ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

**УДК 517.934**

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫМИ СОСТАВНЫМИ СИСТЕМАМИ

**Барсегян В.Р., Шагинян С.Г., Барсегян Т.В.**

**Ключевые слова:** составная система, асимптотическая устойчивость, оптимальная стабилизация.
**Keyword:** compound system, asymptotic stability, optimal stabilization.

**Բարսեղյան Վ.Ռ., Շահինյան Ս.Գ., Բարսեղյան Տ.Վ.**
**Գծային կապակցված համակարգերի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի մի խնդրի մասին**

Հետազոտված է գծային կապակցված համակարգերի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիր: Օգտվելով Լյապունովի ֆունկցիայի եղանակից, առաջարկված է օպտիմալ ստաբիլիզացնող ղեկավարման կառուցման եղանակ: Բերված է կոնկրետ կապակցված համակարգի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդրի լուծում:

**Barseghyan V.R., Shaninyan S.G., Barseghyan T.V.**
**About one problem of optimal stabilization of linear compound systems**

The problem of optimal stabilization of linear compound system is investigated. Based on Lyapunov function method the method of building optimal stabilizing control action is suggested. The solution of the problem of optimal stabilization of a concrete compound system is given.

Исследуется задача оптимальной стабилизации линейной составной системы. На основе метода функции Ляпунова предложен способ построения оптимального стабилизирующего управления. Приведено решение задачи оптимальной стабилизации конкретной составной системы.

**Введение.** Решение многих прикладных задач и процессов управления сводится к исследованию составных систем. Следуя [1-3], составной называем динамическую систему управления, описываемую на разных интервалах времени разными дифференциальными уравнениями и некоторыми конечными связями для стыковки траекторий.

Движение многих управляемых механических систем описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, математические модели которых суть либо уравнения Лагранжа второго рода, весьма удобные при анализе динамических систем, либо системы дифференциальных уравнений типа уравнений Эйлера-Пуассона, которые часто используются при изучении вращательного движения твёрдых тел. В ряде практически важных случаев оказывается полезным использование как тех, так и других уравнений. Поэтому исследование различных задач управления и стабилизации движения для сложной нелинейной системы, методом кусочно-линейной аппроксимации нелинейной системы дифференциальных уравнений, приводится к исследованию аналогичных задач для линейной составной системы.

Важное теоретическое и прикладное значение имеет исследование и решение различных задач оптимальной стабилизации для составных систем. В работе [3] построен аналитический вид движения линейных составных систем, исследованы свойства движения и геометрическая структура области достижимости. Предложен метод решения задачи управления линейными составными системами и способ решения задачи оптимального управления. В работах [4, 5] синтезированы стабилизирующие оптимальные управления.

В данной работе исследуется задача оптимальной стабилизации линейной составной системы. На основе метода функции Ляпунова предложен способ построения оптимального стабилизирующего управления. В качестве иллюстрации изложенного приведено решение задачи оптимальной стабилизации конкретной составной системы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим управляемую составную динамическую систему, возмущённое движение которой на интервалах времени $t_{k-1} \le t \le t_k$ ($k = 1,\dots,m-1$) и $t_{k-1} \le t < \infty$ ($k = m$) описывается системой

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)x^{(k)} + B_k(t)u^{(k)} \tag{1.1}$$

Здесь $x^{(k)}(t) \in R^{n_k}$, $x^{(k)}$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B_k(t)$ ($k = 1,\dots,m$) – матрицы параметров системы (модели объекта); $u^{(k)}(t)$ –управляющие воздействия, соответственно, с размерностями $A_k(t) - (n_k \times n_k)$, $B_k(t) - (n_k \times r_k)$, $u^{(k)}(t) - (r_k \times 1)$. В общем случае будем предполагать, что элементы матриц $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбцов $u^{(k)}(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Предполагается, что преемственность между составными системами (1.1) при $k = 1,\dots,m$ (стыковки траекторий) обеспечивается выполнением следующих условий в промежуточные моменты времени $t_k$ ($0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < \infty$)

$$E_k x^{(k)}(t_k) + F_k x^{(k+1)}(t_k) = \alpha_k \quad (k = 1,\dots,m-1) \tag{1.2}$$

где $E_k - (n_{k+1} \times n_k)$-мерные, $F_k - (n_{k+1} \times n_{k+1})$-мерные матрицы, а $\alpha_k - (n_{k+1} \times 1)$ – вектор-столбец [3].

Предполагается, что матрицы $E_k$, $F_k$ и вектор $\alpha_k$ известны, а матрицы $F_k$ ($k = 1,\dots,m-1$) такие, что существуют $F_k^{-1}$, т.е. $\det F_k \ne 0$.

Учитывая следующие матричные представления

$$A_k(t) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)}(t) & a_{12}^{(k)}(t) & \cdots & a_{1n_k}^{(k)}(t) \\ a_{21}^{(k)}(t) & a_{22}^{(k)}(t) & \cdots & a_{2n_k}^{(k)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n_k 1}^{(k)}(t) & a_{n_k 2}^{(k)}(t) & \cdots & a_{n_k n_k}^{(k)}(t) \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_{n_k}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$B_k(t) = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)}(t) & b_{12}^{(k)}(t) & \cdots & b_{1r_k}^{(k)}(t) \\ b_{21}^{(k)}(t) & b_{22}^{(k)}(t) & \cdots & b_{2r_k}^{(k)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n_k 1}^{(k)}(t) & b_{n_k 2}^{(k)}(t) & \cdots & b_{n_k r_k}^{(k)}(t) \end{pmatrix}, \quad u^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ \vdots \\ u_{r_k}^{(k)} \end{pmatrix}$$

