ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №4, 2014 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА КРАЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В СОСТАВНОМ УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А.

Ключевые слова: локализованная волна, дифракция, трещина, составное тело, факторизация, асимптотика.
Keywords: localized wave, diffraction, crack, compound body, factorization, asymptotic

Գրիգորյան Է.Խ., Աղայան Կ.Լ., Ջիլավյան Ս.Հ.

Տեղայնացված սահքի ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ ճաքով թուլացված բաղադրյալ առաձգական տարածության մեջ

Դիտարկվում է անվերջությունից տարածվող Լյավի տեղայնացված սահքի հարթ ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը, անհամասեռության գծին զուգահեռ կիսաանվերջ ճաքով թուլացված, կտոր–առ–կտոր համասեռ տարածության համար: Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ, առաձգական ալիքների դիֆրակցիայի խառը եզրային խնդրի լուծումը բերվում է իրական առանցքի վրա Ռիմանի խնդրի, Դիրակի $\delta(x)$ ֆունկցիայով աջ մասով: Ֆունկցիոնալ հավասարման ընդհանրացված ֆունկցիաներով կառուցված լուծումը հնարավորություն է տվել ստանալ ալիքային դաշտի բաղադրիչները բաղադրյալ տարածության յուրաքանչյուր տեղամասում, ինչպես նաև ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են դիֆրակցված դաշտի առանձնահատկությունները հեռավոր տիրույթներում:

Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L., Jilavyan S.H.

Diffraction of localized shear wave at the edge of semi-infinite crack in compound elastic space

The diffraction of localized shear plane Love`s wave, falling from infinity in a piecewise-homogeneous elastic space weakened by a semi-infinite crack parallel to the line of heterogeneity is considered.
With the help of Fourier transform, mixed boundary value problem of diffraction of elastic waves is reduced to the problem of Riemann type theory of analytic functions on the real axis with the right part of the generalized Dirac function $\delta(x)$. Obtaining in generalized functions solution of functional equations allowed us to obtain the distribution of wave field in each subregion of elastic space, as well as asymptotic formulas defining the characteristics of the diffraction field in remote areas.

Рассматривается задача дифракции локализованной сдвиговой плоской волны Лява, падающей из бесконечности, в упругом кусочно-однородном пространстве, ослабленной полубесконечной трещиной параллельной линии неоднородности. Используя преобразование Фурье, смешанная краевая задача дифракции упругих волн сводится к задаче типа Римана теории аналитических функций на действительной оси с правой частью обобщённой функции Дирака $\delta(x)$. Полученное в обобщённых функциях решение функционального уравнения позволило получить распределение волнового поля в каждой подобласти упругого пространства, а также асимптотические формулы, определяющие характерные особенности дифракционного поля в дальних зонах.

Проблемы динамической теории упругости, связанные с процессами колебаний, дифракции и распространения различных типов волн в неоднородных упругих средах представляют для исследователей несомненный интерес. По вопросам исследования характерных особенностей распространения и дифракции сдвиговых плоских волн в упругих и пьезоэлектрических средах, содержащих разнородные концентраторы напряжений, опубликовано немало работ, из которых, в частности, отметим [1-6] и цитированные там работы. Здесь, в отличие от указанных работ, где концентраторы напряжений располагаются на линии раздела материалов, рассматривается задача о дифракции локализованной сдвиговой плоской волны в упругом кусочно-однородном пространстве с концентратором напряжений в виде полубесконечной трещины, расположенной внутри одного из полупространств.

1. Рассмотрим кусочно-однородное упругое пространство состоящее из двух различных полупространств, занимающие в декартовой системе координат $Oxyz$, область $\Omega_1\left(|x|<\infty, y>0, |z|<\infty\right)$ и $\Omega_2\left(|x|<\infty, y<0, |z|<\infty\right)$. Полупространство Ω_2 ослаблено полубесконечной сквозной трещиной продольного сдвига по полуплоскости $\Omega_0\left(x<0, y=-h, |z|<\infty\right)$, а полупространства, контактирующие по плоскости $y=0$, находятся в условиях полного контакта.

