

УДК 621.38

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОЛОЖЕНИИ И ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ЗВЕНЬЕВ МАНИПУЛЯТОРА

Гукасян А.А.

Ключевые слова: многозвенный упругий манипулятор, пространственное положение манипулятора, деформация упругого звена.

Key words: multi link elastic manipulator, spatial position of the manipulator, deformation of the elastic link.

Դուկասյան Ա.Ա.

Մանիպուլյատորի տարածական դիրքի և առաձգական օղակների դեֆորմացիայի մասին

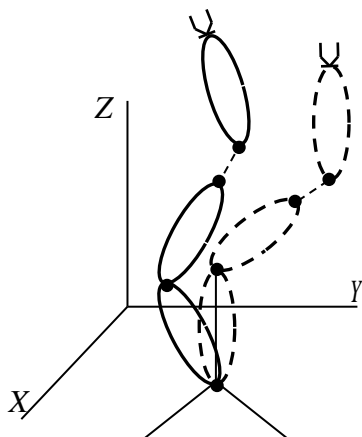
Ուսումնասիրվում է մանիպուլյատորի տարածական դիրքերի որոշման հարցերը, երբ վերջին օղակը մոդելավորված է որպես առաձգական մարմին: Բերված են առաձգական օղակի կամայական էլեմենտի դեֆորմացիայի երկրաչափության ընդհանուր հասկացությունները և որոշված են դեֆորմացիայի կոմպոնենտները: Ստացված ընդհանուր բանաձևերը (արտահայտությունները) կիրառված են միաչափ մոդելի համար, երբ մանիպուլյատորի օղակները մոդելավորված են որպես առաձգական չձգվող ձողեր:

Ghukasyan A.A.

On a spatial position and deformation of manipulator elastic links

The questions of determining the spatial positions of the manipulator when the last link is modeled as an elastic body are studied. The general concepts of geometry of the deformation of any elements of the elastic link are given and the deformation components are defined. General formulas (expressions) obtained are used for the one-dimensional model, that is, when the links of manipulator are modeled as non-stretchable elastic bars.

Исследуются вопросы об определении пространственного положения манипулятора в случае, когда последнее звено моделируется как упругое тело. Приведены общие понятия о геометрии деформации произвольного элемента упругого звена и определены компоненты деформации. Полученные в общем случае формулы (выражения) применяются для одномерной модели, то есть когда звенья моделируются как упругие нерастяжимые стержни.



Փիգ.1

Введение. Рассматривается многозвенный манипулятор, звенья которого (или часть из них) моделируются как упругие тела (фиг.1). Такие механические системы манипулятора являются распределёнными системами, то есть системы, конфигурация которых не может быть определена заданием конечного числа обобщённых координат [1-10]. Здесь предполагается, что упругие звенья манипулятора последовательно связаны между собой вращательными и поступательными кинематическими парами пятого класса, допускающими относительные повороты и линейные перемещения. Опреде-

ляется пространственное положение упругого манипулятора и следуя работам [11,12], приведено общее понятие о деформации упругого тела, которое применено для изучения упругих манипуляционных роботов. Далее, в частном случае, исследуется одномерная модель упругого манипулятора, то есть когда звенья моделируются как упругие нерастяжимые стержни.

1. Относительное положение точек упругого звена манипулятора.

Для определения пространственного положения упругого многозвенного манипулятора во время движения, для определённости и не ограничивая общности, предполагаем, что последнее звено моделируется как упругое тело (фиг.2). В этом случае, представляя заданными положение основания последнего упругого звена относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ и элементы матриц направляющих косинусов осей локальной системы координат $Oxyz$, жёстко связанной с недеформированным состоянием упругого звена, можно определить положение точек (схвата) относительно подвижной и неподвижной систем.

Положение произвольной точки A звена в недеформированном состоянии относительно начала связанной системы координат $Oxyz$ определим радиус-вектором $\mathbf{r}(x, y, z)^T$. Здесь и в дальнейшем буква “т” обозначает транспонирование вектора или матрицы.

