

**ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА
СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБЫ, НАПОЛНЕННОЙ
ПРОТЕКАЮЩЕЙ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСЬЮ**

Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Ключевые слова: поперечный сдвиг, труба, несимметричные колебания, газ, жидкость, пузырёк.
Keywords: transverse dislocation, tube, nonsymmetrical vibrations, gas, liquid, bubble.

Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.

**Լայնական սահքերի հաշվառման ազդեցությունը հոսող երկֆազ խառնուրդով լցված խողովակի
սեփական տատանումների վրա**

Ուսումնասիրված է Տիմոշենկոյի տեսությանը համապատասխանող անվերջ գլանային խողովակի մոդելի ոչ համաչափ տատանումների որոշման խնդիրը: Խողովակը լցված է հոսող խոշոր և մանր չափի պղպջակներ պարունակող զազահեղուկ խառնուրդով: Համեմատված են Կիրխոֆ-Լյավի և Տիմոշենկոյի մոդելներով հաշվարկված խողովակի սեփական տատանումների հաճախականությունները:

Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.

**The influence of transverse shear deformation on self vibrations of a tube,
filled with flowing non viscous two componential mixture**

The problem of nonsymmetrical free vibrations of infinite cylindrical tube corresponding to model of Timoshenko's theory is investigated. The tube filled by the flowing Gas-Liquid mixture, containing big and small bubbles. The frequencies of tube free vibrations, computed using the models of Kirchhoff-Love and Timoshenko are compared.

На основе линейной теории оболочек по Тимошенко, учитывающей эффект деформации поперечных сдвигов, рассмотрена задача определения несимметричных собственных колебаний трубы, наполненной невязкой газожидкостной смесью. Получено дисперсионное уравнение, описывающее распространение линейных волн в рассматриваемой гидроупругой системе. С целью выявления учитываемого эффекта проведено сравнение численных расчётов по полученному и другому дисперсионному уравнению, соответствующему теории оболочек по модели Кирхгофа-Лява.

В случае наличия смеси с мелкими пузырьками значения частот по модели Тимошенко для всех мод колебаний меньше значений частот по Кирхгофу-Ляву, т.е. учёт деформации поперечных сдвигов приводит к уменьшению частот. Для смеси с мелкими пузырьками при малых модах частоты совпадают по обеим моделям, означающее, что учитываемый эффект не влияет на значения частот. В то же время при больших значениях мод частоты по Кирхгофу-Ляву больше значений по Тимошенко, т.е. деформации поперечных сдвигов уменьшают значения реализуемых частот собственных колебаний трубы.

Вибрационные одночастотные воздействия на гидроупругую систему оболочка-газожидкостная смесь изучены в [1], где двухфазная среда моделируется как двускоростная смесь, состоящая из слоёв несущей жидкости с включениями в виде газовых пузырьков. При двухчастотном вибровозбуждении в [2] приведены результаты экспериментов по нелинейной динамике стенок цилиндрической оболочки с газожидкостной смесью. Влияние динамического воздействия равномерно распределённого давления на поведение замкнутой цилиндрической оболочки, частично наполненной жидкостью, изучено в [3]. Методика расчета нестационарных колебаний оболочки с протекающей жидкостью, где нестационарность обусловлена действием внешних квазипериодических сил, с частотами, медленно меняющимися по времени, предложена в [4]. Исследования [1-5] выявили, что гидроупругая система оболочка-жидкость (газожидкостная смесь) обладает свойствами, не присущими отдельным её компонентам.

1. Уравнения гидродинамики. Пусть бесконечная длинная деформируемая цилиндрическая оболочка кругового сечения наполнена газожидкостной смесью, в которой несущей фазой является несжимаемая невязкая жидкость, а дисперсионной-сферические пузырьки калорически совершенного газа одинаковых размеров.