В квандранте $\Omega_{11}\left(x<0, y>0, |z|<\infty\right)$ и контактирующей с ней полуслое $\Omega_{21}\left(x<0, -h<y<0, |z|<\infty\right)$ из безконечности, по направлению оси Ox распространяется заданная локализованная сдвиговая волна Лява [7]:

$$u_z^{(\infty)}\left(x,y,t\right)=w_L\left(x,y\right)e^{-i\omega t} \tag{1.1}$$

с амплитудой

$$w_L\left(x,y\right)=\begin{cases} w_L^{(1)}\left(x,y\right)=A_m^{(L)}\cdot e^{-i\sigma_m x}\cdot e^{-\gamma_m^{(1)}y}, & y\geq 0\\ w_L^{(2)}\left(x,y\right)=A_m^{(L)}\dfrac{\operatorname{ch}\left(\gamma_m^{(2)}\left(y+h\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\gamma_m^{(2)}h\right)}e^{-i\sigma_m x}, & -h\leq y\leq 0\end{cases} \tag{1.2}$$

где $A_m^{(L)}$ – постоянная, а

$$\gamma_m^{(1)}=\sqrt{\sigma_{m1}^2-k_1^2},\qquad \gamma_m^{(2)}=\sqrt{\sigma_{m1}^2-k_2^2} \tag{1.3}$$

Здесь $k_j=\omega/c_j$ – волновые числа, $c_j=\sqrt{\mu_j/\rho_j}$ – скорости распространения сдвиговых упругих волн, μ_j,ρ_j – модуль сдвига и плотность среды в областях $\Omega_j\left(j=1,2\right)$, ω –частота колебаний, t –время, σ_{m1} – волновое число локализованной волны Лява, т.е. m -ый положительный корень функции

$$L_1\left(\sigma\right)=\mu_1\gamma_1\operatorname{ch}\left(\gamma_2 h\right)+\mu_2\gamma_2\operatorname{sh}\left(\gamma_2 h\right) \tag{1.4}$$

где h – толщина полуслоя Ω_{21}, а

$$\gamma_j=\sqrt{\sigma^2-k_j^2};\quad j=1,2 \tag{1.5}$$

Не останавливаясь здесь на функциях (1.3) и (1.5) входящих в (1.4), к ним обратимся позже, отметим лишь, что $k_1<\sigma<k_2$, которое обеспечивает существование и распространение локализованных волн Лява в областях Ω_{11} и Ω_{21}.

Предполагая, что среда находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить дифрагированное волнове поле во всех областях составного пространства.

Разделим составное пространство на три части: Ω_1, $\Omega_2^{(1)}\left(|x|<\infty,-h<y<0,|z|<\infty\right)$ и $\Omega_2^{(2)}\left(|x|<\infty,y<-h,|z|<\infty\right)$.

Уравнения движения рассматриваемой задачи в амплитудах (гармонический множитель, как обычно опускается) запишутся в виде [7]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\begin{Bmatrix}k_1^2\\ k_2^2\end{Bmatrix}\right)\begin{pmatrix}w_1\\ w_2^{(j)}\end{pmatrix}=0\quad (x,y)\in\begin{Bmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2^{(j)}\end{Bmatrix},\ i=1,2 \tag{1.6}$$

где $w_1(x,y), w_2^{(j)}(x,y)$ – амплитуды перемещений в областях Ω_1 и $\Omega_2^{(j)}$.

