

УДК 539.3

**НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЫХОДЯЩИМ НА
ГРАНИЦУ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ**

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Բանալի բառեր՝ ճաք, կոշտ ներդրակ, լարվածային վիճակ, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում
Ключевые слова: трещина, жёсткое включение, напряжённое состояние, сингулярные интегральные уравнения.

Keywords: crack, rigid inclusion, stress state, singular integral equations

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա.

**Եզր դուրս եկող բացարձակ կոշտ ներդրակ և ճաք պարունակող
կիսահարթության լարվածային վիճակը**

Ուսումնասիրված է եզր դուրս եկող բացարձակ կոշտ ներդրակ և նրա անմիջական շարունակությունը կազմող վերջավոր ճաք պարունակող կիսահարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն դեֆորմացվում է ներդրակի ծայրակետում կիրառված և եզրի հետ որոշակի անկյուն կազմող կենտրոնացված ուժի ազդեցության տակ: Խնդիրը բերված է Կոշու ընդհանրացված կորիզներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որի լուծումը կառուցված է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ:

Накобыан В., Амирджанян А.

Stress state of semi-infinite plane with absolutely rigid inclusion and crack

The plane stress state of elastic semi-infinite plane, containing perpendicularly situated collinear absolutely rigid inclusion and crack along boundary is considered. The case, when inclusion is on the boundary and crack continues, is discussed. The stated problem mathematically formulated as a system of singular integral equations with Cauchy generalized kernels. The solution is built by the method of mechanical quadratures.

Исследованию контактного взаимодействия упругой полуплоскости с конечными абсолютно жёсткими или деформируемыми включениями, перпендикулярно выходящими на границу полуплоскости, посвящён ряд работ [1-4]. В настоящей работе исследовано плоско-деформированное состояние упругой полуплоскости, содержащей расположенные перпендикулярно к границе коллинеарные абсолютно жёсткое включение и трещину. Рассмотрен случай, когда включение выходит на границу, а трещина непосредственно продолжает его. Задача математически формулируется в виде системы сингулярных интегральных уравнений с обобщёнными ядрами Коши, решение которой строится методом механических квадратур.

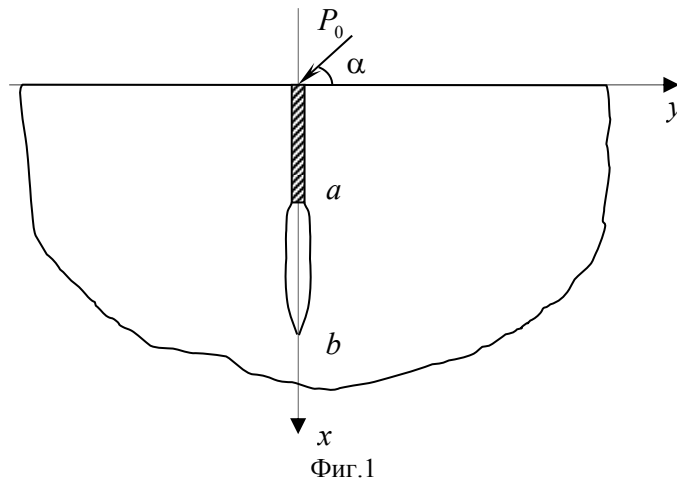
Введение

Исследование вопросов взаимовлияния различных типов концентраторов напряжений типа трещин (разрезов, щелей), абсолютно жёстких или инородных включений между собой и с однородными или составными массивными деформируемыми телами является одним из приоритетных направлений контактных и смешанных задач теории упругости, сформированное в последние десятилетия. Учёт взаимодействия различных типов концентраторов напряжений часто приводит к новым постановкам контактных и смешанных задач, качественно изменяет характер концентрации напряжений, существенно влияет на показатель особенности напряжений и на распределение напряжений в зонах концентрации [5].

Это направление тесно связано также с вопросами предотвращения распространения трещин в твёрдых деформируемых телах, что является актуальной проблемой не только с точки зрения механики деформируемого твёрдого тела и механики разрушения, но и имеет огромное практическое значение при расчётах различных конструкций и их деталей на прочность и долговечность.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть упругая полуплоскость, отнесённая к полярной системе координат $Or\varphi$, и занимающая область $\{0 \leq r < \infty, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\}$, на интервалах $(0, a)$ и (a, b) линии $\varphi = 0$ соответственно усилена абсолютно жёстким тонким включением и расслаблена конечной трещиной. Будем считать, что полуплоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки величины P_0 , приложенной к включению в точке $r = 0$ и составляющей с границей полуплоскости угол α (фиг.1). Требуется определить контактные напряжения, действующие на участках контакта включения с полуплоскостью, раскрытие трещины, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений на линии $\varphi = 0$, а также угол поворота включения.