Принимается односкоростная модель течения смеси, когда относительное перемещение фаз отсутствует, что идентично движению фаз с одинаковыми по величине и направлению скоростями. Процессами дробления, слипания и зарождения новых пузырьков, а также эффектами межфазного теплообмена и поверхностного натяжения пренебрегаются. Уравнения движения рассматриваемой монодисперсной газожидкостной смеси пузырьковой структуры имеют вид [6]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$P = (1-\beta)P_1 + \beta P_2, \quad \rho = (1-\beta)\rho_1 + \beta\rho_2, \quad \rho_2 a^3 = \text{const}, \quad \rho_1 = \text{const} \quad (1.1)$$

$$P_2 - P_1 = \rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{da}{dt} \right)^2, \quad \frac{\beta \rho_2}{(1-\beta)\rho_1} = \text{const}, \quad \frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma$$

Здесь начало цилиндрической системы координат (r, θ, x) с ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_\theta, \vec{e}_r$ размещено в сечении $x = 0$, t – время, \vec{v} – вектор скорости частиц смеси, P и ρ – давление и плотность, β – объёмное газосодержание, a – радиус пузырька, γ – показатель адиабаты газа, ∇ – оператор Гамильтона. Индексы 1 и 2 отнесены, соответственно, к параметрам жидкой и газовой фаз, а индекс 0 – к состоянию равновесия (покоя). Параметры, характеризующие смесь в целом, индексов не имеют.

Для последующего анализа удобно несколько видоизменить форму записи уравнения Рэлея-Лэмба, описывающего динамику совместного деформирования фаз. Заменим перепад давлений в фазах на перепад давлений в пузырьке и самой смеси, используя при этом определение давления всей смеси. В результате, получим уравнение

$$P_2 - P = (1-\beta) \left[\rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right] \quad (1.2)$$

Пусть параметры смеси мало отклоняются от своих значений в состоянии покоя $P = P_0 + P'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho_2 = \rho_{20} + \rho'_2$,

$$P_2 = P_0 + P'_2, \quad a = a_0 + a', \quad \beta = \beta_0 + \beta', \quad \vec{v} = \vec{v}'$$

где штрихи, которые в дальнейшем будут опущены, отнесены к возмущениям характеристик смеси. Малость возмущений позволяет линеаризовать систему уравнений (1.1), (1.2)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{v}, \quad P_2 - P = (1-\beta_0) \rho_1 a_0 \frac{\partial^2 a'}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

$$\rho = (\rho_{20} - \rho_1) \beta_0 + \beta_0 \rho_2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_{20}} = -\frac{1}{1-\beta_0} \frac{\beta}{\beta_0}, \quad a = -\frac{a_0}{3} \frac{\rho_2}{\rho_{20}}, \quad P_2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_{20}} \rho_2. \quad (1.4)$$

Комбинируя соотношения (1.4), исключим из рассмотрения избыточные плотность ρ_2 и газосодержание β . В результате, придём к связям:

$$P_2 = c_0^2 \rho_2, \quad \rho = \frac{\beta_0 \rho_0}{\rho_{20}} \rho_2, \quad a = -\frac{a_0}{3} \frac{1}{\beta_0 \rho_0} \rho, \quad c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_0 \rho_0}, \quad (1.5)$$

где c_0 – невозмущённая линейная скорость звука в смеси. Подстановка (1.5) в линеаризованное уравнение Рэлея-Лэмба позволяет получить соотношение

$$P = c_0^2 \rho + (1 - \beta_0) \frac{c_0^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1 a_0^2}, \quad (1.6)$$

которое можно рассматривать как неголономное уравнение состояния смеси, поскольку давление зависит не только от плотности, но и от её второй производной по времени, отвечающей за радиальную инерцию жидкости. Здесь ω_{ar} – резонансная адиабатическая частота Миннаерта.

Рассмотрим потенциальное течение смеси, когда $\vec{v} = \nabla \varphi$, где φ – скалярный потенциал. Тогда, из уравнений движения и неразрывности смеси (1.3) следуют уравнения:

$$P = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \varphi, \quad \text{div}(\nabla \varphi) = \Delta \varphi, \quad (1.7)$$

где Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. Комбинирование выражений (1.6) и (1.7) приводит к линейному уравнению для определения потенциала $\varphi(r, \theta, x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \left[1 + \frac{1 - \beta_0}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Delta \varphi = 0. \quad (1.8)$$

Предположим, что однородный поток смеси движется внутри трубы вдоль положительного направления её образующей – оси x с постоянной скоростью V . Введём в рассмотрение систему координат (r', θ', x', t') , жёстко связанную с оболочкой

$$t = t', \quad r = r', \quad \theta = \theta', \quad x = x' - Vt' \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + V \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta'}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'}. \quad (1.9)$$

Ввод такой системы координат обусловлен тем, что поскольку модельные уравнения движения оболочек записываются в системе координат (r', θ', x', t') , то и уравнения гидродинамики должны быть представлены в той же системе координат. Тогда, уравнение (1.8) примет форму записи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi - \\ - c_0^2 \left[1 + \frac{1 - \beta_0}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial \theta'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \varphi = 0. \quad (1.10)$$

Здесь и далее штрихи над координатами опущены, что будет выполняться и впредь.

