + C_4(\sigma) \operatorname{sh} |\sigma| y \quad -h < y < 0 \\ \bar{\Phi}_1 &= C_5(\sigma) e^{|\sigma| y} \quad y < -h \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $\delta(\sigma)$  – функция Дирака,  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$ , т.е. действительная ось комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  обходит точку  $\sigma = -k$  сверху, а точку  $\sigma = k$  – снизу [4-5]. Для функций  $C_m(\sigma)$   $m = \overline{1, 5}$  имеем:

$$\begin{aligned} C_1(\sigma) &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_0}{e_{15}} \overline{\Phi^+} e^{|\sigma|h} + \frac{\varepsilon_{11} \text{sh}|\sigma|h + \varepsilon_0 \text{ch}|\sigma|h}{e_{15} |\sigma|} \overline{\Psi^-} - 2\pi\delta(\sigma - k \cos \theta_0), \\ C_2(\sigma) &= -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}} \overline{\Phi^+} e^{|\sigma|h} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}} \frac{\text{ch}|\sigma|h}{|\sigma|} \overline{\Psi^-}, \quad C_5(\sigma) = e^{|\sigma|h} \overline{\Phi^+} \\ C_3(\sigma) &= \overline{\Phi^+} e^{|\sigma|h} + \frac{\text{sh}|\sigma|h}{|\sigma|} \overline{\Psi^-}, \\ C_4(\sigma) &= \overline{\Phi^+} e^{|\sigma|h} + \frac{\text{ch}|\sigma|h}{|\sigma|} \overline{\Psi^-} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Относительно трансформантов  $\overline{\Phi^+}(\sigma), \overline{\Psi^-}(\sigma)$  получим следующее уравнение:

$$2|\sigma| K(\sigma) \overline{\Phi^+}(\sigma) + \overline{\Psi^-}(\sigma) = \frac{8\pi e_{15} k (1 + \chi) \cos \theta_0 e^{-kh \cos \theta_0}}{K_2(k \cos \theta_0)} \delta(\sigma - k \cos \theta_0), \quad (2.8)$$

где

$$K(\sigma) = \frac{K_1(\sigma)}{K_2(\sigma)} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} K_0(\sigma) &= 1 + \chi - \frac{\chi|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k^2}}, \quad K_1(\sigma) = \varepsilon_{11}(1 + \chi) + \varepsilon_0 K_0(\sigma) \\ K_2(\sigma) &= \varepsilon_0(1 + e^{-2|\sigma|h}) K_0(\sigma) + (1 + \chi) \varepsilon_{11}(1 - e^{-2|\sigma|h}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (2.8), рассмотрим частный случай, когда металлический слой занимает в диэлектрике всю плоскость  $y = -h$ .

Тогда следует принять  $\overline{\Phi^+}(\sigma) = 0$ , т.е.  $\Phi_1(x, y) = 0$  при  $y = -h$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

Из (2.6), (2.7), применяя обратное преобразование Фурье, получим амплитуду перемещений пьезоэлектрической среды ( $y \geq 0$ ):

$$w(x, y) = e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0} + (2A_0 - 1) e^{iky \sin \theta_0 - ikx \cos \theta_0},$$

$$A_0 = 2(1 + \chi) e^{-kh \cos \theta_0} \frac{\varepsilon_{11} \text{sh}(kh \cos \theta_0) + \varepsilon_0 \text{ch}(kh \cos \theta_0)}{K_2(k \cos \theta_0)},$$

при  $\chi = 0$  (отсутствие пьезоэффекта)  $A_0 = 1$ . Как и следовало ожидать, волновое поле перемещения в пьезоэлектрическом полупространстве состоит только из падающей волны и отражённой от свободной границы волны.