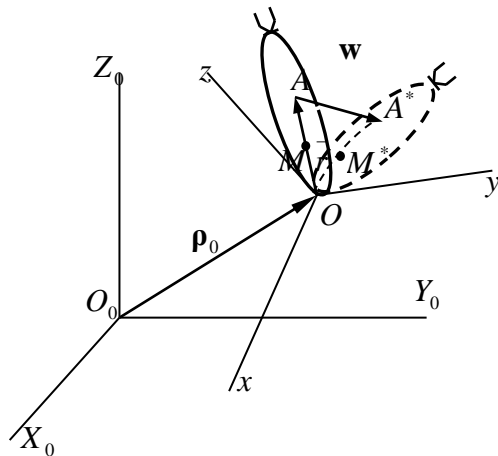
Вектор упругих перемещений точки A обозначим через \mathbf{w} , который зависит как от координат точки A , так и от времени

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

Проекции вектора (1.1) на оси системы координат $Oxyz$ обозначим через $w_1(x, y, z, t)$, $w_2(x, y, z, t)$, $w_3(x, y, z, t)$, соответственно.

Следовательно, радиус-вектор абсолютного положения точек упругого звена манипулятора во время движения относительно инерциальной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется радиус-вектором ρ

$$\rho = \rho_0 + \mathbf{r} + \mathbf{w} \quad (1.2)$$



Фиг. 2

где ρ_0 – радиус-вектор точки O относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

Радиус-вектор произвольной точки A звена после деформации относительно связанной системы координат $Oxyz$ будет

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + \mathbf{w} \quad (1.3)$$

или в проекциях

$$\begin{aligned} x_* &= x + w_1(x, y, z, t); \\ y_* &= y + w_2(x, y, z, t); \\ z_* &= z + w_3(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь функции w_i ($i=1,2,3$), а также

их частные производные по x, y, z, t будем считать непрерывными. Это ограничение является условием непрерывности деформации.

Радиус-вектор произвольной точки A упругого звена после деформации относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется соотношениями (1.2)–(1.4).

Представим (1.2) в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + (x + w_1(x, y, z, t))\mathbf{i} + (y + w_2(x, y, z, t))\mathbf{j} + (z + w_3(x, y, z, t))\mathbf{k}, \quad (1.5)$$

где $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – единичные векторы осей системы координат $Oxyz$.

Умножая (1.5) последовательно на единичные векторы $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ осей системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, получим

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + [x + w_1(x, y, z, t)]\alpha_{11} + [y + w_2(x, y, z, t)]\alpha_{21} + \\ &+ [z + w_3(x, y, z, t)]\alpha_{31} \\ y_A &= y_0 + [x + w_1(x, y, z, t)]\alpha_{12} + [y + w_2(x, y, z, t)]\alpha_{22} + \\ &+ [z + w_3(x, y, z, t)]\alpha_{32} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} z_A &= z_0 + [x + w_1(x, y, z, t)]\alpha_{13} + [y + w_2(x, y, z, t)]\alpha_{23} + \\ &+ [z + w_3(x, y, z, t)]\alpha_{33} \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned} (x_A, y_A, z_A)^T &= (x_0, y_0, z_0)^T + \\ &+ \mathbf{\Gamma}^T (x + w_1(x, y, z, t), y + w_2(x, y, z, t), z + w_3(x, y, z, t))^T, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где матрица преобразования $\mathbf{\Gamma}^T$ имеет вид

$$\mathbf{\Gamma}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}$ матрицы $\mathbf{\Gamma}^T$ являются направляющими косинусами осей

системы координат $Oxyz$ в системе отсчёта $O_0X_0Y_0Z_0$.

Из условия ортогональности матрицы $\mathbf{\Gamma}$ следует, что обратная ей матрица совпадает с транспонированной [13,14]

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{\Gamma}^T; \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}. \quad (1.8)$$

Формулу обратного преобразования можно определить, проектируя (1.5) на оси системы координат $Oxyz$, связанной с недеформируемым состоянием упругого звена манипулятора.