уравнения (1.1) запишем в виде

$$\dot{x}_i^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)} + \sum_{s=1}^{r_k} b_{is}^{(k)}(t)u_s^{(k)}, \; i = 1,\dots,n_k \tag{1.3}$$

Пусть для оценки движения составной системы (1.1) имеем следующий функционал:

$$I[\cdot]=\sum_{k=1}^{m} I_k[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\sum_{j,s=1}^{n_k}\alpha_{js}^{(k)}x_j^{(k)}x_s^{(k)}+\sum_{j,s=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)}u_s^{(k)}\right]dt+$$
$$+\int_{t_{m-1}}^{\infty}\left[\sum_{j,s=1}^{n_k}\alpha_{js}^{(k)}x_j^{(k)}x_s^{(k)}+\sum_{j,s=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)}u_s^{(k)}\right]dt \tag{1.4}$$

где предполагается, что квадратичные формы

$$\sum_{j,s=1}^{n_k}\alpha_{js}^{(k)}x_j^{(k)}x_s^{(k)} \quad \text{и} \quad \sum_{j,s=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)}u_s^{(k)}$$

определённо положительны.

Сформулируем следующую задачу.

**Задача 1.** Требуется найти набор оптимальных управляющих воздействий $u^0(t)=\{u^{(1)0}(t),\ldots,u^{(m)0}(t)\}$, которые при произвольных начальных условиях обеспечивают асимптотическую устойчивость решения системы (1.1) с промежуточными условиями (1.2) и минимизируют функционал (1.4).

**2. Решение задачи.** Составная система (1.1) состоит из $m$ систем линейных дифференциальных уравнений, из которых первые $m-1$ системы определены на конечном интервале времени $[t_0,t_{m-1}]$, а последняя система определена на интервале $[t_{m-1},\infty)$. Поэтому, следуя [7] на конечном интервале времени $[t_0,t_{m-1}]$, для первых $m-1$ систем, должны найти оптимальные управляющие воздействия, которые с произвольными начальными и промежуточными (1.2) условиями обеспечивали устойчивое движение и минимальное значение соответствующего функционала (функционала (1.4) на интервале $[t_0,t_{m-1}]$). Следовательно, для решения сформулированной задачи оптимальной стабилизации целесообразно её разделить на две части, каждая из которых формулируется следующим образом.

**Задача 1.1.** Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u_j^{(k)0}(\cdot)$, которые на движениях системы

$$\dot{x}_i^{(k)}(t)=\sum_{j=1}^{n_k}a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)}+\sum_{s=1}^{r_k}b_{is}^{(k)}(t)u_s^{(k)} \tag{2.1}$$

$i=1,\ldots,n_k,\ k=1,\ldots,m-1,\ t\in[t_{k-1},t_k)$

с произвольными начальными и промежуточными (1.2) условиями обеспечивают минимальное значение функционалу

$$\bar{I}[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1} I_k[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\sum_{j,s=1}^{n_k}\alpha_{js}^{(k)}x_j^{(k)}x_s^{(k)}+\sum_{j,s=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)}u_s^{(k)}\right]dt \tag{2.2}$$

**Задача 1.2.** Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u_j^{(m)0}(\cdot)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость решения системы

$$\dot{x}_i^{(m)}(t)=\sum_{j=1}^{n_m}a_{ij}^{(m)}(t)x_j^{(m)}+\sum_{s=1}^{r_m}b_{is}^{(m)}(t)u_s^{(m)}\,;\quad i=1,\ldots,n_m\,,\ t\in[t_{m-1},+\infty) \tag{2.3}$$

и минимизируют функционал

$$I_m[\cdot]=\int_{t_{m-1}}^{\infty}\left[\sum_{j,s=1}^{n_m}\alpha_{js}^{(m)}x_j^{(m)}x_s^{(m)}+\sum_{j,s=1}^{r_m}\beta_{js}^{(m)}u_j^{(m)}u_s^{(m)}\right]dt \tag{2.4}$$

Для решения представленных задач предположим, что существуют определённо-положительные функции Ляпунова

$$\bar{V}=\sum_{k=1}^{m-1}V_k(x_1^{(k)},\ldots,x_{n_k}^{(k)},t)\ \text{ и }\ V_m=V_m(x_1^{(m)},\ldots,x_{n_m}^{(m)},t) \tag{2.5}$$

где $V_k(x_1^{(k)},\ldots,x_{n_k}^{(k)},t)$, $(k=1,\ldots,m)$ – определённо-положительные функции Ляпунова для подсистем, допускающие бесконечно малый высший предел, полные производные по времени которых вдоль решений соответствующих подсистем (1.1) суть определенно-отрицательные функции. При данных предположениях оптимальная стабилизация, применительная к системе (1.1), осуществляется на основе подхода, разработанного в работах [6, 7].

С целью решения **задачи 1.1** и **задачи 1.2** на основе функции Ляпунова (2.5) составим следующие выражения (функции Беллмана):

$$\begin{aligned}\bar{B}[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}B_k[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}\Bigg[&\frac{\partial V_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}\left(\sum_{j=1}^{n_k}a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)}+\sum_{s=1}^{r_k}b_{is}^{(k)}(t)u_s^{(k)}\right)+\\&+\sum_{j,s=1}^{n_k}\alpha_{js}^{(k)}x_j^{(k)}x_s^{(k)}+\sum_{j,s=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)}u_s^{(k)}\Bigg]\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}B_m[\cdot]=&\frac{\partial V_m}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}\left(\sum_{j=1}^{n_m}a_{ij}^{(m)}(t)x_j^{(m)}+\sum_{s=1}^{r_m}b_{is}^{(m)}(t)u_s^{(m)}\right)+\\&+\sum_{j,s=1}^{n_m}\alpha_{js}^{(m)}x_j^{(m)}x_s^{(m)}+\sum_{j,s=1}^{r_m}\beta_{js}^{(m)}u_j^{(m)}u_s^{(m)}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Так как при оптимальных управляющих воздействиях $u_s^{(k)}=u_s^{(k)0}$ и $u_s^{(m)}=u_s^{(m)0}$ $(s=1,\ldots,r_k,\,k=1,\ldots,m-1)$ выражения (2.6) и (2.7) должны принимать минимальные значения, следовательно, будут иметь место условия [6, 7]:

$$\left.\frac{\partial\bar{B}[\cdot]}{\partial u_s^{(k)}}\right|_{u_s^{(k)0}}=0\,;\qquad s=1,\ldots,r_k,\ k=1,\ldots,m-1 \tag{2.8}$$

$$\left.\frac{\partial B_m[\cdot]}{\partial u_s^{(m)}}\right|_{u_s^{(m)0}}=0\,;\qquad s=1,\ldots,r_k \tag{2.9}$$

В (2.8) и (2.9), подставляя выражения (2.6) и (2.7), соответственно, и вычисляя производные, получим:

$$\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{is}^{(k)}(t)+2\sum_{j=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)0}=0\,;\qquad s=1,\ldots,r_k,\ k=1,\ldots,m-1$$

$$\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}b_{is}^{(m)}(t)+2\sum_{j=1}^{r_m}\beta_{js}^{(m)}u_j^{(m)0}=0\,; \qquad s=1,\ldots,r_k$$

которые можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)0}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{is}^{(k)}(t) \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=1}^{r_m}\beta_{js}^{(m)}u_j^{(m)0}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}b_{is}^{(m)}(t) \tag{2.11}$$

Системы (2.10) и (2.11) являются относительно неизвестных управляющих воздействий $u_s^{(k)0}$ и $u_s^{(m)0}$ $(s=1,\ldots,r_k,\ k=1,\ldots,m-1)$ соответственно системами $r=\sum_{k=1}^{m-1}r_k$ и $r_m$ линейных неоднородных алгебраических уравнений, которые будут иметь отличные от нуля решения, если их главные определители отличны от нуля, т.е.

$$\Delta^{(k)}\neq 0\,; \qquad k=1,\ldots,m-1 \tag{2.12}$$

$$\Delta^{(m)}\neq 0 \tag{2.13}$$

где

$$\Delta^{(k)}=\begin{vmatrix}\beta_{11}^{(k)} & \beta_{12}^{(k)} & \ldots & \beta_{1r_k}^{(k)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta_{r_k1}^{(k)} & \beta_{r_k2}^{(k)} & \ldots & \beta_{r_kr_k}^{(k)}\end{vmatrix},\quad \Delta^{(m)}=\begin{vmatrix}\beta_{11}^{(m)} & \beta_{12}^{(m)} & \ldots & \beta_{1r_m}^{(m)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta_{r_m1}^{(m)} & \beta_{r_m2}^{(m)} & \ldots & \beta_{r_mr_m}^{(m)}\end{vmatrix}$$

Отметим, что условия (2.12) и (2.13) выполнены, так как для любого $k\ (k=1,\ldots,m)$ квадратичные формы $\sum_{j,s=1}^{r_k}\beta_{js}^{(k)}u_j^{(k)}u_s^{(k)}$ определённо положительны.

Учитывая условия (2.12) и (2.13), решения системы (2.10) и (2.11) представим в виде:

$$u_j^{(k)0}=\frac{\Delta_j^{(k)}}{\Delta^{(k)}} \qquad k=1,\ldots,m-1$$

$$u_j^{(m)0}=\frac{\Delta_j^{(m)}}{\Delta^{(m)}}$$

где

$$\Delta_j^{(k)}=\begin{vmatrix}\beta_{11}^{(k)} & \ldots & \beta_{1\,j-1}^{(k)} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{i1}^{(k)}(t) & \beta_{1\,j+1}^{(k)} & \ldots & \beta_{1r_k}^{(k)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta_{r_k1}^{(k)} & \ldots & \beta_{r_k\,j-1}^{(k)} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{ir_k}^{(k)}(t) & \beta_{r_k\,j+1}^{(k)} & \ldots & \beta_{r_kr_k}^{(k)}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_j^{(m)} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^{(m)} & \dots & \beta_{1\,j-1}^{(m)} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}} b_{i1}^{(m)}(t) & \beta_{1\,j+1}^{(m)} & \dots & \beta_{1r_m}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r_m 1}^{(m)} & \dots & \beta_{r_m\,j-1}^{(m)} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}} b_{ir_m}^{(m)}(t) & \beta_{r_m\,j+1}^{(m)} & \dots & \beta_{r_m r_m}^{(m)} \end{vmatrix}$$

Разлагая определители $\Delta_j^{(k)}$ и $\Delta_j^{(m)}$ по элементам $j$ -го столбца, получим

$$\Delta_j^{(k)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r_k}\Delta_{jn}^{(k)}\left(\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}} b_{in}^{(k)}(t)\right); \qquad (k = 1,\dots,m-1;\ j = 1,\dots,r_k)$$

$$\Delta_j^{(m)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r_m}\Delta_{jn}^{(m)}\left(\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}} b_{in}^{(m)}(t)\right); \qquad (j = 1,\dots,r_m)$$