Решение уравнения (1.10) ищется в виде

$$\varphi(r, \theta, x, t) = f(r) e^{i(\omega t + \alpha x + n\theta)}, \quad (1.11)$$

где ω – циклическая частота, $\alpha = \pi/L$ – волновое число, L – длина полуволн вдоль образующей трубы, n – число окружных волн. Искомая функция f удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя:

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \left(\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0, \quad \lambda^2 = \alpha^2 - \frac{(\omega + \alpha V)^2}{c_0^2} \left[1 - \frac{(\omega + \alpha V)^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1}, \quad (1.12)$$

общим решением которого является линейная комбинация модифицированных функций Бесселя первого $I_n(\lambda r)$ и второго $K_n(\lambda r)$ родов порядка n . Поскольку при $r \rightarrow 0$ функция K_n неограниченно возрастает, постольку, в силу ограниченности функции f , она запишется в форме $f(r) = b_0 I_n(\lambda r)$, $b_0 = \text{const}$. Тогда, согласно (1.11), потенциал φ предстанет в форме записи:

$$\varphi(r, \theta, x, t) = b_0 I_n(\lambda r) e^{i(\omega t + \alpha x + n\theta)}. \quad (1.13)$$

Введём в рассмотрение число Маха:

$$M_1 = \frac{1}{c_0} \left(\frac{\omega}{\alpha} + V \right) = \frac{c_{ph} + V}{c_0}, \quad c_{ph} = \frac{\omega}{\alpha}, \quad \lambda^2 = \alpha^2 \left[1 - M_1^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 c_0^2}{\omega_{ar}^2} M_1^2 \right)^{-1} \right],$$

где c_{ph} – фазовая скорость волн. Из условия $\lambda^2 > 0$ следует требование

$$\frac{1}{M_1^2} > 1 + \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} \alpha^2 a_0^2,$$

которое соответствует дозвуковому $M_1 < 1$ режиму течения смеси.

Уравнение (1.12) можно переписать также в виде уравнения Бесселя:

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \left(\lambda_2^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0, \quad \lambda_2^2 = -\alpha^2 + \frac{(\omega + \alpha V)^2}{c_0^2} \left[1 - \frac{(\omega + \alpha V)^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1} = -\lambda^2$$

Приемлемым решением для потенциала φ явится функция

$$\varphi(r, \theta, x, t) = b_1 J_n(\lambda_2 r) e^{i(\omega t + \alpha x + n\theta)}, \quad b_1 = \text{const}, \quad (1.14)$$

где $J_n(\lambda_2 r)$ – функция Бесселя первого рода порядка n . Из условия $\lambda_2^2 > 0$ следует требование $M_1 > 1$, соответствующее сверхзвуковому течению газожидкостной смеси.

Таким образом, при дозвуковом и сверхзвуковом режимах течения потенциал φ описывается, соответственно, формулами (1.13) и (1.14).

В дальнейшем будет исследоваться лишь дозвуковой режим внутреннего обтекания трубы. В принятой модели движения газожидкостной смеси пренебрегается поверхностным натяжением пузырька и пульсационным напряжением в жидкости. Компоненты тензора напряжений во всей смеси определяются через компоненты тензоров несжимаемой жидкости и газовой фазы посредством формул [6]:

$$\sigma_{rr} = (1 - \beta_0) \sigma_{rr}^{(1)} + \beta_0 \sigma_{rr}^{(2)} = -[(1 - \beta_0) P_1 + \beta_0 P_2] = -P, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rx}^{(1)} = 0. \quad (1.15)$$

Здесь верхние индексы указывают на принадлежность тензоров к соответствующим фазам, при этом, $\sigma^{(2)} = -P_2 \delta_{mn}$ является шаровым (δ_{mn} – символ Кронекера). Подставляя первое уравнение из (1.7) в (1.15), в координатах (1.9) получим формулы:

$$\sigma_{rr} = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rx} = 0. \quad (1.16)$$

В последующем будет рассмотрен лишь дозвуковой режим течения смеси. На этом гидродинамическая часть исследования поставленной задачи гидроупругости завершена. Перейдём к рассмотрению её упругой составляющей.