Умножая (1.5) последовательно на единичные векторы $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, осей системы координат $Oxyz$, получим:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}(x_A - x_0) + \alpha_{12}(y_A - y_0) + \alpha_{13}(z_A - z_0) - w_1(x, y, z, t) \\ y &= \alpha_{21}(x_A - x_0) + \alpha_{22}(y_A - y_0) + \alpha_{23}(z_A - z_0) - w_2(x, y, z, t) \\ z &= \alpha_{31}(x_A - x_0) + \alpha_{32}(y_A - y_0) + \alpha_{33}(z_A - z_0) - w_3(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

или в матричном виде

$$(x, y, z)^T = \Gamma[(x_A - x_0), (y_A - y_0), (z_A - z_0)]^T - [w_1(x, y, z, t), w_2(x, y, z, t), w_3(x, y, z, t)]^T. \quad (1.10)$$

Преобразования (1.7) и (1.10), соответственно можно представить также в однородных координатах [13,14], то есть

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^T & \Gamma^T \mathbf{w} + \boldsymbol{\rho}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\rho}^* = \mathbf{T} \mathbf{r}^* \quad (1.11)$$

и

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma \boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{T}^* \boldsymbol{\rho}^*. \quad (1.12)$$

Здесь (4×4) -мерные матрицы преобразования \mathbf{T} и \mathbf{T}^* имеют следующие структуры, соответственно:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \Gamma^T & \Gamma^T \mathbf{w} + \boldsymbol{\rho}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma \boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\rho}^* = (x_A \ y_A \ z_A \ 1)^T$ – радиус-вектор абсолютного положения точек упругого звена манипулятора относительно системы координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ в однородных координатах, а $\mathbf{r}^* = (x \ y \ z \ 1)^T$ – радиус-вектор произвольной точки A относительно начала связанной системы $Oxyz$ в однородных координатах [13,14].

Преимуществом применения однородных координат в механике, как известно, является то обстоятельство, что движение твёрдого тела в евклидовом пространстве R^3 , составленное из вращения (поворота), определяемого ортогональной матрицей Γ размерности 3×3 и параллельного переноса, задаваемого вектором $\boldsymbol{\rho}_0$, то есть преобразование вида $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 + \Gamma^T \mathbf{r}$ (1.6) при $\mathbf{w} \equiv 0$ ($\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \in R^3$), эквивалентно в однородных координатах линейному преобразованию специального вида (1.11), (1.12) при $\mathbf{w} \equiv 0$. Здесь приведено обобщение применений однородных координат в случае пространственного движения тела, обладающего упругой податливостью (1.11), (1.12), в частности, для описания движения звеньев манипулятора с упругими свойствами.

2. Общие понятия о геометрии деформации упругого звена манипулятора.

Ниже для определённости приводятся некоторые общие понятия и соотношения теории упругости деформируемого тела, которые применимы для изучения кинематики и динамики упругих манипуляционных роботов [11,12].

По формуле (1.4) определим проекции произвольного линейного элемента тела после деформации, через его проекции до деформации. По направлению вектора \mathbf{r} возьмём произвольный линейный элемент OM , проекцией которого в момент времени t на оси системы координат $Oxyz$ является (dx, dy, dz) фиг.2. После

деформации точка M переместится в положение M_* на дуге OA_* . Координаты точки M_* в системе $Ox_1y_1z_1$ обозначим через dx_* , dy_* , dz_* , соответственно.

Связь между координатами точки M_* и M определяется согласно (1.4) в виде :

$$\begin{aligned} dx_* &= \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial w_1}{\partial y} dy + \frac{\partial w_1}{\partial z} dz; \\ dy_* &= \frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial w_2}{\partial z} dz; \\ dz_* &= \frac{\partial w_3}{\partial x} dx + \frac{\partial w_3}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right) dz; \end{aligned} \quad (2.1)$$

или $d\mathbf{r}_* = \mathbf{D}d\mathbf{r}$,

где $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}_*$ – векторы с компонентами $(dx, dy, dz)^T$ и $(dx_*, dy_*, dz_*)^T$, соответственно, а \mathbf{D} – следующая матрица:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial w_1}{\partial x} & \frac{\partial w_1}{\partial y} & \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} & 1 + \frac{\partial w_2}{\partial y} & \frac{\partial w_2}{\partial z} \\ \frac{\partial w_3}{\partial x} & \frac{\partial w_3}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w_3}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Решая систему (2.1) относительно dx , dy и dz , можно определить также координаты точки M до деформации через координаты точки M_* после деформации

$$d\mathbf{r} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D}_* d\mathbf{r}_* \quad (2.3)$$