где

$$\Delta_{jn}^{(k)} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^{(k)} & \cdots & \beta_{1\,j-1}^{(k)} & \beta_{1\,j+1}^{(k)} & \cdots & \beta_{1r_k}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-11}^{(k)} & \cdots & \beta_{n-1\,j-1}^{(k)} & \beta_{n-1\,j+1}^{(k)} & \cdots & \beta_{n-1r_k}^{(k)} \\ \beta_{n+11}^{(k)} & \cdots & \beta_{n+1\,j-1}^{(k)} & \beta_{n+1\,j+1}^{(k)} & \cdots & \beta_{n+1r_k}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{r_k 1}^{(k)} & \cdots & \beta_{r_k\,j-1}^{(k)} & \beta_{r_k\,j+1}^{(k)} & \cdots & \beta_{r_k r_k}^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{jn}^{(m)} = \begin{vmatrix} \beta_{11}^{(m)} & \cdots & \beta_{1\,j-1}^{(m)} & \beta_{1\,j+1}^{(m)} & \cdots & \beta_{1r_m}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-11}^{(m)} & \cdots & \beta_{n-1\,j-1}^{(m)} & \beta_{n-1\,j+1}^{(m)} & \cdots & \beta_{n-1r_m}^{(m)} \\ \beta_{n+11}^{(m)} & \cdots & \beta_{n+1\,j-1}^{(m)} & \beta_{n+1\,j+1}^{(m)} & \cdots & \beta_{n+1r_m}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{r_m 1}^{(m)} & \cdots & \beta_{r_m\,j-1}^{(m)} & \beta_{r_m\,j+1}^{(m)} & \cdots & \beta_{r_m r_m}^{(m)} \end{vmatrix}$$

Подставляя значения определителей $\Delta_j^{(k)}$ и $\Delta_j^{(m)}$ в выражения для $u_j^{(k)0}$ и $u_j^{(m)0}$, соответственно, получим:

$$u_j^{(k)0} = \frac{\Delta_j^{(k)}}{\Delta^{(k)}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r_k}\frac{\Delta_{jn}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}} b_{in}^{(k)}(t)\right);(k = 1,\dots,m-1;\ j = 1,\dots,r_k) \quad (2.14)$$

$$u_j^{(m)0} = \frac{\Delta_j^{(m)}}{\Delta^{(m)}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r_m}\frac{\Delta_{jn}^{(m)}}{\Delta^{(m)}}\left(\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}} b_{in}^{(m)}(t)\right); (j = 1,\dots,r_m) \quad (2.15)$$

Таким образом, оптимальные управляющие воздействия $u_j^{(k)0}$ и $u_j^{(m)0}$, решающие **задачу 1.1** и **задачу 1.2,** получены в виде (2.14) и (2.15)**.** Эти выражения, подставляя в (2.6) и (2.7) и требуя, чтобы выполнялись условия $B_k[\cdot]=0$ $(k=1,\dots,m)$, далее проведя некоторые преобразования, будем иметь относительно функций Ляпунова $\bar{V}$ и $V_m$ дифференциальные уравнения с частными производными:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{\partial V_k}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\sum_{p,s=1}^{r_k}\frac{\Delta_{ps}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_i^{(k)}}b_{ip}^{(k)}(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n_k}\frac{\partial V_k}{\partial x_j^{(k)}}b_{js}^{(k)}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{n_k}\alpha_{ij}^{(k)}x_i^{(k)}x_j^{(k)}\right]=0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial V_m}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}a_{ij}^{(m)}(t)x_j^{(m)}-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{p,s=1}^{r_m}\frac{\Delta_{ps}^{(m)}}{\Delta^{(m)}}\left(\sum_{i=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_i^{(m)}}b_{ip}^{(m)}(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{n_m}\frac{\partial V_m}{\partial x_j^{(m)}}b_{js}^{(m)}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{n_m}\alpha_{ij}^{(m)}x_i^{(m)}x_j^{(m)}=0 \tag{2.17}$$

Будем искать функции Ляпунова $\bar{V}$ и $V_m$ в следующем виде:

$$\bar{V}=\sum_{k=1}^{m-1}V_k(x_1^{(k)},\dots,x_{n_k}^{(k)},t)=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n_k}c_{ij}^{(k)}x_i^{(k)}x_j^{(k)}\right), \tag{2.18}$$

$$V_m=V_m(x_1^{(m)},\dots,x_{n_m}^{(m)},t)=\sum_{i,j=1}^{n_m}c_{ij}^{(m)}x_i^{(m)}x_j^{(m)} \tag{2.19}$$

Подставляя (2.18) и (2.19), соответственно, в (2.16) и (2.17) , получим:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[\sum_{i,j=1}^{n_k}\frac{dc_{ij}^{(k)}}{dt}x_i^{(k)}x_j^{(k)}+\sum_{i,j=1}^{n_k}\alpha_{ij}^{(k)}x_i^{(k)}x_j^{(k)}+2\sum_{i=1}^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{n_k}c_{ij}^{(k)}x_j^{(k)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n_k}a_{ij}^{(k)}(t)x_j^{(k)}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{p,s=1}^{r_k}\frac{\Delta_{ps}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{i,j=1}^{n_k}c_{ij}^{(k)}b_{is}^{(k)}(t)x_j^{(k)}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n_k}c_{ij}^{(k)}b_{ip}^{(k)}(t)x_j^{(k)}\right)\right]=0 \tag{2.20}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n_m}\frac{dc_{ij}^{(m)}}{dt}x_i^{(m)}x_j^{(k)}+\sum_{i,j=1}^{n_m}\alpha_{ij}^{(m)}x_i^{(m)}x_j^{(m)}+2\sum_{i=1}^{n_m}\left(\sum_{j=1}^{n_m}c_{ij}^{(m)}x_j^{(m)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n_m}a_{ij}^{(m)}(t)x_j^{(m)}\right)-$$
$$-\sum_{p,s=1}^{r_m}\frac{\Delta_{ps}^{(m)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{i,j=1}^{n_m}c_{ij}^{(m)}b_{is}^{(m)}(t)x_j^{(m)}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n_m}c_{ij}^{(m)}b_{ip}^{(m)}(t)x_j^{(m)}\right)=0 \tag{2.21}$$