Для формулировки граничных условий заметим, что берега трещины свободны от напряжений, а на поверхностях соприкасания выполняются условия полного контакта. Так что, граничные и контактные условия посредством $w_1(x,y)$ и $w_2^{(j)}(x,y)$ запишутся в виде:

$$w_1(x,+0)=w_2^{(1)}(x,-0);\quad \mu_1\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=+0}=\mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=-0},\ -\infty<x<\infty \tag{1.7}$$

$$w_2^{(1)}(x,-h+0)=w_2^{(2)}(x,-h-0);\quad \mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=-h+0}=\mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial y}\right|_{y=-h-0},\ x>0 \tag{1.8}$$

$$\mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=-h+0}=\mu_2\left.\frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial y}\right|_{y=-h-0}=0,\qquad x<0 \tag{1.9}$$

Решение краевой задачи (1.6)–(1.9) должно удовлетворять также условию уходящей волны [8], к которому обратимся позже.

Выше имелось в виду, что [7]

$$\tau_{xz}(x,y)=\mu\frac{\partial w}{\partial x},\quad \tau_{yz}(x,y)=\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.10}$$

Учитывая, что в областях $\Omega_{12}\left(x>0,y>0,|z|<\infty\right)$ и $\Omega_{22}\left(x>0,-h<y<0,|z|<\infty\right)$ имеются только излученные волны, представим, как обычно, в областях Ω_1 и $\Omega_2^{(1)}$:

$$W_1(x,y)=w_1(x,y)-w_L^{(1)}(x,y);\quad W_2(x,y)=w_2^{(1)}(x,y)-w_L^{(2)}(x,y), \tag{1.11}$$

и решение волновых уравнений (1.6), после преобразования Фурье, удовлетворяющие условиям уходящей волны, ищем в виде

$$\bar{W}_1(\sigma,y)=C_1e^{\gamma_1 y},\quad y\ge 0 \tag{1.12}$$

$$\bar{W}_2(\sigma,y)=Ae^{-\gamma_2 y}+Be^{\gamma_2 y},\quad -h\le y\le 0 \tag{1.13}$$

$$\bar{w}_3(\sigma,y)=C_3e^{\gamma_2,y},\ y\le -h \tag{1.14}$$

Применив теперь преобразование Фурье к граничным условиям (1.7)–(1.9) и удовлетворяя им при помощи (1.12)–(1.14), приходим к следующей краевой задаче типа Римана на действительной оси [2,8].

$$\mu_2^{-1}\bar{\Phi}^+(\sigma)+\gamma_2(\sigma)\bar{K}(\sigma)\left[\bar{\Psi}^-(\sigma)-\pi A_m^{(L)}\operatorname{ch}^{-1}\left(\gamma_m^{(2)}h\right)\delta(\sigma+\sigma_{m1})\right]=0 \qquad (1.15)$$

$$\bar{K}(\sigma)=\frac{2L_1(\sigma)\cdot e^{-\gamma_2 h}}{\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2} \qquad (1.16)$$

где $\delta(\sigma)$– известная функция Дирака, $L_1(\sigma)$ и $\gamma_j(\sigma)$ даются (1.4), (1.5). $\bar{\Phi}^+(\sigma)$ и $\bar{\Psi}^-(\sigma)$– трансформанты Фурье функции $\varphi^+(x)$ и $\psi^-(x)$ соответственно, которые связаны с амплитудами $w_2^{(j)}$ $(j=1,2)$ зависимостями:

$$w_2^{(1)}(x,-h+0)-w_2^{(2)}(x,-h-0)=2\psi^-(x); \quad -\infty<x<\infty \qquad (1.17)$$

$$\left.\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial y}\right|_{y=-h+0}=\left.\frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial y}\right|_{y=-h-0}=\frac{1}{\mu_2}\varphi^+(x), \quad -\infty<x<\infty \qquad (1.18)$$

и подчинены условиям:

$$\psi^-(x)=0 \text{ при } x>0; \qquad \varphi^+(x)=0 \text{ при } x<0 \qquad (1.19)$$