где \mathbf{D}_* – матрица с элементами $\{d_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}$

$$\begin{aligned} d_{11} &= \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right) - \frac{\partial w_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial y}; & d_{12} &= \frac{\partial w_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right) \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ d_{13} &= \frac{\partial w_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial z} - \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) \frac{\partial w_1}{\partial z}; & d_{21} &= \frac{\partial w_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right) \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ d_{22} &= \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right) - \frac{\partial w_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial x}; & d_{23} &= \frac{\partial w_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \frac{\partial w_2}{\partial z} \\ d_{31} &= \frac{\partial w_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) \frac{\partial w_3}{\partial x}; & d_{32} &= \frac{\partial w_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \frac{\partial w_3}{\partial y} \\ d_{33} &= \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial w_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{aligned}$$

Определим компоненты деформации упругого звена. Разность расстояния между точками O и M (фиг.2) до деформации и после деформации, то есть расстояниями между точками O и M_* с учётом (2.1) являются:

$$\begin{aligned} |OM|^2 &= ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2; \\ |OM^*|^2 &= ds_*^2 = dx_*^2 + dy_*^2 + dz_*^2; \\ ds_*^2 - ds^2 &= 2(\varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \varepsilon_{zz} dz^2 + \varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{xz} dx dz + \varepsilon_{yz} dy dz), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w_3}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial x} \frac{\partial w_3}{\partial y} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x} \frac{\partial w_3}{\partial z} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y} \frac{\partial w_3}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Данные шесть величин $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$, выражающиеся через перемещения формулами (2.5), будучи известными в каждой точке тела, полностью характеризуют его деформацию. Равенство их нулю во всех точках тела означает неизменность расстояний между любыми его двумя точками, что равносильно абсолютной жёсткой модели звена манипулятора. Компоненты деформации $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ характеризуют удлинения тех линейных элементов звена, которые до деформации параллельны координатным осям, а компоненты $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ – сдвиги. Если последние три компоненты деформации равны нулю, то углы между линейными элементами dx, dy, dz остаются прямыми и после деформации [11,12].

Пренебрегая в формулах (2.5) величинами второго порядка малости относительно первого, приходим к формулам классической теории упругости, где имеют место следующие выражения для компонентов деформации [11,12]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_3}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При описании математической модели различных распределённых систем применяются также принципы технической и уточнённой теории упругости [15]. Обычно в прикладных задачах звенья промышленных манипуляционных роботов моделируются как массивные тела, а звенья специальных манипуляционных роботов – как одномерные упругие тела, в частности, упругие нерастяжимые стержни со значительными линейными размерами.

Определим направляющие косинусы координатных линий. Пусть линейный элемент до деформации параллелен оси OX , имея проекции $(OM)_x = dx$, $(OM)_y = 0$, $(OM)_z = 0$ (фиг. 3). Тогда согласно (2.1) его проекции после деформации будут равны

$$dx_* = \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) dx, \quad dy_* = \frac{\partial w_2}{\partial x} dx, \quad dz_* = \frac{\partial w_3}{\partial x} dx. \quad (2.7)$$

Длина элемента после деформации будет

$$\begin{aligned} (ds_*)_x &= \sqrt{(dx_*)^2 + (dy_*)^2 + (dz_*)^2} dx = \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\right)^2} dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

В соответствии с (2.5), имеем:

$$(ds_*)_x = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} dx \quad (2.9)$$

Отсюда косинусы углов, образуемых вектором OM^* с осями OX , OY , OZ (в том случае, когда OM параллелен оси OX), определяются формулами:

$$\cos(OM_*, OX) = \frac{dx_*}{(ds_*)_x} = \frac{1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}; \quad (2.10)$$

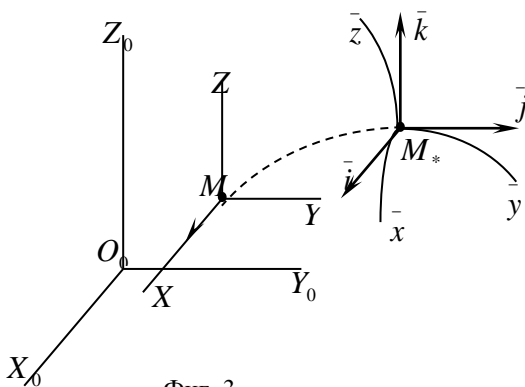
$$\cos(OM_*, OY) = \frac{dy_*}{(ds_*)_x} = \frac{\frac{\partial w_2}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}; \quad \cos(OM_*, OZ) = \frac{dz_*}{(ds_*)_x} = \frac{\frac{\partial w_3}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}$$

В случае, когда тело абсолютно жёсткое ($\mathbf{w} \equiv 0$) (деформации отсутствуют),

$$\angle(OM, OX) = 0, \quad \angle(OM, OY) = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle(OM, OZ) = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Линейный}$$

элемент dx в результате деформации превращается в элемент дуги x в деформированном теле. Ввиду этого формулы (2.10) дают направляющие косинусы касательной к этой линии в точке M_* (фиг.3).