Мысленно разделим полуплоскость по линии $\varphi = 0$ на две четверть-плоскости и снабдим компоненты напряжений и перемещений, относящиеся к точкам четверть-плоскостей $D_{\pm} = \{0 \leq \pm\varphi \leq \pi/2; 0 \leq r < \infty\}$, верхними индексами (+) и (-) соответственно. Тогда поставленную задачу можем сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{cases} \tau_{r\varphi}^{\pm}(r, \pm\pi/2) = 0; \sigma_{\varphi}^{\pm}(r, \pm\pi/2) = 0; & (0 < r < \infty) \\ u_r^+(r, 0) + iu_{\varphi}^+(r, 0) = u_r^-(r, 0) + iu_{\varphi}^-(r, 0); & (b < r < \infty) \\ \sigma_{\varphi}^+(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^+(r, 0) = \sigma_{\varphi}^-(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^-(r, 0); & (b < r < \infty) \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} u_r^\pm(r, 0) + iu_\varphi^\pm(r, 0) = c + i\gamma r; & (0, a) \\ \sigma_\varphi^\pm(r, 0) = -\sigma_0(r); \quad \tau_{r\varphi}^\pm(r, 0) = 0; & (a, b) \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $u_r^\pm(r, \varphi)$ и $u_\varphi^\pm(r, \varphi)$ – компоненты смещения точек областей D_\pm , удовлетворяющие уравнениям Ламе и связанные с компонентами напряжений $\sigma_\varphi^\pm(r, \varphi)$ и $\tau_{r\varphi}^\pm(r, \varphi)$ известными формулами закона Гука [7], c и γ – постоянные, определяющие соответственно поступательное движение и поворот включения.

Чтобы решить поставленную задачу, сначала построим разрывные решения уравнений Ламе для полуплоскости. С этой целью введём в рассмотрение функцию скачков напряжений $\chi(r)$, действующих на включение и разности смещений точек берегов трещины $W(r)$:

$$\begin{aligned} & [\sigma_\varphi^+(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^+(r, 0)] - [\sigma_\varphi^-(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^-(r, 0)] = \\ & \quad = \begin{cases} \chi(r) & (0 < r < a) \\ 0 & (a < r < b) \end{cases}; \\ & [u_r^+(r, 0) + iu_\varphi^+(r, 0)] - [u_r^-(r, 0) + iu_\varphi^-(r, 0)] = \\ & \quad = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ W(r) & (a < r < b) \end{cases}. \end{aligned} \quad (2)$$