2. Уравнения движения цилиндрической оболочки кругового сечения. Модель Тимошенко.

В рассматриваемой модели отношение толщины трубы к радиусу её срединной поверхности несколько превосходит то же отношение для оболочек, теория которых построена на основании гипотез Кирхгофа-Лява. Поэтому в уравнениях движения трубы уместно учитывать деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения нормальных элементов. Линеаризованные уравнения движения трубы имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{Eh} q_x + \rho_* \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1-\nu^2}{Eh} q_\theta + \rho_* \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R^2} + \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta \right) \right] + \\ & + \frac{1-\nu^2}{Eh} q_r - \rho_* \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial x \partial \theta} - \frac{6(1-\nu)}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) - \rho_* \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial x^2} - \frac{6(1-\nu)}{h^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta \right) - \\ & - \rho_* \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u, v, w – смещения точек срединной поверхности, соответственно, в осевом направлении, вдоль дуги кругового сечения и по нормали к поверхности трубы (в радиальном направлении). Прогиб w считается положительным вдоль направления к центру кривизны; q_x, q_θ, q_r – составляющие внешней нагрузки на соответствующие координатные оси, ρ_* и h – плотность материала и толщина трубы, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, ψ_x и ψ_θ – углы поворота нормали, соотношения в скобках – компоненты деформации поперечного сдвига вдоль соответствующих осей. Условия на поверхности трубы будут в дальнейшем удовлетворяться на её срединной поверхности.

В точках примыкания смеси к стенкам трубы скорость частиц смеси в радиальном направлении r по величине должна совпадать со скоростью смещения w , что приводит к формулировке граничного кинематического условия непроницаемости или плавности обтекания стенок трубы:

$$v_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (2.2)$$

Воздействие нормального σ_{rr} и касательных напряжений смеси $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}$ на внутреннюю поверхность трубы должны уравниваться, соответственно, радиальной q_r и касательными составляющими q_x, q_θ внешней силы, что позволяет, согласно (1.16), сформулировать динамические граничные условия:

$$\begin{aligned} q_r = \sigma_{rr}|_{r=R} &= \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(R, \theta, x, t), \\ q_\theta = -\sigma_{r\theta}|_{r=R} &= 0, \quad q_x = -\sigma_{rx}|_{r=R} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Преобразуем условие (2.2). Вычисляя по решению (1.13) производные, будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\lambda I'_n(\lambda R)}{I_n(\lambda R)} \varphi = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varphi = - \frac{I_n(\lambda r)}{\lambda I'_n(\lambda R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (2.4)$$

Тогда, представление (2.3) компоненты q_r внешней силы переписывается в форме

$$q_r = -\rho_0 \frac{I_n(\lambda R)}{\lambda I'_n(\lambda R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w. \quad (2.5)$$

В выражениях (2.4), (2.5) штрих над функцией $I_n(\lambda r)$ означает дифференцирование по аргументу. В соответствии с представлениями (1.11) и (1.13), решение системы (2.1) будем искать в виде:

$$(u, v, w) = (u_*, v_*, w_*) e^{i(\omega t + \alpha x + n\theta)}, \quad (\psi_x, \psi_\theta) = \frac{1}{R} (\psi_x^*, \psi_\theta^*) e^{i(\omega t + \alpha x + n\theta)}, \quad (2.6)$$

где u_*, v_*, w_* – амплитуды волн в соответствующих направлениях. Подставляя (2.6) в систему (2.1), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{c_*^2} - \alpha^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{n^2}{R^2} \right) u_* - \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \alpha v_* + i \frac{\nu}{R} \alpha w_* &= 0, \quad c_*^2 = \frac{E}{\rho_* (1-\nu^2)} \\ -\frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \alpha u_* + \left(-\frac{n^2}{R^2} - \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 + \frac{\omega^2}{c_*^2} \right) v_* - i \frac{n}{R^2} w_* &= 0 \\ i \frac{\nu}{R} \alpha u_* + i \frac{n}{R^2} v_* + \left[\frac{\omega^2}{c_*^2} - \frac{1}{R^2} - \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{n^2}{R^2} + \right. \\ \left. + \frac{\rho_0}{c_*^2 \rho_* h} \frac{I_n(\lambda r)}{\lambda I'_n(\lambda R)} (\omega + \alpha V)^2 \right] w_* + i \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R} \alpha \psi_x^* + i \frac{1-\nu}{2} \frac{n}{R^2} \psi_\theta^* &= 0 \\ -i \frac{6(1-\nu)}{h^2} \alpha w_* + \frac{1}{R} \left[\frac{\omega^2}{c_*^2} - \frac{\alpha^2}{R^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{n^2}{R^2} - \frac{6(1-\nu)}{h^2} \right] \psi_x^* - \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R^2} \alpha \psi_\theta^* &= 0 \\ -i \frac{6(1-\nu)}{h^2} \frac{n}{R} w_* - \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R^2} \alpha \psi_x^* + \frac{1}{R} \left[\frac{\omega^2}{c_*^2} - \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 - \frac{n^2}{R^2} - \frac{6(1-\nu)}{h^2} \right] \psi_\theta^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь c_* – скорость звука (распространения продольных волн) в материале трубы.