Фиг. 3

Путем аналогичных рассуждений, но применяя их к линейным элементам dy и dz , можно вывести выражения и для направляющих косинусов касательных к линиям \bar{y} и \bar{z} в той же точке.

Обозначая единичные векторы, направленные по касательным линиям $M_*\bar{x}, M_*\bar{y}, M_*\bar{z}$ в точке M_* через $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ (фиг.3), можно составить следующую таблицу направляющих косинусов [11,12]:

Таблица 1

	$\bar{\mathbf{i}}$	$\bar{\mathbf{j}}$	$\bar{\mathbf{k}}$
x	$\frac{1 + \frac{\partial w_1}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}$	$\frac{\frac{\partial w_1}{\partial y}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}}$	$\frac{\frac{\partial w_1}{\partial z}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}}}$
y	$\frac{\frac{\partial w_2}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}$	$\frac{1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}}$	$\frac{\frac{\partial w_2}{\partial z}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}}}$
z	$\frac{\frac{\partial w_3}{\partial x}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}}$	$\frac{\frac{\partial w_3}{\partial y}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}}$	$\frac{1 + \frac{\partial w_3}{\partial z}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}}}$

где $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ определяются выражением (2.5).

Рассмотрим теперь случай, когда линейный элемент после деформации (dx_*) становится параллельным оси OX (фиг.4). Согласно (2.3) его проекции до деформации равны

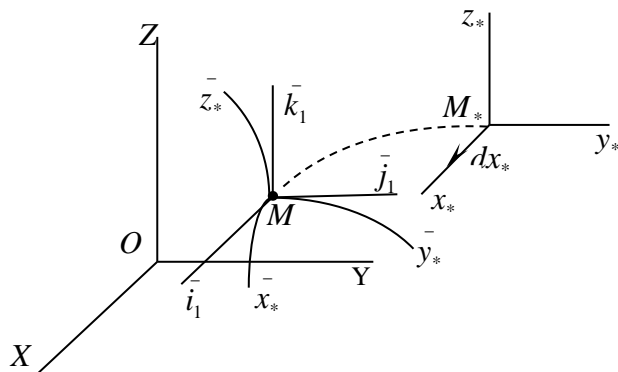
$$dx = \frac{d_{11}}{\det \mathbf{D}} dx_*, \quad dy = \frac{d_{21}}{\det \mathbf{D}} dx_*, \quad dz = \frac{d_{31}}{\det \mathbf{D}} dx_*, \quad (2.11)$$

а длина этого элемента до деформации будет

$$(ds)_{x_*} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2} dx_* \quad (2.12)$$

Направляющими косинусами до деформации элемента (2.11) в системе координат с единичными векторами $(\bar{\mathbf{i}}_1, \bar{\mathbf{j}}_1, \bar{\mathbf{k}}_1)$ являются:

$$\begin{aligned} \cos(OX, \bar{\mathbf{i}}_1) &= \frac{dx}{(ds)_{x_*}} = \frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}; \\ \cos(OY, \bar{\mathbf{i}}_1) &= \frac{dy}{(ds)_{x_*}} = \frac{d_{21}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}; \\ \cos(OZ, \bar{\mathbf{i}}_1) &= \frac{dz}{(ds)_{x_*}} = \frac{d_{31}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$



Фиг. 4

Косинусы (2.13) определяют направление (до деформации) того линейного элемента, проходящего через точку M , который в результате деформации становится параллельным оси OX , или они определяют направление касательной $\bar{\mathbf{i}}_1$ к линии Mx_* в точке M .