Решив при помощи интегрального преобразования Меллина [5,6] вспомогательную граничную задачу, определяемую условиями (1а) и (2), выразим компоненты напряжения и производные от смещений через введённые неизвестные функции $\chi(r)$ и $W(r)$. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d[u_r^\pm(r, 0) + iu_\varphi^\pm(r, 0)]}{dr} = & \pm \frac{W'(r)}{2} - \frac{i(\mathfrak{G}_2^2 - \mathfrak{G}_1^2)}{2\mathfrak{G}_2} \left\{ \int_0^a R_{11}(r, r_0) \chi(r_0) dr_0 + \right. \\ & \left. + \int_a^b R_{12}(r, r_0) W'(r_0) dr_0 + \int_a^b R_{13}(r, r_0) \bar{W}'(r_0) dr_0 \right\}; \quad (0 < r < \infty) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^\pm(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^\pm(r, 0) = & \pm \frac{\chi(r)}{2} + \frac{i\mathfrak{G}_1}{2\mathfrak{G}_2} \left\{ \int_0^a R_{21}(r, r_0) \chi(r_0) dr_0 + \right. \\ & \left. + \int_a^b R_{22}(r, r_0) W'(r_0) dr_0 + \int_0^a R_{23}(r, r_0) \bar{\chi}(r_0) dr_0 \right\}, \quad (0 < r < \infty) \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
R_{11}(r, r_0) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{r_0 - r} - \frac{A_{11}}{r_0 + r} + B_{11} \frac{r_0(r_0 - r)}{(r_0 + r)^3} \right\}; \\
R_{12}(r, r_0) &= \frac{C_{12}}{\pi} \left\{ \frac{2r_0}{r_0^2 - r^2} - B_{12} \frac{r_0(r_0 - r)}{(r_0 + r)^3} \right\}; \\
R_{13}(r, r_0) &= \frac{2\mathfrak{G}_2}{\pi(\mathfrak{G}_2^2 - \mathfrak{G}_1^2)} \frac{r_0}{(r_0 + r)^2}; \quad R_{21}(r, r_0) = R_{12}(r, r_0) / C_{12}; \\
R_{22}(r, r_0) &= -\frac{1}{\pi\mathfrak{G}_1} \left\{ \frac{2r_0}{r_0^2 - r^2} - \frac{2r_0(r_0 - r)}{(r_0 + r)^3} \right\}; \quad R_{23}(r, r_0) = \frac{2\mathfrak{G}_2}{\pi\mathfrak{G}_1} \frac{r_0}{(r_0 + r)^2}; \\
A_{11} &= \frac{\mathfrak{G}_2^2 + \mathfrak{G}_1^2}{\mathfrak{G}_2^2 - \mathfrak{G}_1^2}; \quad B_{11} = \frac{2(\mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1)}{\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_1}; \quad B_{12} = 2 \left(1 - \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_1} \right); \quad C_{12} = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2^2 - \mathfrak{G}_1^2}; \\
\mathfrak{G}_1 &= \frac{1}{2(\lambda + \mu)}; \quad \mathfrak{G}_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)},
\end{aligned}$$

а λ и μ – коэффициенты Ламе.

Далее, используя формулы (3) и (4), удовлетворим условиям (16), первоначально продифференцируя первое из них. В итоге придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_0^a R_{11}(r, r_0) \chi(r_0) dr_0 + \int_a^b R_{12}(r, r_0) W'(r_0) dr_0 + \\
& + \int_a^b R_{13}(r, r_0) \bar{W}'(r_0) dr_0 = -\gamma^* \quad (0 < r < a) \\
& \int_0^a R_{21}(r, r_0) \chi(r_0) dr_0 + \int_a^b R_{22}(r, r_0) W'(r_0) dr_0 + \\
& + \int_0^a R_{23}(r, r_0) \bar{\chi}(r_0) dr_0 = \sigma_0^*(r), \quad (a < r < b) \\
& \left(\sigma_0^*(r) = \frac{2i\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_1} \sigma_0(r); \quad \gamma^* = \frac{2\mathfrak{G}_2\gamma}{\mathfrak{G}_2^2 - \mathfrak{G}_1^2} \right).
\end{aligned} \right. \quad (5)$$

Систему (5) нужно рассматривать совместно с условиями равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \chi(r) dr = P_0^*; \quad \int_a^b W'(r) dr = 0; \quad \operatorname{Re} \int_0^a r \chi(r) dr = 0; \\
(P_0^* = P_0 e^{i\alpha}).
\end{aligned} \quad (6)$$

При помощи замены переменных $r_0 = a(s+1)/2$, $r = a(x+1)/2$ на интервале $(0, a)$ и $r_0 = ps + q$, $r = px + q$ ($p = (b-a)/2$; $q = (b+a)/2$) на интервале (a, b) , систему (5) сформулируем на интервале $(-1, 1)$ и, введя безразмерные функции

$$\varphi_1(x) = a\chi(a(x+1)/2)/P_0; \quad \varphi_2(x) = W'(px+q);$$

$$\varphi_3(x) = \bar{\varphi}_1(x); \quad \varphi_4(x) = \bar{\varphi}_2(x),$$

придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{jk}(s, x) \varphi_k(s) ds = f_j(x). \quad (7)$$

Условия (6) при этом примут вид:

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = e^{i\alpha}; \quad \operatorname{Re} \int_{-1}^1 (x+1) \varphi_1(x) dx = 0; \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(x) dx = 0. \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$K_{11}(x, s) = - \frac{\left[4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2 \right]}{\mathfrak{a}(s+x+2)} + \frac{2(s+1)(s-x)}{\mathfrak{a}(s+x+2)^3};$$

$$K_{14}(x, s) = - \frac{4(1-\nu)E_0}{\mathfrak{a}} \frac{(s+\lambda_3)}{(s+\lambda_4x+2\lambda_2)^2};$$

$$K_{12}(x, s) = \frac{(1-2\nu)E_0}{(1+\nu)\mathfrak{a}} \left\{ \frac{1}{s-\lambda_4x+\lambda_1} - \frac{1}{s+\lambda_4x+\lambda_2} + \frac{2(s+\lambda_3)(s-\lambda_4x+\lambda_1)}{(1-2\nu)(s+\lambda_4x+\lambda_2)^3} \right\};$$

$$K_{21}(x, s) = - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} \left\{ \frac{1}{\lambda_4s-x-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_4s+x+\lambda_2} + \frac{2\lambda_4(s+1)(\lambda_4s-x-\lambda_1)}{(1-2\nu)(\lambda_4s+x+\lambda_2)^3} \right\};$$

$$\begin{aligned}
K_{22}(x, s) &= \frac{1}{s+x+2\lambda_3} + \frac{2(s+\lambda_3)(s-x)}{(s+x+2\lambda_3)^3}; \\
K_{23}(x, s) &= -\frac{4(1-\nu^2)}{E_0} \frac{\lambda_4(s+1)}{(\lambda_4 s+x+2\lambda_2)^2}; \\
K_{13}(x, s) &= K_{31}(x, s) = K_{24}(x, s) = K_{42}(x, s) = 0; \\
K_{32}(x, s) &= K_{14}(x, s); \quad K_{33}(x, s) = K_{11}(x, s); \\
K_{34}(x, s) &= K_{12}(x, s); \quad K_{41}(x, s) = K_{23}(x, s); \\
K_{43}(x, s) &= K_{21}(x, s); \quad K_{44}(x, s) = K_{22}(x, s); \\
f_1(x) = f_3(x) &= -\gamma_* = -\frac{4(1-\nu)\gamma}{\mathfrak{a}(1+\nu)}; \quad f_2(x) = -f_4(x) = \\
&= -\frac{4(1-\nu^2)}{E_0} \sigma_0^*(x); \quad \sigma_0^*(x) = \frac{a\sigma_0(a(x+1)/2)}{P_0}; \\
E_0 &= \frac{aE}{P_0}; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{\lambda-1}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda+2}{\lambda-1}; \quad \lambda_3 = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}; \quad \lambda_4 = \frac{1}{\lambda-1}; \quad \lambda = \frac{b}{a} > 1;
\end{aligned}$$

чёрточка над функциями означает их комплексно-сопряжённые величины, E – модуль упругости материала полуплоскости, ν – коэффициент Пуассона.

Отметим, что решение системы (7) при условиях (8) можно представить в виде:

$$\varphi_j(x) = \varphi_j^{(1)}(x) \cos \alpha + \varphi_j^{(2)}(x) \sin \alpha \quad (j=1-4),$$

где функции $\varphi_j^{(k)}(x)$ ($j=1-4$) при $k=1, 2$ являются соответственно решениями системы (7) при условиях (8), когда $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$. Следовательно, учитывая, что угол поворота включения в случае $\alpha=\pi/2$ равен нулю ввиду симметрии задачи относительно оси Oy , для угла поворота включений при любом значении α будем иметь формулу:

$$\gamma_*(\alpha) = \gamma_*(0) \cos \alpha.$$

Заметим также, что безразмерные контактные напряжения под включением, задаваемые формулой (4) при ($0 < r < a$), в новых обозначениях через функции

$\varphi_j(x)$ ($j=1-4$) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\chi_*^\pm(x) &= \frac{a \left[\sigma_\varphi^\pm(a(x+1)/2, 0) - i\tau_{r\varphi}^\pm(a(x+1)/2, 0) \right]}{P_0} = \\
&= \pm \frac{\varphi_1(x)}{2} + \frac{i(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(s)}{s-x} ds + \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 Q_j(x, s) \varphi_k(s) ds \quad (-1 < x < 1),
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$Q_1(x, s) = -\frac{2i(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{(s+x+2)} + \frac{(s+1)(s-x)}{(1-2\nu)(s+x+2)^3} \right\};$$