Перейдём в системе (2.7) к безразмерным параметрам:

$$w_* = \frac{\omega R}{c_*}, \quad V_* = \frac{V}{c_*}, \quad \delta = \frac{a_0}{R}, \quad l = \frac{h}{R}, \quad \alpha_* = \alpha R, \quad \lambda_* = \lambda R.$$

Для получения нетривиальных решений получаемой системы приравняем её определитель нулю, что приводит к дисперсионному уравнению

$$\det \|e_{ij}\| = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, 5, \quad (2.8)$$

где его элементами являются соотношения:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-v}{2} n^2, \quad e_{12} = -\frac{1+v}{2} \alpha_* n, \quad e_{13} = -iv\alpha_*, \quad e_{14} = 0, \quad e_{15} = 0 \\ e_{21} &= -\frac{1+v}{2} \alpha_* n, \quad e_{22} = \omega_*^2 - \frac{1-v}{2} \alpha_*^2 - n^2, \quad e_{23} = -in, \quad e_{24} = 0, \quad e_{25} = 0 \\ e_{31} &= iv\alpha_*, \quad e_{32} = in, \quad e_{33} = \omega_*^2 - 1 - \frac{1-v}{2} (\alpha_*^2 + n^2) + \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{I_n(\lambda_*)}{\lambda_* I_n'(\lambda_*)} \frac{(\omega_* + \alpha_* V_*)^2}{l}, \\ e_{34} &= i \frac{1-v}{2} \alpha_*, \quad e_{35} = i \frac{1-v}{2} n, \quad e_{41} = 0, \quad e_{42} = 0, \quad e_{43} = -i \frac{6(1-v)}{l^2} \alpha_*, \\ e_{44} &= \omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-v}{2} n^2 - \frac{6(1-v)}{l^2}, \quad e_{45} = -\frac{1+v}{2} \alpha_* n, \quad e_{51} = 0, \quad e_{52} = 0, \\ e_{53} &= -i \frac{6(1-v)}{l^2} n, \quad e_{54} = -\frac{1+v}{2} \alpha_* n, \quad e_{55} = \omega_*^2 - \frac{1-v}{2} \alpha_*^2 - n^2 - \frac{6(1-v)}{l^2} \\ \lambda_*^2 &= \alpha_*^2 - \frac{c_*^2}{c_0^2} (\omega_* + \alpha_* V_*)^2 \left[1 - \frac{\rho_1 c_*^2}{3\gamma p_0} \delta^2 (\omega_* + \alpha_* V_*)^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

Уравнение (2.8) описывает распространение несимметричных линейных волн в цилиндрической трубе, внутри которой протекает смесь несжимаемой жидкости с пузырьками калорически совершенного газа.