Вернёмся к решению полученного функционального уравнения (2.8), которое можно рассматривать как краевую задачу типа Римана на действительной оси. Функция  $K(\sigma)$  имеет нули только в точках  $\pm\sigma_1$ , т.к.  $\sigma_1$  – единственный положительный корень уравнения  $K_1(\sigma) = 0$  и полюса – только в точках  $\pm\sigma_2$ ,

$\sigma_2$  – единственный положительный корень уравнения  $K_2(\sigma) = 0$ . Показано, что при  $\sigma > k$  функции  $K_0(\sigma)$ ,  $K_1(\sigma)$ ,  $K_2(\sigma)$  возрастают и  $\sigma_0 > \sigma_2 > \sigma_1 > k$   
 $K_0(\pm\sigma_0) = K_1(\pm\sigma_1) = K_2(\pm\sigma_2) = 0$ ,  $K_2(\sigma) > 0$  при  $\sigma > \sigma_0$

$$\sigma_0 = k \frac{1+\chi}{\sqrt{1+2\chi}}, \quad \sigma_1 = \sigma_0 \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})\sqrt{1+2\chi}}{\sqrt{(1+\chi)^2(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^2 - \varepsilon_0^2\chi^2}}$$

Принимается, что в данной задаче типа Римана действительная ось обходит не только точки ветвления  $\pm k$  функции  $\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ , но и точки  $\sigma = -\sigma_1$ ,  $\sigma = -\sigma_2$  сверху, а точки  $\sigma = \sigma_1$ ,  $\sigma = \sigma_2$  снизу, обеспечивая условия уходящей волны. Функциональное уравнение (2.8) решается, используя такую же методику, как в [2,4,6-8], решения строятся, факторизируя функцию  $K(\sigma)$ , т.к.  $K(\sigma) \rightarrow 1$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{\sigma^2 - k^2} \rightarrow |\sigma|$ , представляя

$$K(\sigma) = K^+(\sigma)K^-(\sigma), \quad (2.11)$$

где функции  $K^\pm(\alpha)$ .  $\alpha = \sigma + i\tau$  регулярны и не имеют нулей при  $\text{Im}\alpha > 0$  и  $\text{Im}\alpha < 0$ , соответственно, а  $K^+(\sigma)$ ,  $K^-(\sigma)$  – граничные значения этих функций.

При этом,  $K^\pm(\alpha) \rightarrow 1$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  в своих областях регулярности [2,4]

$$K^+(\alpha) = \exp(F^+(\sigma)), \quad K^-(\alpha) = \exp(F^-(\sigma))$$

$$F^+(\sigma) = \int_0^\infty F(x)e^{ix(\sigma+i0)}dx, \quad F^-(\sigma) = F^+(-\sigma),$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln K(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \quad K^-(-\alpha) = K^+(\alpha)$$

Имея в виду (2.11) и представление

$$|\sigma| = (\sigma - i0)^{\frac{1}{2}}(\sigma + i0)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.12)$$

уравнение (2.8) сводится к виду

$$2(\sigma + i0)^{\frac{1}{2}}K^+(\sigma)\overline{\Phi^+(\sigma)} + \frac{\overline{\Psi^-(\sigma)}}{(\sigma - i0)^{1/2}K^-(\sigma)} = 8\pi e_{15}a_0\delta(\sigma - k \cos \theta_0), \quad (2.13)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{(1+\chi)\sqrt{k \cos \theta_0}K^+(k \cos \theta_0)e^{-kh \cos \theta_0}}{K_1(k \cos \theta_0)}.$$

Из уравнения (2.13), используя формулу

$$2\pi i\delta(\sigma - k \cos \theta_0) = \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \theta_0 + i0}, \quad (2.14)$$

получим следующие выражения для искомым функций:

$$\overline{\Psi^-(\sigma)} = -\frac{4ie_{15}a_0(\sigma - i0)^{1/2}K^-(\sigma)}{\sigma - k \cos \theta_0 - i0} \quad (2.15)$$

$$\overline{\Phi}^+(\sigma) = \frac{2ie_{15}a_0}{(\sigma + i0)^{1/2} K^+(\sigma)(\sigma - k \cos \theta_0 + i0)}. \quad (2.16)$$

Следовательно, имея из (2.7) функции  $C_m(\sigma)$   $m = 1, 5$ , получим выражения функций  $\overline{w}(\sigma, y)$ ,  $\overline{\Phi}(\sigma, y)$ ,  $\overline{\Phi}_1(\sigma, y)$ . После обратного преобразования Фурье

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{w} e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