Для определения коэффициентов $c_{ij}^{(k)}(t)$ и $c_{ij}^{(m)}(t)$ в формулах (2.20) и (2.21) приравнивая к нулю коэффициенты при произведениях $x_i^{(k)}x_j^{(k)}$ и $x_i^{(m)}x_j^{(m)}$, получим:

$$\frac{dc_{ij}^{(k)}}{dt}+\sum_{p=1}^{n_k}\left(a_{pi}^{(k)}(t)c_{pj}^{(k)}+a_{pj}^{(k)}(t)c_{pi}^{(k)}\right)-\sum_{p,s=1}^{r_k}\frac{\Delta_{ps}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}\left(\sum_{l=1}^{n_k}c_{lj}^{(k)}b_{lp}^{(k)}(t)\right)\left(\sum_{q=1}^{n_k}c_{qi}^{(k)}b_{qs}^{(k)}(t)\right)$$
$$+\alpha_{ij}^{(k)}=0;\quad (i,j=1,...,n_k;\, c_{ij}^{(k)}=c_{ji}^{(k)};\, \alpha_{ij}^{(k)}=\alpha_{ji}^{(k)};\, k=1,...,m-1)$$
$$\frac{dc_{ij}^{(m)}}{dt}+\sum_{p=1}^{n_m}\left(a_{pi}^{(m)}(t)c_{pj}^{(m)}+a_{pj}^{(m)}(t)c_{pi}^{(m)}\right)-\sum_{p,s=1}^{r_m}\frac{\Delta_{ps}^{(m)}}{\Delta^{(m)}}\left(\sum_{l=1}^{n_m}c_{lj}^{(m)}b_{lp}^{(m)}(t)\right)\left(\sum_{q=1}^{n_m}c_{qi}^{(m)}b_{qs}^{(m)}(t)\right)$$
$$+\alpha_{ij}^{(m)}=0;\quad (i,j=1,...,n_m;\, c_{ij}^{(m)}=c_{ji}^{(m)};\, \alpha_{ij}^{(m)}=\alpha_{ji}^{(m)})$$

Таким образом, получили относительно переменных $c_{ij}^{(k)}(t)$ и $c_{ij}^{(m)}(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати, откуда можно найти решения (если возможно найти аналитические решения) и подставляя эти решения в (2.18) и (2.19), получим функции Ляпунова $\bar{V}$ и $V_m$. Следовательно, имея функции Ляпунова $\bar{V}$ и $V_m$ из формул (2.14) и (2.15), получим оптимальные управляющие воздействия $u_j^{(k)0}$ и $u_j^{(m)0}$, решающие **задачу 1.1** и **задачу 1.2**.

Найденные оптимальные управляющие воздействия $u_1^{(1)0},\ldots,u_{r_1}^{(1)0}$ подставляя в уравнение (1.1) (или (1.3)) при $k=1$ и решая эту систему с некоторым начальным условием $x^{(1)}(t_0)=x_0^{(1)}$, получим оптимальное движение $x^{(1)0}(t)$. При $t=t_1$ подставляя $x^{(1)0}(t_1)$ в формулу (1.2) (при $k=1$), будем иметь

$$x^{(2)0}(t_1)=F_1^{-1}[\alpha_1-E_1x^{(1)0}(t_1)].$$

Значение $x^{(2)0}(t_1)$ является начальным состоянием второго этапа. Продолжая эту процедуру, т.е. подставляя оптимальные управляющие воздействия $u_1^{(k)0},\ldots,u_{r_k}^{(k)0}$ в уравнение (1.1) (или (1.3)) и интегрируя полученные дифференциальные уравнения с соответствующим начальным условием, будем иметь $x^{(k)0}(t)$, следовательно, и фазовое состояние $x^{(k)0}(t_k)$, а состояние $x^{(k+1)0}(t_k)$ вычисляется по формуле

$$x^{(k+1)0}(t_k)=F_k^{-1}[\alpha_k-E_kx^{(k)0}(t_k)].$$

Таким образом, будем иметь оптимальные движения $x^{(k)0}(t)$ $(k=1,\ldots,m)$ и все значения $x^{(k+1)0}(t_k)$ $(k=1,\ldots,m-1)$ фазового вектора как начальное значение последующего этапа. Далее, согласно формуле (2.2), можно вычислить минимальное значение функционала $\bar{I}[\cdot]=\sum_{k=1}^{m-1}I_k[\cdot]$, а минимальное значение функционала (2.4), согласно [6, 7], будет равно $V_m(x_1^{(m)0}(t_{m-1}),...,x_{n_m}^{(m)0}(t_{m-1}))$.

**3. Пример**. Большой класс управляемых тепловых объектов содержит три основные части: управляемый источник тепла (нагреватель), нагреваемое тело (жидкость) и оболочка (корпус), отделяющая тело от окружающей среды. Динамические режимы таких объектов достаточно точно можно описать с последовательным использованием нескольких систем линейных дифференциальных уравнений, каждая из которых справедлива для своего временного интервала. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим модель управляющего объекта (нагрева жидкости в тепловом аппарате), возмущённое движение которого описываются следующими дифференциальными уравнениями [8]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} \\ \dot{x}_2^{(1)} = b^{(1)} u^{(1)} \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_1) \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} \\ \dot{x}_2^{(2)} = a_2^{(2)} x_2^{(2)} + b^{(2)} u^{(2)} \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2) \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(3)} = x_2^{(3)} \\ \dot{x}_2^{(3)} = a_1^{(3)} x_1^{(3)} + a_2^{(3)} x_2^{(3)} + b^{(3)} u^{(3)} \end{cases} \qquad t \in [t_2, +\infty) \tag{3.3}$$

Здесь

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_2^{(2)} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(1)} \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(2)} \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{(3)} \end{pmatrix}$$

где величины $a_2^{(2)}$, $a_1^{(3)}$, $a_2^{(3)}$, $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ – отличные от нуля константы.