$$Q_2(x, s) = -\frac{iE_0}{4\pi(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{s-\lambda_4x+\lambda_1} - \frac{1}{s+\lambda_4x+\lambda_2} + \frac{2(s+\lambda_3)(s-\lambda_4x+\lambda_1)}{(s+\lambda_4x+\lambda_2)^3} \right\};$$

$$Q_3(x, s) = \frac{2i}{\pi} \frac{(s+1)}{(s+x+2)^2},$$

а безразмерные разрушающие напряжения на линии $\varphi = 0$ при $r > b$ определяются по формуле

$$\chi_*^\pm(x) = \frac{a \left[\sigma_\varphi^\pm(a(x+1)/2, 0) - i\tau_{r\varphi}^\pm(a(x+1)/2, 0) \right]}{P_0} = \quad (x > 1) \quad (10)$$

$$= -\frac{iE_0}{4\pi(1-\nu^2)} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(s)}{s-x} ds + \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 K_{2k}(s, x) \varphi_k(s) ds \right\}.$$

При помощи этой формулы нетрудно определить также приведённые коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины $r = b$, что соответствует точке $x = 1$:

$$K_I(1) - iK_{II}(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{x-1} \chi_*^\pm(x) \quad (11)$$

Для определения же приведённого раскрытия трещины будем иметь формулу:

$$v_*(x) = \frac{2}{a} \operatorname{Im} W(a(x+1)/2) = \operatorname{Im} \int_{-1}^x \varphi_2(s) ds. \quad (12)$$

Решение определяющей системы уравнений

Решение определяющей системы уравнений (7) при условиях (8) будем строить методом механических квадратур [10]. Для этого определим поведение искомых функций в концевых точках интервалов интегрирования. С этой целью заметим, что функции $K_{ij}(x, s)$ ($i, j = 1-4$) – регулярные функции почти всюду в квадрате $(-1 \leq x, s \leq 1)$, быть может, кроме точек $x+s=0$, где они могут иметь неподвижную особенность. Далее, методом Мусхелишвили [8] нетрудно установить, что функция $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 3$), как и следовало ожидать [9], в концевой точке $r = 0$ ($x = -1$) имеет особенность типа $(x+1)^{\beta-1}$ ($0 \leq \beta < 1$), где показатель β является корнем трансцендентного уравнения

$$\sin^2 \frac{\beta\pi}{2} = \frac{(1+\varkappa)^2}{4\varkappa} - \frac{\beta^2}{\varkappa}; \quad (\varkappa = 3-4\nu).$$

В точке $r = a$ ($x = \pm 1$) функции $\varphi_j(x)$ ($j = 1-4$) имеют особенность типа $(1 \pm x)^{\frac{1}{2} \pm i\beta_1}$ ($\beta_1 = \ln \varkappa / 2\pi$). В точке же $r = b$ ($x = 1$) функции $\varphi_j(x)$ ($j = 2, 4$) имеют обычную корневую особенность.

Исходя из этого, искомые функции представим в виде :

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_1^*(x)}{(1-x)^{0.5+i\beta_1}(1+x)^{1-\beta}}; \quad \varphi_2(x) = \frac{\varphi_2^*(x)}{(1-x)^{0.5}(1+x)^{0.5+i\beta_1}}, \quad (13)$$

где $\varphi_i^*(x)$ ($i = 1, 2$) – непрерывные гладкие функции, ограниченные на отрезке $[-1, 1]$.

Заметим, что в этом случае по формуле (11) для определения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины $r = b$ получим формулу:

$$K_I(1) - iK_{II}(1) = \frac{i2^{-2-i\beta_1} \sqrt{\pi} E_0}{(1-\nu^2)} \varphi_2^*(1).$$

Подставляя представления (12) в (7) и (8), на основе метода механических квадратур [10], придём к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n w_{ik} \left[\frac{(1 - q_{ik}(x_k))}{s_{ik} - x_k} \right] \varphi_m^*(s_{ik}) + \sum_{p=1}^4 \sum_{i=1}^n w_{ip} K_{mp}^*(x_k, s_i) \varphi_p^*(s_{ip}) = \pi f_m(x_k)$$

$$\sum_{i=1}^n w_{i1} \varphi_1^*(s_{i1}) = e^{i\alpha} \quad \sum_{i=1}^n w_{i1} \varphi_3^*(s_{i3}) = e^{-i\alpha} \quad \sum_{i=1}^n w_{ij} \varphi_j^*(s_{ij}) = 0; \quad (j = 2, 4).$$