амплитуда перемещений в пьезоэлектрическом полупространстве представляется в виде

$$w(x, y) = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_0}{2\pi e_{15}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|\sigma|h} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} e^{-i\sigma x} (\overline{\Phi}^+(\sigma) + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{11}) e^{-2|\sigma|h}}{2|\sigma|(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})} \overline{\Psi}^-(\sigma)) d\sigma - e^{-ikx \cos \theta_0 + iky \sin \theta_0} + e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0}, \quad (2.17)$$

а амплитуда потенциала электрического поля при  $y > 0$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_2(\sigma) e^{-|\sigma|y} e^{-i\sigma x} dx + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w(x, y) \quad (2.18)$$

Рассмотрим волновое поле в пьезоэлектрическом полупространстве ( $y > 0$ ), когда  $x < 0$ . Тогда, с помощью формулы (2.14), имея в виду (2.15), выражение (2.17) представляется в виде:

$$w(x, y) = e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0} + (A_2 - 1) e^{-ikx \cos \theta_0 + iky \sin \theta_0} + B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ie^{-|\sigma|h} |\sigma| e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - k^2} (\sigma + i0)^{1/2} K^+(\sigma) K_2(\sigma) (\sigma - k \cos \theta_0 + i0)}, \quad (2.19)$$

где  $A_2 = 2A_0$ ,  $\pi B = -\varepsilon_0 \varepsilon_{11} \chi a_0$ .

Таким образом, волновое поле состоит из падающей волны, отражённой волны и дифрагированной, обусловленной наличием полубесконечного металлического слоя в диэлектрическом полупространстве.

Следует сразу же отметить, что при  $x > 0$  из формулы (2.17), имея в виду (2.14) и (2.15), получим амплитуду перемещения  $w(x, y)$  точек пьезоэлектрического полупространства при  $x > 0$ :

$$W(x, y) = e^{-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0} + (A_1 - 1) e^{-ikx \cos \theta_0 + iky \sin \theta_0} + B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\sigma - i0)^{1/2} K^-(\sigma) e^{-|\sigma|h} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - k^2} K_1(\sigma) (\sigma - k \cos \theta_0 - i0)}, \quad (2.20)$$

$$A_1 = \frac{2(1 + \chi)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_0)}{K_1(k \cos \theta_0)}, \quad \text{при } \chi = 0 \text{ получим } A_1 = 2.$$

Рассмотрим интеграл в формуле (2.19)

$$I_2(x, y) = B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma + i0)^{-1/2} i |\sigma| e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{K^+(\sigma) M_2(|\sigma|, \gamma) (\sigma - k \cos \theta_0 + i0)} \quad x < 0 \quad (2.21)$$

где принято, что

$$M_2(|\sigma|, \gamma) \equiv M_2(\sigma) = e^{|\sigma|h} \sqrt{\sigma^2 - k^2} K_2(\sigma), \text{ т.е.}$$

$$M_2(|\sigma|, \gamma) = \varepsilon_0 (e^{|\sigma|h} + e^{-|\sigma|h}) (\gamma(1 + \chi) - \chi|\sigma|) + \varepsilon_{11} (1 + \chi) \gamma (e^{|\sigma|h} - e^{-|\sigma|h}),$$

$$\text{здесь } \gamma = \gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}.$$

Интеграл (2.21) можно представить в следующем виде:

$$I_2(x, y) = I_2^{(1)}(x, y) + I_2^{(2)}(x, y) \quad x < 0 \quad (2.22)$$

$$I_2^{(1)} = B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma + i0)^{-1/2} i \sigma e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{K^+(\sigma) N_2(\sigma, \gamma) (\sigma - k \cos \theta_0 + i0)} \quad (2.23)$$

$$I_2^{(2)} = B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} e^{-i\sigma x}}{(\sigma + i0)^{1/2} K^+(\sigma)} \left( \frac{|\sigma|}{M_2(|\sigma|, \gamma)} - \frac{\sigma}{N_2(\sigma, \gamma)} \right) \frac{d\sigma}{(\sigma - k \cos \theta_0 + i0)}, \quad (2.24)$$