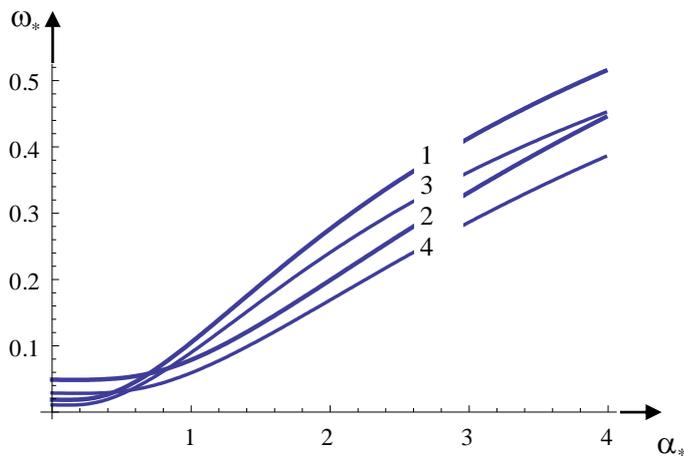
Если же исходить от модели Кирхгофа-Лява, то аналогичные выкладки над уравнениями движения оболочки приведут к иному дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} & \left[\omega_*^2 - 1 - \frac{l^2}{12} (\alpha_*^2 + n^2)^2 + \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{I_n(\lambda_*)}{\lambda_* I_n'(\lambda_*)} \frac{(\omega_* + \alpha_* V_*)^2}{l} \right] \left[\left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-v}{2} n^2 \right) \times \right. \\ & \times \left(\omega_*^2 - \frac{1-v}{2} \alpha_*^2 - n^2 \right) - \left(\frac{1+v}{2} \alpha_* n \right)^2 \left. \right] - n^2 \left[\omega_*^2 - (1-v)\alpha_*^2 - \frac{1-v}{2} n^2 \right] - \\ & - v^2 \alpha_*^2 \left(\omega_*^2 - \frac{1-v}{2} \alpha_*^2 \right) = 0 \quad (2.9) \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации вышеизложенных теорий рассмотрены модели стальных труб и оболочек ($v = 0.3$, $\rho_* = 7800 \text{ кг/м}^3$, $c_* = 5308 \text{ м/с}$, $l = 0.07$), наполненными водовоздушной смесью ($P_0 = 0.1 \text{ МПа}$, $\rho_0 = 988 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 119 \text{ м/с}$, $\gamma = 1.4$, $\beta_0 = 0.01$) с мелкими ($\delta = 5 \cdot 10^{-4}$) и крупными ($\delta = 2 \cdot 10^{-2}$) пузырьками. Численные расчёты проведены по уравнениям (2.8) и (2.9).

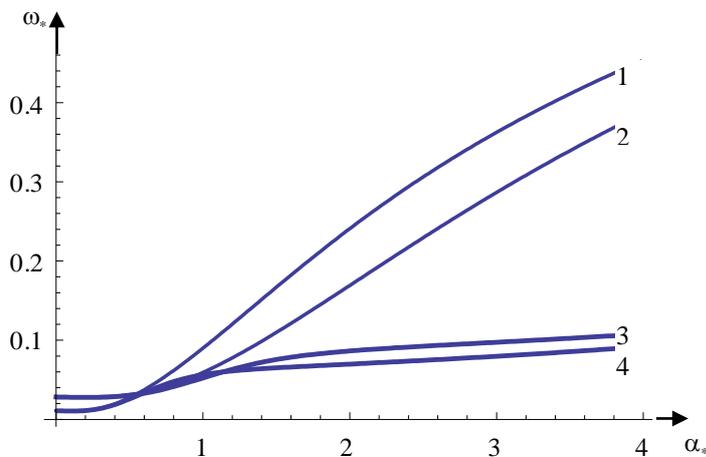
Фиг.1 отнесена к случаю трубы, наполненной чистой водой при параметрах гидроупругой системы $l = 0.02$, $V_* = 0.005$ и модах $n = 2$ и 3 . Частоты

соответствующих колебаний $\omega_*(\alpha_*)$, вычисленные по теории Кирхгофа-Лява – кривые 1, 3 по величине больше частот по Тимошенко – кривые 2, 4, т.е. уточняющая классическую модель Кирхгофа-Лява иная модель уменьшает жёсткость гидроупругой системы, вследствие которой имеет место уменьшение значений собственных колебаний оболочки. По обеим теориям для значительно длинных волн ($\alpha_* \rightarrow 0$) с увеличением n значения частот $\omega_*(\alpha_*)$ возрастают, а для коротких волн, наоборот, убывают. Такая же картина поведения кривых $\omega_*(\alpha_*)$ наблюдается и при больших $n \geq 4$.