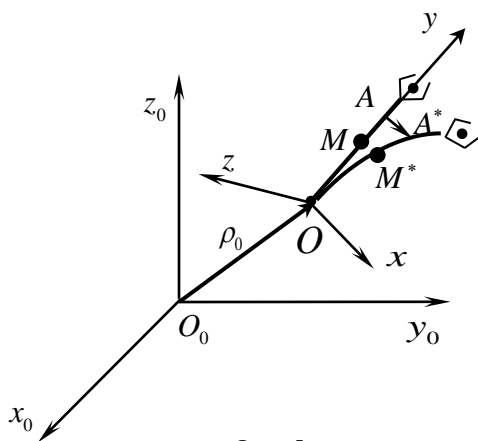
Путём

аналогичных рассуждений, но применяя их к линейным элементам dy_* и dz_* , которые параллельны осям OY и OZ , соответственно (фиг. 4), можно определить направляющие косинусы углов, задающих направление касательных к линиям $M\bar{y}_*$ и $M\bar{z}_*$ [11,12].

На основе проведённых вычислений, можно составить следующую таблицу направляющих косинусов:

Таблица 2

	$\bar{\mathbf{i}}_1$	$\bar{\mathbf{j}}_1$	$\bar{\mathbf{k}}_1$
x	$\frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}$	$\frac{d_{12}}{\sqrt{d_{12}^2 + d_{22}^2 + d_{32}^2}}$	$\frac{d_{13}}{\sqrt{d_{13}^2 + d_{23}^2 + d_{33}^2}}$
y	$\frac{d_{21}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}$	$\frac{d_{22}}{\sqrt{d_{12}^2 + d_{22}^2 + d_{32}^2}}$	$\frac{d_{23}}{\sqrt{d_{13}^2 + d_{23}^2 + d_{33}^2}}$
z	$\frac{d_{31}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2}}$	$\frac{d_{32}}{\sqrt{d_{12}^2 + d_{22}^2 + d_{32}^2}}$	$\frac{d_{33}}{\sqrt{d_{13}^2 + d_{23}^2 + d_{33}^2}}$



Фиг. 5

Таблица 2 определяет направляющие косинусы касательных к линиям Mx_* , $M\bar{y}_*$, $M\bar{z}_*$, в точке M , или определяет направляющие косинусы тех волокон, проходящих через точку M , которые после деформации звена манипулятора становятся параллельными осям OX , OY , OZ , соответственно.

3. Одномерная модель упругого манипулятора (частный случай). Предполагается, что звенья манипулятора (или часть из них) моделируются как упругие стержни, а соединительные

шарниры – идеально-цилиндрические. Не ограничивая общности, здесь также предполагается, что движение основания последнего упругого звена задано (фиг.5). Система координат $O_0X_0Y_0Z_0$ является инерциальной, а $Oxyz$ связана с упругим звеном и ось Oy совпадает с недеформированным состоянием упругого звена манипулятора.

Приведём основные формулы, определяющие положение и упругие деформации манипулятора, полученные в пп.1.2.

Радиус-вектор произвольной точки A относительно системы координат $Oxyz$ и вектор упругих перемещений (1.1) здесь зависят только от координат y и t .

$$\mathbf{r}(0, y, 0), \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}(0, y, 0, t) \quad (w_1(0, y, 0, t), w_2(0, y, 0, t), w_3(0, y, 0, t)) \quad (3.1)$$

Радиус-вектор точки A после деформации относительно системы координат $Oxyz$ (1.3), (1.4) и $O_0X_0Y_0Z_0$ (1.5), (1.7) имеет соответствующий вид:

$$\begin{aligned} x_* &= w_1(0, y, 0, t) \\ y_* &= y + w_2(0, y, 0, t) \\ z_* &= w_3(0, y, 0, t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 + w_1(0, y, 0, t)\mathbf{i} + (y + w_2(0, y, 0, t))\mathbf{j} + w_3(0, y, 0, t)\mathbf{k}$$

или

$$\begin{aligned} (x_A, y_A, z_A)^T &= (x_0, y_0, z_0)^T + \\ &+ \boldsymbol{\Gamma}^T (w_1(0, y, 0, t), y + w_2(0, y, 0, t), w_3(0, y, 0, t))^T \end{aligned} \quad (3.3)$$

Простым вычислением можно получить и формулы (1.9)-(1.12) для рассматриваемого случая.