где

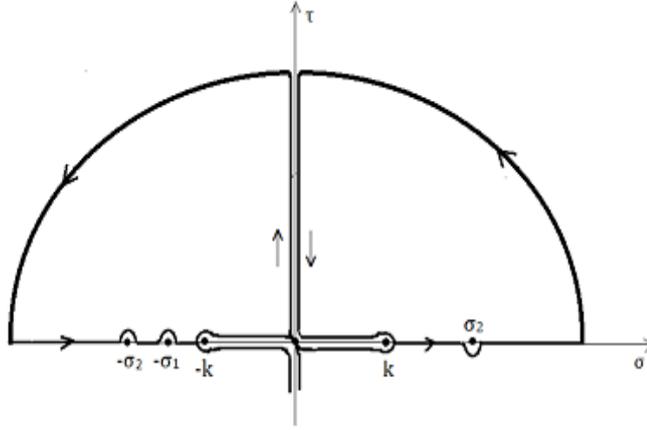
$$N_2(\sigma, \gamma) \equiv N_2(\sigma) = \varepsilon_0 (e^{\sigma h} + e^{-\sigma h}) (\gamma(1 + \chi) - \chi\sigma) + \varepsilon_{11} (1 + \chi) \gamma (e^{\sigma h} - e^{-\sigma h})$$

$$N_2(\sigma, \gamma) = M_2(\sigma, \gamma) \text{ при } |\sigma| = \sigma.$$

Преобразуем интегралы (2.23), (2.24) методом контурного интегрирования в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$ , рассматривая при этом комплексную плоскость с разрезами, показанными на (фиг.2). Путь интегрирования замыкается в верхней полуплоскости, а действительная ось обходит точку  $-\sigma_2$  сверху, а точку  $\sigma_2$  – снизу, т.к.  $\sigma_2$  – единственный положительный корень функции  $K_2(\sigma)$ . Аналитическое продолжение функции  $N_2(\sigma)$ , т.е. функция  $N_2(\alpha)$  с такими разрезами в комплексной плоскости не имеет чисто мнимых корней, не имеет также комплексных корней, т.к. в противном случае получим составляющую приходящей волны, а это противоречит поставленной задаче (принцип уходящей волны) [2,7,8]. Аналитическое продолжение подынтегральной функции (2.23) внутри контура интегрирования имеет единственную особую точку  $\sigma = \sigma_2$ , где имеет простой полюс.

Аналитическое продолжение функции  $|\sigma|$  в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  представляется в виде

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ -\alpha, \operatorname{Re} \alpha < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$



Фиг.2

После контурного интегрирования, имея в виду вычет подынтегральной функции, получим:

$$I_2^{(1)}(x, y) = I_{20}^{(1)}(x, y) + w_*^{(2)}(x, y) \quad (2.26)$$

$$I_{20}^{(1)}(x, y) = I_{21}^{(1)}(x, y) + I_{22}^{(1)}(x, y) + I_{23}^{(1)}(x, y) + I_{24}^{(1)}(x, y)$$

$$I_2^{(2)}(x, y) = -B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(i\tau)^{1/2} e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}y} e^{-\tau|x|}}{K^+(i\tau)} \left( \frac{1}{M_2(-i\tau, -i\sqrt{k^2+\tau^2})} + \frac{1}{N_2(i\tau, -i\sqrt{k^2+\tau^2})} \right) \frac{d\tau}{i\tau - k \cos \theta_0},$$

$$I_{21}^{(1)}(x, y) = -B \int_0^{\infty} \frac{(i\tau)^{1/2} e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}y} e^{-\tau|x|} d\tau}{K^+(i\tau) N_2(i\tau, i\sqrt{k^2+\tau^2})(i\tau - k \cos \theta_0)},$$

$$I_{24}^{(1)}(x, y) = B \int_0^{\infty} \frac{(i\tau)^{1/2} e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}y} e^{-\tau|x|} d\tau}{K^+(i\tau) N_2(i\tau, -i\sqrt{k^2+\tau^2})(i\tau - k \cos \theta_0)} \quad (2.27)$$

$$I_{22}^{(1)}(x, y) = -B \int_0^k \frac{i\sigma e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}y} e^{i\sigma|x|} d\sigma}{(\sigma + i0)^{1/2} K^+(\sigma) N_2(\sigma, i\sqrt{k^2-\sigma^2})(\sigma - k \cos \theta_0 + i0)}$$