Здесь $s_{ik} (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, 2})$ – корни полинома Якоби $P_n^{(\gamma_k, \sigma_k)}(x)$,
 $x_k (k = \overline{1, n-1})$ – корни полинома Якоби $P_{n-1}^{(\gamma_k, \sigma_k)}(x)$, $(\gamma_1, \sigma_1) = (\beta - 1, -0.5 + i\beta_1)$;
 $(\gamma_2, \sigma_2) = (-0.5 - i\beta_1, \beta - 1)$

$$w_{ik} = \frac{2}{n + \gamma_k + \sigma_k} \frac{Q_n^{(\gamma_k, \sigma_k)}(s_{ik})}{P_{n-1}^{(\gamma_k, \sigma_k)}(s_{ik})}; \quad q_{ik}(z) = \frac{Q_n^{(\gamma_k, \sigma_k)}(z)}{Q_n^{(\gamma_k, \sigma_k)}(s_{ik})};$$

$$Q_n^{(\gamma_i, \sigma_i)}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} 2^{2+\gamma_i+\sigma_i} \frac{\Gamma(n+\gamma_k)\Gamma(n+\sigma_k)}{\Gamma(2n+2+\gamma_k+\sigma_k)} F\left(n+1, n+\gamma_k; 2n+2+\gamma_k+\sigma_k; \frac{2}{1-z}\right) & z \notin [-1, 1] \\ (Q_n^{(\gamma_i, \sigma_i)}(z+i0) + Q_n^{(\gamma_i, \sigma_i)}(z-i0)) / 2 & (-1 < z < 1). \end{cases}$$

Таким образом, получена замкнутая система для определения значений $\varphi_k^*(s_{ik}) (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, 2})$, посредством которых можно вычислить значения

регулярных частей искомым скачков обезразмеренных напряжений $\Phi_j^*(x)$ ($j = 1, 2$) в произвольной точке отрезка $[-1, 1]$.

Численные расчёты

Проведён численный анализ поставленной задачи и изучены закономерности изменения распределения контактных напряжений под включением, угла поворота включения, раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в зависимости от соотношения $\lambda = a/b$ и угла α в случае, когда берега трещины свободны от напряжений, т.е., когда $\sigma_0^*(x) \equiv 0$.

Результаты вычислений приведены в форме таблиц и графиков. В табл.1 приведены значения приведённого угла поворота включения $\gamma_*(0)$ в зависимости от изменения коэффициента Пуассона ν в случае, когда $\lambda = 2$; $E_0 = 10$. Из неё видно, что при увеличении коэффициента Пуассона угол поворота включений уменьшается.

Таблица 1. Угол поворота включения $\gamma(0)$

ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
$\gamma(0)$	0.2965	0.2936	0.2845	0.2683	0.2571

В табл.2 приведены значения приведённого коэффициента интенсивности $K_I(1)$ в зависимости от λ в случае, когда $\alpha = \pi/2$, $E_0 = 10$ и $\nu = 0.3$. Из этой таблицы явствует, что при увеличении λ , что при постоянной длине включения можно трактовать как увеличение длины трещины, приведённый коэффициент интенсивности уменьшается, т.е., чем короче трещина, тем больше вероятность её распространения.

Таблица 2. Коэффициент интенсивности $K_I(1)$

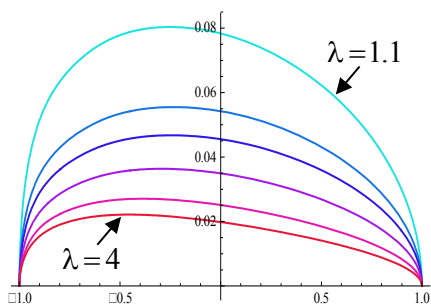
λ	1.1	1.5	2	2.5	3.	4.
$K_I(1)$	0.7617	0.3292	0.2162	0.1636	0.1319	0.0946

В табл.3 приведены значения приведённого коэффициента интенсивности $K_I(1)$ и $K_{II}(1)$ в зависимости от угла α в случае, когда $\lambda = 2$; $E_0 = 10$ и $\nu = 0.3$. Из этой таблицы видно, что при увеличении угла α $K_I(1)$ увеличивается, а $K_{II}(1)$ уменьшается.