Неизвестные функции из (1.12)–(1.14) при помощи решений функционального уравнения (1.15) выражаются формулами:

$$A=-\frac{\gamma_1\mu_1+\gamma_2\mu_2}{2\gamma_2\mu_2L_1(\sigma)}\bar{\Phi}^+(\sigma); \qquad B=\frac{\gamma_1\mu_1-\gamma_2\mu_2}{2\gamma_2\mu_2L_1(\sigma)}\bar{\Phi}^+(\sigma)$$

$$C_1=-\frac{\bar{\Phi}^+(\sigma)}{L_1(\sigma)}, \qquad C_2=\frac{1}{\gamma_2\mu_2}e^{\gamma_2 h}\bar{\Phi}^+(\sigma) \qquad (1.20)$$

Таким образом, решение поставленной выше задачи свелось к решению функционального уравнения (1.15). Имея решение (1.15), при помощи (1.20), (1.12)–(1.14) можно определить волновое поле в соответствующих областях рассматривамой задачи.

Прежде чем перейти к решению определяющего функционального уравнения, относительно функций $L_1(\sigma),\gamma_j(\sigma)$ $(j=1,2)$, входящих в (1.15), отметим следующее. Функция $L_1(\sigma)$ имеет симметрично расположенные действительные корни $\pm\sigma_{m1}$ при $k_1<|\sigma|<k_2$ [9,10]. Число этих корней и их распределение на действительной оси существенно зависит от параметра $h\sqrt{k_2^2-k_1^2}$ [2]. Оказывается, что если

$$(n-1)\pi<h\sqrt{k_2^2-k_1^2}\le(2n-1)\pi/2, \; n=1,2,...$$

то $L_1(\sigma)$ имеет ровно $2n$ корней, расположенных в интервалах

$$(hk_2)^2-(2n-2m-1)^2\pi^2/4\le(\pm\sigma_{m1}h)^2<(hk_2)^2-(n-m)^2\pi^2, \quad m=1,2,...,n \qquad (1.21)$$

при этом, $(hk_1)^2>(hk_2)^2-(2n-1)^2\pi^2/4.$

Если же

$$\left(2n-1\right)\pi/2<h\sqrt{k_2^2-k_1^2}\le \pi n,\qquad n=1,2,....$$

то $L_1\left(\sigma\right)$ опять имеет $2n$ корней, находящихся в интервалах

$$\left(hk_2\right)^2-\left(2n-2m+1\right)^2\pi^2/4<\left(\pm h\sigma_{m1}\right)^2<\left(hk_2\right)^2-\left(n-m\right)^2\pi^2$$
$$m=1,2,...,n \qquad (1.22)$$

при этом, $\left(hk_1\right)^2<\left(hk_2\right)^2-\left(2n-1\right)^2\pi^2/4$.

Чтобы удовлетворялось условие уходящей волны, считается, что действительная ось обходит отрицательные корни $\sigma=-\sigma_{m1}$ функции $L_1\left(\sigma\right)$ сверху, а положительные корни $\sigma=\sigma_{m1}$ – снизу. Соответственно, для функции $\gamma_j\left(\sigma\right)$ из (1.3) принимается, что $\sqrt{\sigma^2-k_j^2}>0$ при $\left|\sigma\right|>k_j$, $\sqrt{\sigma^2-k_j^2}=-i\sqrt{k_j^2-\sigma^2}$, т.е. в (1.9) предполагается, что действительная ось обходит точки ветвления $\sigma_j=-k_j$ функции комплексного переменного $\gamma_j\left(\alpha\right)=\sqrt{\alpha^2-k_j^2}$ сверху, а $\sigma=k_j$ – снизу.

Методом факторизации [2,8] решение краевой задачи (1.15) при помощи известного представления

$$2\pi i\delta\left(\sigma+\sigma_{m1}\right)=\left(\sigma+\sigma_{m1}-i0\right)^{-1}-\left(\sigma+\sigma_{m1}+i0\right)^{-1}$$

получим в виде

$$\bar{\Phi}^+\left(\sigma\right)=-\bar{A}_m^{(L)}\frac{\mu_2\sqrt{\sigma+k_2}}{\sigma+\sigma_{m1}+i0}\bar{K}^+\left(\sigma\right), \qquad (1.23)$$

$$\bar{\Psi}^-\left(\sigma\right)=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{\sqrt{\sigma-k_2}\bar{K}^-\left(\sigma\right)}\cdot\frac{1}{\sigma+\sigma_{m1}-i0}, \qquad (1.24)$$