$$I_{23}^{(1)}(x, y) = B \int_0^k \frac{i\sigma e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}y} e^{i\sigma|x|} d\sigma}{(\sigma + i0)^{1/2} K^+(\sigma) N_2(\sigma, -i\sqrt{k^2-\sigma^2})(\sigma - k \cos \theta_0 + i0)}$$

$$w_*(x, y) = A_*^{(2)} e^{-\sqrt{\sigma_2^2 - k^2}y} e^{i\sigma_2|x|} \quad (2.28)$$

$$A_*^{(2)} = \frac{Bi\sqrt{\sigma_2} e^{-\sigma_2 h}}{(\sigma_2 - k \cos \theta_0) K^+(\sigma_2) \sqrt{\sigma_2^2 - k^2} K_2'(\sigma_2)}, \quad K_2'(\sigma_2) = \left. \frac{dK_2}{d\sigma} \right|_{\sigma=\sigma_2}$$

где (2.28) представляет амплитуду поверхностной волны

$$W_*(x, y, t) = w_*(x, y) e^{-i\omega t}$$

Таким образом, (2.11) получим в виде суммы регулярных интегралов, амплитуд падающей и отражённой волн, а также поверхностной волны.

$$w(x, y) = e^{-ikx \cos \theta_0 - ik y \sin \theta_0} + (A_2 - 1)e^{-ikx \cos \theta_0 + ik y \sin \theta_0} + I_{20}^{(1)}(x, y) + I_2^{(2)}(x, y) + A_*^{(2)} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} e^{i\sigma_2 |x|} \quad (2.29)$$

На граничной поверхности  $y = 0$  амплитуда поверхностной волны принимает максимальное значение. Асимптотическое представление перемещений пьезоэлектрика на граничной поверхности ( $y = 0$ ) при  $x \rightarrow -\infty$  имеет вид:

$$w(x, 0) = A_2 e^{-ikx \cos \theta_0} + A_*^{(2)} e^{i\sigma_2 |x|} + B_2 e^{i(kx - \frac{\pi}{4})} (|kx|^{\frac{3}{2}} + O(|kx|^{\frac{5}{2}})) + b_2 (|kx|^{\frac{3}{2}} + O(|kx|^{\frac{5}{2}})) \quad (2.30)$$

$$B_2 = \frac{B}{\sqrt{2kK^+(k)\varepsilon_0(1+\chi)\text{ch}kh \sin^2 \theta_0/2}}, \quad b_2 = \frac{B}{\sqrt{k\pi\sqrt{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_0)\varepsilon_0} \cos \theta_0}}$$

Волновое поле состоит из падающей волны, отражённой волны, дифрагированной затухающей объёмной волны, волны, распространяющейся от граничной поверхности в пьезоэлектрическую среду (имеющей неволновой характер по  $x$ ) и, наконец, поверхностной (локализованной у граничной поверхности) волны с волновым числом  $\sigma_2$ . Поверхностная и другие дифрагированные волны обусловлены пьезоэффектом в полупространстве  $y > 0$  и наличием полубесконечного металлического слоя (электрода) в диэлектрическом полупространстве  $y < 0$ .

При  $x > 0$  интеграл из формулы (2.20) представляется в виде:

$$I_1(x, y) = B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\sigma - i0)K^-(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{M_1(|\sigma|, \gamma)(\sigma - k \cos \theta_0 - i0)}, \quad (2.31)$$

где  $M_1(|\sigma|, \gamma) \equiv M_1(\sigma) = e^{|\sigma|h} \sqrt{\sigma^2 - k^2} K_1(\sigma)$ ,

т.е.  $M_1(|\sigma|, \gamma) = e^{|\sigma|h} ((1 + \chi)\sqrt{\sigma^2 - k^2} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}) - \varepsilon_0 \chi |\sigma|)$ .