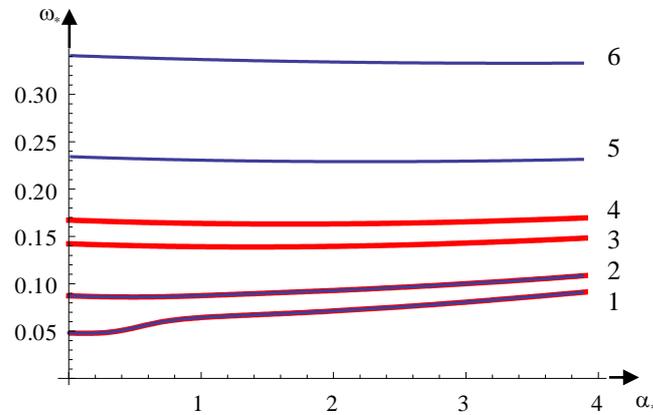


Фиг. 1. Величины частот по теориям Кирхгофа-Лява и Тимошенко.

На фиг. 2 при параметрах $l = 0.02$, $V_* = 0.005$ и наличии в трубе воды – кривые 1 ($n = 2$), 2 ($n = 3$) и смеси с мелкими $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ пузырьками кривые 3 ($n = 2$), 4 ($n = 3$) приведены зависимости $\omega_*(\alpha_*)$, вычисленные по теории Тимошенко. Видно, что частоты трубы с водой всегда превосходят по величине значения $\omega_*(\alpha_*)$ трубы со смесью.



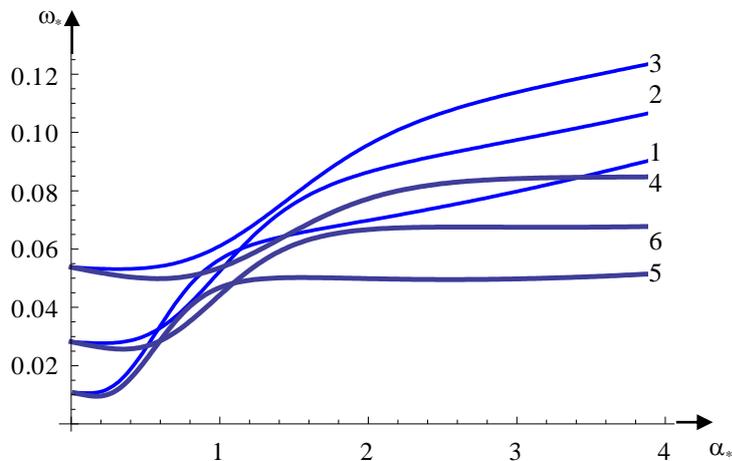
Фиг. 2. Значения частот при разных наполнителях.



Фиг. 3. Зависимости частот от числа окружных волн.

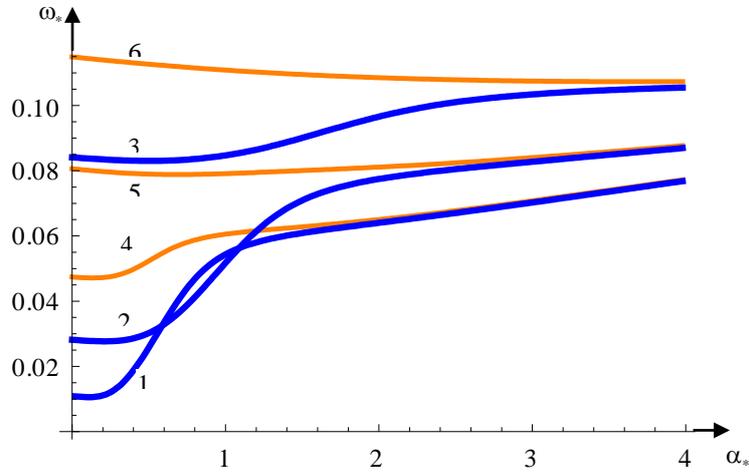
Фиг. 3 иллюстрирует зависимость частоты собственных колебаний трубы (оболочки) $\omega_*(\alpha_*)$ от моды n (числа окружных волн) при параметрах $l=0.07$, $V_* = 0.005$ системы, наполненной смесью с мелкими $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ пузырьками. Для значений $n=2$ и $n=3$ как по Кирхгофу-Ляву, так и Тимошенко, частоты колебаний совпадают (кривые 1 и 2). Различие проявляется для $n=6$ и $n=5$, при которых соответствующие частоты по Кирхгофу-Ляву – кривые 6, 5 превосходят по величине частоты по Тимошенко – кривые 4 и 3.