Здесь предполагается, что в промежуточные моменты времени конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, т.е. в моменты времени $t_k$ $x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k)$ при $(k = 1, 2)$, который является частным случаем условия (1.2) ($n_1 = n_2 = n_3 = 2$, $\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_k = -F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$).

Пусть задан следующий функционал:

$$\bar{I}[\cdot] = I_1[\cdot] + I_2[\cdot] + I_3[\cdot] = \int_{t_0}^{t_1} \omega_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \omega_2 dt + \int_{t_2}^{\infty} \omega_3 dt, \tag{3.4}$$

где

$$\omega_1 = \alpha_{11}^{(1)} \left( x_1^{(1)} \right)^2 + 2\alpha_{12}^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(1)} + \alpha_{22}^{(1)} \left( x_2^{(1)} \right)^2 + \beta_1 \left( u^{(1)} \right)^2$$

$$\omega_2 = \alpha_{11}^{(2)} \left( x_1^{(2)} \right)^2 + 2\alpha_{12}^{(2)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} + \alpha_{22}^{(2)} \left( x_2^{(2)} \right)^2 + \beta_2 \left( u^{(2)} \right)^2$$

$$\omega_3 = \alpha_{11}^{(3)} \left( x_1^{(3)} \right)^2 + 2\alpha_{12}^{(3)} x_1^{(3)} x_2^{(3)} + \alpha_{22}^{(3)} \left( x_2^{(3)} \right)^2 + \beta_3 \left( u^{(3)} \right)^2$$

Заметим, что для систем (3.1)-(3.3) матрицы Калмана [7] соответственно имеют вид: $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & b^{(1)} \\ b^{(1)} & 0 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & b^{(2)} \\ b^{(2)} & b^{(2)} a_2^{(2)} \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & b^{(3)} \\ b^{(3)} & b^{(3)} a_2^{(3)} \end{pmatrix}$

следовательно, системы (3.1)-(3.3) вполне управляемы (так как все коэффициенты ненулевые).

Для систем (3.1)-(3.3) и функционала (3.4) рассмотрим **задачу 1.1** и **задачу 1.2**. Предположим, что существуют определённо положительные функции Ляпунова $\bar{V} = V_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, t) + V_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, t)$ и $V_3 = V_3(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, t)$. Согласно формулам (2.6) и (2.7), составим выражения

$$\bar{B}[\cdot] = B_1[\cdot] + B_2[\cdot] = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1^{(1)}} \dot{x}_1^{(1)} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2^{(1)}} \dot{x}_2^{(1)} + \\ + \frac{\partial V_2}{\partial x_1^{(2)}} \dot{x}_1^{(2)} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2^{(2)}} \dot{x}_2^{(2)} + \omega_1 + \omega_2 \tag{3.5}$$

$$B_3[\cdot] = \frac{\partial V_3}{\partial x_1^{(3)}} \dot{x}_1^{(3)} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2^{(3)}} \dot{x}_2^{(3)} + \omega_3 \tag{3.6}$$

Выполняя соответствующие действия согласно формулам (2.14) и (2.15), получим оптимальные управляющие воздействия

$$u^{(1)0} = -\frac{1}{2\beta_1} b^{(1)} \frac{\partial V_1}{x_2^{(1)}},\; u^{(2)0} = -\frac{1}{2\beta_2} b^{(2)} \frac{\partial V_2}{x_2^{(2)}} \tag{3.7}$$

$$u^{(3)0} = -\frac{1}{2\beta_3} b^{(3)} \frac{\partial V_3}{x_2^{(3)}} \tag{3.8}$$

Будем искать функции Ляпунова $\bar{V}$ и $V_3$ в виде

$$\bar{V} = V_1 + V_2 = c_{11}^{(1)} \left(x_1^{(1)}\right)^2 + 2c_{12}^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(1)} + c_{22}^{(1)} \left(x_2^{(1)}\right)^2 + c_{11}^{(2)} \left(x_1^{(2)}\right)^2 + \\ + 2c_{12}^{(2)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} + c_{22}^{(2)} \left(x_2^{(2)}\right)^2 \tag{3.9}$$

$$V_3 = c_{11}^{(3)} \left(x_1^{(3)}\right)^2 + 2c_{12}^{(3)} x_1^{(3)} x_2^{(3)} + c_{22}^{(3)} \left(x_2^{(3)}\right)^2 . \tag{3.10}$$