где

$$\bar{A}_m^{(L)}=A_m^{(L)}\sqrt{k_2+\sigma_{m1}}\bar{K}^+\left(\sigma_{m1}\right)\mathrm{ch}^{-1}\left(\gamma_m^{(2)}h\right) \qquad (1.25)$$

$$\bar{K}\left(\sigma\right)=\bar{K}^+\left(\sigma\right)\cdot\bar{K}^-\left(\sigma\right),\quad \bar{K}^{\pm}\left(\sigma\right)=\exp\left(\bar{F}_{\pm}\left(\sigma\right)\right)$$

$$\bar{F}_+\left(\sigma\right)=\int_0^{\infty}F\left(x\right)e^{ix(\sigma+i0)}dx,\quad \bar{F}_-\left(\sigma\right)=\int_{-\infty}^{0}F\left(x\right)e^{ix(\sigma-i0)}dx \qquad (1.26)$$

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1+\frac{\mu_1\gamma_1-\mu_2\gamma_2}{\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2}e^{-2\gamma_2 h}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma \qquad (1.27)$$

Из (1.26) следует, что $\bar{F}_+\left(\sigma\right)=\bar{F}_-\left(-\sigma\right)$, следовательно, $\bar{K}^+\left(\sigma\right)=\bar{K}^-\left(-\sigma\right)$. При этом, $\bar{F}^+\left(\sigma\right)$ можно вычислить по формуле

$$\bar{F}^+\left(\sigma\right)=\frac{1}{2}\ln\bar{K}\left(\sigma\right)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\bar{K}\left(t\right)\frac{dt}{t-\sigma}$$

Выше $\bar{K}^+\left(\sigma\right)\left(\bar{K}^-\left(\sigma\right)\right)$ – граничное значение функции $\bar{K}^+\left(\alpha\right)\left(\bar{K}^-\left(\alpha\right)\right)$, комплексной переменной $\alpha=\sigma+i\tau$, регулярной и не имеющей нулей при

$\operatorname{Im}\alpha > 0\left(\operatorname{Im}\alpha < 0\right)$. При этом, $\bar{K}^{\pm}(\alpha)\to 1$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности [8].

2. Переходим к определнию излучённого волнового поля. При помощи (1.11)–(1.13), (1.18), (1.23)–(1.27), после обратного преобразования, для амплитуд упругих перемещений получим следующие представления:

1) В области $\Omega_1\left(y \ge 0\right)$

$$w_1(x,y)=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\operatorname{ch}(\gamma_2 h)}{\sqrt{\sigma-k_2}\bar{K}^{-}(\sigma)(\sigma+\sigma_{m1}-i0)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{\sigma+k_2}e^{\gamma_2 h}}{\gamma_2}\frac{\bar{K}^{+}(\sigma)}{\sigma+\sigma_{m1}+i0}\right]e^{-\gamma_1 y-i\sigma x}d\sigma \tag{2.1}$$

2) В области $\Omega_2^{(1)}\left(-h \le y \le 0\right)$

$$w_2(x,y)=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\operatorname{ch}(\gamma_2 (y+h))}{\sqrt{\sigma-k_2}\bar{K}^{-}(\sigma)(\sigma+\sigma_{m1}-i0)}-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{\gamma_2(y+h)}}{\gamma_2}\frac{\sqrt{\sigma+k_2}\bar{K}^{+}(\sigma)}{\sigma+\sigma_{m1}+i0}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.2}$$

3) В области $\Omega_2^{(2)}\left(y \le -h\right)$

$$w_2^{(2)}(x,y)=-\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma+k_2}\bar{K}^{+}(\sigma)e^{\gamma_2(y+h)}}{\gamma_2(\sigma+\sigma_{m1}+i0)}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{2.3}$$

При помощи (2.2) и (2.3) получим следующее представление:

$$\tau_{r\theta}(r,0)=\frac{\mu_2\bar{A}_m^{(L)}e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}+O(1),\quad \left(-\pi<\theta<\pi\right)\quad r\to 0 \tag{2.4}$$

определяющее распределение амплитуды сдвигающих напряжений $\tau_{r\theta}$ около конца трещины в полярных координатах.