На фиг. 4 представлены кривые $\omega_*(\alpha_*)$ в зависимости от величины скорости протекания V_* при параметрах $l=0.02$, $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$; $V_* = 0.005$ – кривые 1 ($n=2$), 2 ($n=3$), 3 ($n=4$) и $V_* = 0.015$ – кривые 5 ($n=2$), 6 ($n=3$), 4 ($n=4$). Видно, что с увеличением V_* частоты по Тимошенко уменьшаются, при этом, как для длинных ($\alpha_* \rightarrow 0$), так и коротких волн с возрастанием моды n



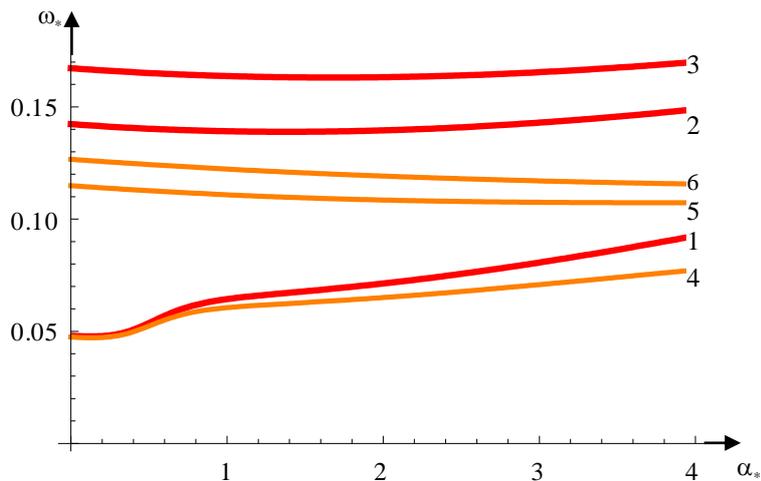
Фиг. 4. Поведение частот в зависимости от величины скорости протекания.

величины частот $\omega_*(\alpha_*)$ увеличиваются.



Фиг. 5. Значения частот в зависимости от толщины

Фиг. 5 отнесена к примерам труб разных толщин $l = 0.02$ – кривые 1 ($n = 2$), 2 ($n = 3$), 3 ($n = 5$) и $l = 0.07$ – кривые 4 ($n = 2$), 5 ($n = 3$), 6 ($n = 5$), которые заполнены протекающими с одинаковыми скоростями $V_* = 0.005$ смесями с крупными $\delta = 2 \cdot 10^{-2}$ пузырьками. С увеличением толщины жёсткость гидроупругой системы усиливается и поэтому частоты $\omega_*(\alpha_*)$ утолщённой трубы по величине больше частот трубы умеренной толщины. Вычисления проведены по теории Тимошенко. Повышение n увеличивает значения частот и для достаточно коротких волн значения частот смыкаются, т.е. влияние изменения толщин становится несущественным. Аналогичная картина поведения частот наблюдается и по теории Кирхгофа-Лява.



Фиг. 6. Зависимости поведения частот от размеров

На фиг. 6 приведены вычисленные по Тимошенко зависимости $\omega_*(\alpha_*)$ от размеров пузырьков мелких $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ – кривые 1 ($n = 2$), 2 ($n = 5$), 3 ($n = 6$) и крупных $\delta = 2 \cdot 10^{-2}$ – кривые 4 ($n = 2$), 5 ($n = 5$), 6 ($n = 6$) при фиксированных толщине $l = 0.07$ и скорости протекания $V_* = 0.005$. Для смеси с мелкими пузырьками значения $\omega_*(\alpha_*)$ превосходят по величине частоты трубы со смесью с крупными пузырьками. Такая же картина кривых $\omega_*(\alpha_*)$ имеет место и в случае использования теории Кирхгофа-Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В.Д., Лакиза В.Д., Павловский В.С., Пелых Н.А. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. Киев: Наукова Думка, 1988. 256с.
2. Лакиза В.Д. Динамика упругой цилиндрической оболочки, несущей газожидкостную среду, при двухчастотном вибровозбуждении // Прикл. механика. 2008. Т.44. №11. С.112-122.
3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при внешнем динамическом давлении. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №1. С.25-32.
4. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов А.Н. Анализ нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при взаимодействии с протекающей жидкостью. // Прикл. механика. 2010. Т.46. №10. С.36-52.
5. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости М.: Наука, 1979. 320с.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

Сведения об авторах:

Оганян Гагик Гришаевич – ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **тел.:** (+37493) 946-947,

E-mail: oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Левонович – ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского государственного университета.

Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, **тел.:** (+37477) 002-408 (моб.),

E-mail: ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 03.02.2014