Связь между координатами точек M и M_* , то есть связь между координатами точки до и после деформации нейтральной линии упругого стержня имеет вид:

$$dx_* = \frac{\partial w_1}{\partial y} dy; \quad dy_* = \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right) dy; \quad dz_* = \frac{\partial w_3}{\partial y} dy \quad (3.4)$$

Расстояние между точками O и M до и после деформации, то есть расстояние между точками O и M_* с учётом (3.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dy^2 \\ ds_*^2 &= \left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 dy^2 + \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)^2 dy^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Условия нерастяжимости упругого звена манипулятора приводят к некоторому соотношению между функциями $w_1(0, y, 0, t)$, $w_2(0, y, 0, t)$, $w_3(0, y, 0, t)$, представляющему здесь уравнение связи [16]. Эту связь получим, предполагая, что длина ds элемента упругого звена остаётся неизменным после деформации, то есть

$$ds_* = ds,$$

или из (3.5)

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (3.6)$$

Считая $w_1(0, y, 0, t)$, $w_3(0, y, 0, t)$ и их производные по y и t малыми величинами первого порядка относительно длины упругого звена [16],

$$w_i(0, y, 0, t) \sim \varepsilon, w'_i(0, y, 0, t) \sim \varepsilon, \dot{w}_i(0, y, 0, t) \sim \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (i = 1, 3) \quad (3.7)$$

следует на основании (3.6) принять, что $w_2(0, y, 0, t)$, $w'_2(0, y, 0, t)$ и $\dot{w}_2(0, y, 0, t)$ имеют второй порядок малости, то есть

$$w_2(0, y, 0, t) \sim \varepsilon^2, w'_2(0, y, 0, t) \sim \varepsilon^2, \dot{w}_2(0, y, 0, t) \sim \varepsilon^2 \quad (3.8)$$

Следовательно, пренебрегая в (3.6) величиной $(w'_2(0, y, 0, t))^2$, как четвёртого порядка малости (ε^4), можно условия связи (3.6) записать в виде

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (3.9)$$

(производные по y в (3.7), (3.8) обозначены штрихом, а по t – точкой).

Исследование пространственного движения упругого манипулятора, звенья которого моделируются как нерастяжимые упругие стержни, в рамках линейной теории следует пренебрегать величиной w_2 , как второго порядка малости. Подробные исследования приведены в работе [10].

Определим направляющие косинусы координатной линии. В данном случае линейный элемент OM нейтральной линии упругого стержня (звена манипулятора) находится на оси Oy , то есть $(OM)_x = 0$, $(OM)_y = dy$, $(OM)_z = 0$ и его проекции на осях системы координат $Oxyz$ после деформации определяются соотношением (3.4). Длина элемента после деформации с учётом (2.5) будет

$$ds_* = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} \right)^2} dy = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} dy. \quad (3.10)$$

Отсюда косинусы углов, образуемых вектором OM^* с осями Ox , Oy , Oz определяются функциями

$$\begin{aligned} \cos(OM_*, OX) &= \frac{dx_*}{ds_*} = \frac{\frac{\partial w_1}{\partial y}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}}, \\ \cos(OM_*, OY) &= \frac{dy_*}{ds_*} = \frac{1 + \frac{\partial w_2}{\partial y}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}}, \\ \cos(OM_*, OZ) &= \frac{dz_*}{ds_*} = \frac{\frac{\partial w_3}{\partial y}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Линейный элемент dy в результате деформации превращается в элемент дуги \bar{y} (фиг.3). Ввиду этого формулы (3.11) дают направляющие косинусы касательной к этой линии в точке M^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
2. Черноусько Ф.Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. //Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №5. С.142-152.
3. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жёсткости. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №4. С.101-113.
4. Акуленко Л.Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия. //ПММ. 1981. Т.45. Вып.6. С.1095-1103.
5. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня. //ПММ. 1982. Т.46. Вып.4. С.587-595.
6. Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №3. С.118-124.
7. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоским движением упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №5. С.33-41.
8. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3. С.63-71.
9. Болотник Н.Н., Гукасян А.А. Управление движением манипулятора с учётом упругих колебаний струны. //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №4. С.38-46.
10. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.79-87.
11. Новожилов В.В. Теория упругости. Ленинград: Судпромгиз, 1958. 245 с.
12. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
13. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. 478 с.
14. Динамика управления роботами. Под редакцией Б.И.Юревича. М.: Наука, 1984. 336 с.
15. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384с.
16. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 824 с.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апрегович - доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Е-mail: ghukasyan10@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.05.2014