Интеграл (2.31) можно представить в виде  $I_1(x, y) = I_1^{(1)}(x, y) + I_1^{(2)}(x, y)$

$$I_2^{(1)}(x, y) = B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\sigma - i0)^{1/2} K^-(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{N_1(\sigma, \gamma)(\sigma - k \cos \theta_0 - i0)} \quad (2.32)$$

$$I_2^{(2)}(x, y) = B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\sigma - i0)^{1/2} K^-(\sigma)e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}y} e^{-i\sigma x}}{(\sigma - k \cos \theta_0 - i0)} \left( \frac{1}{M_1(|\sigma|, \gamma)} - \frac{1}{N_1(\sigma, \gamma)} \right) d\sigma \quad (2.33)$$

$N_1(\sigma, \gamma) \equiv N_1(\sigma) = e^{-\sigma h} ((1 + \chi)\gamma(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}) + \varepsilon_0 \chi \sigma)$

Теперь рассмотрим интегралы (2.32), (2.33) методом контурного интегрирования в комплексной плоскости. Путь интегрирования замыкается в нижней полуплоскости, а действительная ось обходит точку  $-\sigma_1$  сверху, а точку  $\sigma_1$  снизу, т.к.  $\sigma_1$  — единственный положительный корень функции  $K_1(\sigma)$ . Аналитическое

продолжение подынтегральной функции (2.32) имеет внутри контура интегрирования единственную особую точку  $\sigma = -\sigma_1$ , где она имеет простой полюс. Вычет подынтегральной функции в точке  $-\sigma_1$

$$w_*(x, y) = A_*^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_1^2 - k^2} y} e^{i\sigma_1 x} \quad (2.34)$$

это и есть амплитуда поверхностной волны при  $x > 0$

$$A_*^{(1)} = \frac{B\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2 - k^2} K^+(\sigma_1) e^{\sigma_1 h}}{(\varepsilon_0 \chi \sqrt{\sigma_1^2 - k^2} - \sigma_1(1 + \chi)(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}))(\sigma_1 + k \cos \theta_0)}$$

Аналогично, как и при  $x < 0$ , решение представляется в виде суммы, регулярных интегралов, амплитуд падающей и отражённой волн, и поверхностной волны. Асимптотика перемещений на граничной поверхности при  $x \rightarrow +\infty$  имеет вид:

$$w(x, 0) = A_1 e^{-ikx \cos \theta_0} + A_*^{(1)} e^{i\sigma_1 x} + B_1 e^{i(kx + \frac{\pi}{4})} ((kx)^{-\frac{3}{2}} + O(kx)^{-\frac{5}{2}}) + b_1 ((kx)^{-\frac{5}{2}} + O((kx)^{-\frac{3}{2}})) \quad (2.35)$$

$$B_1 = \frac{BK^+(k)}{\sqrt{k}(1 + \chi)(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}) \cos^2 \theta_0 / 2},$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_0}{2\varepsilon_0}} \frac{3\sqrt{\pi\varepsilon_0}\chi B}{2\sqrt{k}(1 + \chi)^2(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^2 \cos \theta_0}$$

**Заключение.** Исследование волнового процесса позволило выявить новые, обусловленные дифракцией и пьезоэффектом, свойства и особенности, присущие взаимосвязанным средам и полям. Наличие полубесконечного металлического слоя в диэлектрике приводит к существенному изменению волнового поля в пьезоэлектрическом полупространстве – возбуждаются две поверхностные – локализованные у граничной поверхности, волны с разными волновыми числами, а также появляются цилиндрическая волна и волна, распространяющаяся от граничной поверхности по направлению луча и имеющая неволновой характер по  $x$  на границе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ в рамках научного проекта 13RF-086.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50-69.
3. Аветисян А.С. Поверхностные сдвиговые волны в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим слоем. // Материалы III симп. «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван: 1984. С.7-10.

4. Григорян Э.Х., Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик. //Труды 7-ой межд.конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2011. С.137-143.
5. Нобль Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с.
6. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладке к упругой полуплоскости. //Уч. записки ЕГУ. 1979. №3. С.29-34.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. // Доклады НАН Армении. 2010. Т.110. №3. С.261-271.
8. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.56-66.

**Сведения об авторах:**

**Джилаван Самвел Акопович** – к.ф.-м.н., доцент, кафедра механики, Ереванский госуниверситет. Тел.: (+374 91) 50 07 70. **E-mail:** [samjilavyan@ysu.am](mailto:samjilavyan@ysu.am)

**Казарян Айказ Арменович** – аспирант Института механики НАН Армении. Тел.: (+374 96) 00 96 06. **E-mail:** [haykazghazaryan@gmail.com](mailto:haykazghazaryan@gmail.com)

Поступила в редакцию 04.02.2015