Подставляя выражения оптимальных управляющих воздействий из (3.7), (3.8) и функции Ляпунова из (3.9), (3.10), соответственно, в выражения (3.5), (3.6) и проведя группировку по переменным $(x_1^{(1)})^2, x_1^{(1)} x_2^{(1)}$, $(x_2^{(1)})^2$, $(x_1^{(2)})^2$, $x_1^{(2)} x_2^{(2)}$, $(x_2^{(2)})^2$ в (3.5) и по переменным $(x_1^{(3)})^2, x_1^{(3)} x_2^{(3)}$, $(x_2^{(3)})^2$, в (3.6) получим относительно неизвестных величин $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$, $c_{22}^{(1)}$, $c_{11}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)}$, $c_{22}^{(2)}$ и $c_{11}^{(3)}$, $c_{12}^{(3)}$, $c_{22}^{(3)}$ следующие уравнения:

$$\frac{1}{\beta_1\beta_2}\Big[(-(b^{(1)})^2 (c_{12}^{(1)})^2 \beta_2 + \alpha_{11}^{(1)} \beta_1\beta_2)(x_1^{(1)})^2 + (-2(b^{(1)})^2 c_{12}^{(1)} c_{22}^{(1)} \beta_2 + \\ +2c_{11}^{(1)} \beta_1\beta_2 + 2\alpha_{12}^{(1)} \beta_1\beta_2) x_1^{(1)} x_2^{(1)} + (-(b^{(1)})^2 (c_{22}^{(1)})^2 \beta_2 + 2c_{12}^{(1)} \beta_1\beta_2 + \\ +\alpha_{22}^{(1)} \beta_1\beta_2)(x_2^{(1)})^2 + (-(b^{(2)})^2 (c_{12}^{(2)})^2 \beta_1 + \alpha_{11}^{(2)} \beta_1\beta_2)(x_1^{(2)})^2 + \\ +(-2(b^{(2)})^2 c_{12}^{(2)} c_{22}^{(2)} \beta_1 + 2c_{11}^{(2)} \beta_1\beta_2 + 2a_2^{(2)} c_{12}^{(2)} \beta_1\beta_2 + 2\alpha_{12}^{(2)} \beta_1\beta_2) x_1^{(2)} x_2^{(2)} + \\ +(-(b^{(2)})^2 (c_{22}^{(2)})^2 \beta_1 + 2c_{12}^{(2)} \beta_1\beta_2 + 2a_2^{(2)} c_{22}^{(2)} \beta_1\beta_2 + \alpha_{22}^{(2)} \beta_1\beta_2)(x_2^{(2)})^2 \Big] = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{\beta 3}\Big[(-(b^{(3)})^2(c_{12}^{(3)})^2+2a_1^{(3)}c_{12}^{(3)}\beta_3+\alpha_{11}^{(3)}\beta_3)x_1^{(3)2}+$$
$$+(-2(b^{(3)})^2c_{12}^{(3)}c_{22}^{(3)}+2c_{11}^{(3)}\beta_3+2a_2^{(3)}c_{12}^{(3)}\beta_3+2a_1^{(3)}c_{22}^{(3)}\beta_3+2\alpha_{12}^{(3)}\beta_3)x_1^{(3)}x_2^{(3)}+ \qquad (3.12)$$
$$+(-(b^{(3)})^2c_{22}^{(3)2}+2c_{12}^{(3)}\beta_3+2a_2^{(3)}c_{22}^{(3)}\beta_3+\alpha_{22}^{(3)}\beta_3)(x_2^{(3)})^2\Big]=0$$

Из (3.11) и (3.12) относительно неизвестных величин $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$, $c_{22}^{(1)}$, $c_{11}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)}$, $c_{22}^{(2)}$ и $c_{11}^{(3)}$, $c_{12}^{(3)}$, $c_{22}^{(3)}$ получим следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&-(b^{(1)})^2(c_{12}^{(1)})^2\beta_2+\alpha_{11}^{(1)}\beta_1\beta_2=0\\
&-2(b^{(1)})^2c_{12}^{(1)}c_{22}^{(1)}\beta_2+2c_{11}^{(1)}\beta_1\beta_2+2\alpha_{12}^{(1)}\beta_1\beta_2=0\\
&-(b^{(1)})^2(c_{22}^{(1)})^2\beta_2+2c_{12}^{(1)}\beta_1\beta_2+\alpha_{22}^{(1)}\beta_1\beta_2=0\\
&-(b^{(2)})^2(c_{12}^{(2)})^2\beta_1+\alpha_{11}^{(2)}\beta_1\beta_2=0\\
&-2(b^{(2)})^2c_{12}^{(2)}c_{22}^{(2)}\beta_1+2c_{11}^{(2)}\beta_1\beta_2+2a_2^{(2)}c_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2+2\alpha_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2=0\\
&-(b^{(2)})^2(c_{22}^{(2)})^2\beta_1+2c_{12}^{(2)}\beta_1\beta_2+2a_2^{(2)}c_{22}^{(2)}\beta_1\beta_2+\alpha_{22}^{(2)}\beta_1\beta_2=0
\end{aligned} \qquad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
&-(b^{(3)})^2(c_{12}^{(3)})^2+2a_1^{(3)}c_{12}^{(3)}\beta_3+\alpha_{11}^{(3)}\beta_3=0\\
&-2(b^{(3)})^2c_{12}^{(3)}c_{22}^{(3)}+2c_{11}^{(3)}\beta_3+2a_2^{(3)}c_{12}^{(3)}\beta_3+2a_1^{(3)}c_{22}^{(3)}\beta_3+2\alpha_{12}^{(3)}\beta_3=0\\
&-(b^{(3)})^2c_{22}^{(3)2}+2c_{12}^{(3)}\beta_3+2a_2^{(3)}c_{22}^{(3)}\beta_3+\alpha_{22}^{(3)}\beta_3=0
\end{aligned} \qquad (3.14)$$

Во избежание сложных представлений решений систем (3.13) и (3.14) предположим, что параметры систем (3.1)-(3.3) и коэффициенты в функционале (3.4) принимают следующие числовые значения: $a_2^{(2)}=1$, $a_1^{(3)}=-2$, $a_2^{(3)}=3$, $b^{(1)}=b^{(2)}=b^{(3)}=1$, $\alpha_{ij}^{(k)}=1$, $\beta_k=1\ (i,j=1,2;k=1,2,3)$.