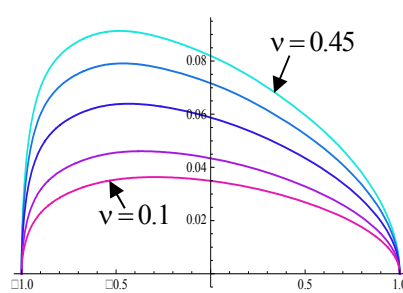
Таблица 3. Коэффициенты интенсивностей $K_I(1)$ и $K_{II}(1)$ (при $\nu = 0.3$)

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$K_I(1)$	0	0.1080	0.1528	0.11872	0.2162
$K_{II}(1)$	0.0258	0.0224	0.0183	0.0130	0

На фиг. 2 и 3 приведены графики нормальных составляющих приведённого раскрытия трещины соответственно в случаях, когда $\alpha = \pi/2$, $E_0 = 10$, $\nu = 0.4$ и когда $\alpha = \pi/2$, $\lambda = 2$; $E_0 = 10$. В первом случае исследована закономерность изменения приведённого раскрытия трещины в зависимости от параметра λ , а во втором случае – в зависимости от коэффициента Пуассона. Как видно из фигур, при увеличении λ приведённое раскрытие трещины уменьшается, а при увеличении коэффициента Пуассона – увеличивается.

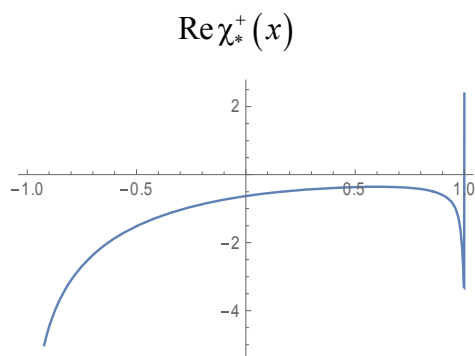


Фиг. 2

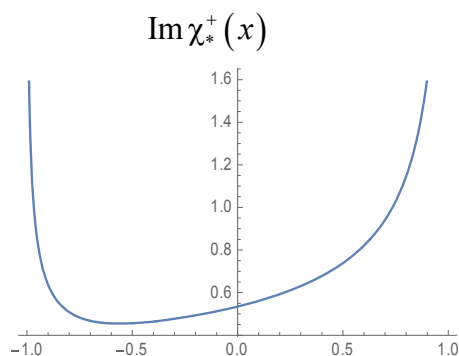


Фиг. 3

На фиг. 4 и 5 соответственно приведены графики приведённых нормальных и касательных контактных напряжений в случае, когда $\alpha = \pi/2$, $b/a = 2$, и $\nu = 0,4$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Вычисления показывают, что контактные напряжения практически не зависят как от параметра b/a , так и от коэффициента Пуассона.

Заключение. Построено эффективное решение задачи о плоско-деформированном состоянии упругой полуплоскости, содержащей перпендикулярно выходящее на границу абсолютно жёсткое тонкое включение и непосредственно продолжающее его конечную трещину. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в зависимости от физическо-механических и геометрических характеристик задачи. Показано, что чем меньше длина трещины, тем больше коэффициент интенсивности разрушающих напряжений, и следовательно, больше угроза распространения трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reissner E. Note in the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet.- Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1940, v.26, p.300-305.
2. Абрамян Б.Л. Об одной контактной задаче для полуплоскости.//Изв. АН СССР. МТТ.1972. № 5. С.4-10.

3. Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости. // Учёные записки ЕГУ. Естеств. науки. 1981. № 3. С.32-43.
4. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. // Прикл. Механика. Труды амер. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. 1968. Т.35. № 4. С.124-135.
5. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитуцюн», 2014. 323с.
6. Акопян В.Н., Амирджанян А.А. Напряжённое состояние полуплоскости с абсолютно жёстким включением и трещиной. // В сб. трудов 8-ой Межд. Конференции: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 22-26, 2014. Горис-Степанакерт. С.43-47.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
9. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311с.
10. Sahakyan A.V. Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Georgia. Vol. 156 (2011), pp.101-111.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН Армении. Тел.:(37410) 52-48-90,
E-mail: vhakobyan@sci.am .

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении. Тел.: (37410) 52-48-90,
E-mail: amirjanyan@gmail.com .

Поступила в редакцию 09.12.2014