Решая системы (3.13), (3.14) и выбирая только те решения, которые обеспечивают функциям Ляпунова положительно определённость, будем иметь:

$$c_{11}^{(1)}=-1+\sqrt{3}\approx 0.73,\ c_{12}^{(1)}=1,\ c_{22}^{(1)}=\sqrt{3}\approx 1.73,\ c_{11}^{(2)}=1,\ c_{12}^{(2)}=1,\ c_{22}^{(2)}=3 \qquad (3.15)$$
$$c_{11}^{(3)}=10+\sqrt{5}\approx 12.24,\ c_{12}^{(3)}=-2+\sqrt{5}\approx 0.24,\ c_{22}^{(3)}=4+\sqrt{5}\approx 6.24 \qquad (3.16)$$

Отметим, что полученные значения для $c_{11}^{(1)}$, $c_{12}^{(1)}$, $c_{22}^{(1)}$, $c_{11}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)}$, $c_{22}^{(2)}$ и $c_{11}^{(3)}$, $c_{12}^{(3)}$, $c_{22}^{(3)}$ удовлетворяют условиям Сильвестра [9], т.е.

$$\bar{\Delta}_1=c_{11}^{(1)}>0,\ \bar{\Delta}_2=\begin{vmatrix}c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)}\\ c_{12}^{(1)} & c_{22}^{(1)}\end{vmatrix}>0,\ \bar{\Delta}_3=\begin{vmatrix}c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & 0\\ c_{12}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & 0\\ 0 & 0 & c_{11}^{(2)}\end{vmatrix}>0,$$

$$\bar{\Delta}_4=\begin{vmatrix}c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & 0 & 0\\ c_{12}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_{11}^{(2)} & c_{12}^{(2)}\\ 0 & 0 & c_{12}^{(2)} & c_{22}^{(2)}\end{vmatrix}>0$$

$$\Delta_1 = c_{11}^{(3)} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^{(3)} & c_{12}^{(3)} \\ c_{12}^{(3)} & c_{22}^{(3)} \end{vmatrix} > 0$$

Подставляя (3.15) и (3.16) в выражения (3.7) и (3.8), получим оптимальные управляющие воздействия в явном виде:

$$u^{(1)0} = -x_1^{(1)} - 1.73x_2^{(1)}, \quad u^{(2)0} = -x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}, \quad u^{(3)0} = -0.24x_1^{(3)} - 6.24x_2^{(3)} \quad (3.17)$$

Предположим, что $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, а движение системы (3.1) начинается из состояния $x_1^{(1)}(t_0) = 1$, $x_2^{(1)}(t_0) = 1$, тогда с учётом выражений оптимальных управлений (3.17), получим соответственно оптимальные движения системы (3.1) в виде:

$$x_1^{(1)0} = e^{-0.86t}(\cos(0.5t) + 3.72\sin(0.5t)),$$

$$x_2^{(1)0} = e^{-0.86t}(\cos(0.5t) - 3.72\sin(0.5t)) \quad (3.18)$$

системы (3.2) – в виде

$$x_1^{(2)0} = e^{-t}(1.04 + 2.01t), \quad x_2^{(2)0} = e^{-t}(0.97 - 2.01t) \quad (3.19)$$

системы (3.3) – в виде

$$x_1^{(3)0} = 190.5e^{-3.99t} + 1.02e^{-0.25t}, \quad x_2^{(3)0} = -760.48e^{-3.99t} - 0.25e^{-0.25t} \quad (3.20)$$

Теперь, имея выражения оптимальных управляющих воздействий (3.17) и соответствующие оптимальные движения (3.18) и (3.19), вычислим значения функционалов $I_1[\cdot]$ и $I_2[\cdot]$ из (3.4), которые являются $I_1 \approx 4.16$, $I_2 \approx 0.43$.

Следуя [6, 7],

$$\min I_3[\cdot] = V_3(x_1^{(3)}(2), x_2^{(3)}(2)).$$

Так как $x_1^{(3)}(2) = 0.68$, $x_2^{(3)}(2) = -0.41$ (которые являются начальным состоянием движения (3.20)), то согласно формулам (3.10) и (3.16), для минимального значения $I_3$ получим, что $I_3 = 6.67$. Следовательно, для полного значения функционала (3.4) будем иметь:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \approx 11.26.$$

Таким образом, с помощью предложенного способа решена задача оптимальной стабилизации конкретной составной системы (3.1)-(3.2).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами.//Докл. АН СССР. 1967. Т.176. № 4. С.754-756.
2. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями.// ПММ. 1981. Т.45. Вып.2. С.215-222.
3. Барсегян В.Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. // Проблемы управления. 2012. №4. С.11-17.
4. Щенникова Е.В., Дружинина О.В., Мулкиджан А.С. Об оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем // Труды Института

системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т.53(3). С.99–102.
5. Андреев А.С., Румянцев В.В. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Автоматика и телемеханика. 2007. №8. С.18–31.
6. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // В кн.: Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С.475-514.
7. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск: 1972, 274с.
8. Матвейкин В.Г., Муромцев Д.Ю. Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения. М.: 2007, 128с.
9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. 1987, 304 с.

**Сведения об авторах:**

**Барсегян Ваня Рафаелович** – доктор физ.-мат. наук, профессор, ЕГУ, факультет математики и механики, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
**Тел.:** (10) 52 36 40; **E-mail:** barseghyan@sci.am

**Шагинян Смбат Григоревич** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры механики, Ереванский государственный университет
**E-mail:** shahinyan@ysu.am

**Барсегян Тигран Ваняевич** – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет
**E-mail:** t.barseghyan@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2014