3. Для изучения характерных особенностей волнового поля и получения асимптотических формул на дальних зонах рассматриваемой составной области, следует исследовать полученные интегральные составляющие, входящие в (2.1)–(2.3), в каждой подобластях Ω_1 и $\Omega_2^{(j)}$ $\left(j=1,2\right)$.

Рассмотрим подобласть Ω_{11} $\left(x<0, y\ge 0\right)$, где перемещение даётся (2.1). Исследование интегралов по вещественной оси, которая, как было отмечено выше, обходит точки $-\sigma_{n1}$ $\left(n=1,2,\ldots,N\right)$ и $-k_j$ $\left(j=1,2\right)$ сверху, а точки σ_{n1} и k_j – снизу, входящих в (2.1), проведём при помощи подхода из [11]. Амплитуду перемещений (2.1) при помощи (1.26) и (1.28) представим в следующем виде:

$$w_{11}^{(1)}(x,y)=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma+k_2}\bar{K}^{+}(\sigma)}{L_1(\sigma)}\frac{e^{-\gamma_1 y-i\sigma x}}{\sigma+\sigma_{m1}+i0}d\sigma+w_L^{(1)}(x,y) \tag{3.1}$$

где $w_L^{(1)}(x,y)$ – падающая волна из (1.2).

Переходя в разрезанную комплексную плоскость $\alpha = \sigma + i\tau$, описанную в [2,5,6], и имея в виду особенности аналитического продолжения подынтегральных функций из (3.1) на верхнюю полуплоскость этой плоскости, амплитуду перемещений (3.1) в области Ω_{11} можно представить при помощи регулярных интегралов по береграм разрезов в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_{11}(x,y) = &-\frac{\bar{A}_m^{(L)}\mu_2}{\pi}\int_0^{k_1}\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{i\sqrt{k_1^2-\sigma^2 y}}}{L_1(\sigma - i0)}\right\}\frac{\sqrt{k_2+\sigma}\bar{K}_{(\sigma)}^{+}}{\sigma+\sigma_{m1}}e^{-i\sigma x}d\sigma - \\ &-\frac{\bar{A}_m^{(L)}\mu_2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{-i\sqrt{k_1^2+\tau^2 y}}}{L_1(+0+i\tau)}\right\}\frac{\sqrt{k_2+i\tau}\bar{K}_{(\sigma)}^{+}}{\sigma_{m1}+i\tau}e^{-i\sigma x}d\tau + \\ &+i\bar{A}_m^{(L)}\mu_2\Lambda_L^{(1)}(x,y)+w_L^{(1)}(x,y), \qquad x,y\in\Omega_{11} \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} &L_1(\sigma \pm i0) = -\mu_2\gamma_2^{(\sigma)}\sin\left(\gamma_2^{(\sigma)}h\right) \pm i\mu_1\gamma_1^{(\sigma)}\cos\left(\gamma_2^{(\sigma)}h\right) \\ &L_1(0 \pm i\tau) = -\mu_2\gamma_2^{(\sigma)}\sin\left(\gamma_2^{(\tau)}h\right) \pm i\mu_1\gamma_1^{(\tau)}\cos\left(\gamma_2^{(\tau)}h\right) \\ &\gamma_j^{(\sigma)} = \sqrt{k_j^2-\sigma^2}, \quad \gamma_j^{(\tau)} = \sqrt{k_j^2+\tau^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\Lambda_L^{(1)}(x,y) = iA_m^{(L)}\mu_2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{\sigma_{m1}+k_2}\bar{K}^{+}(\sigma_{m1})e^{-y\sqrt{\sigma_{m1}^2-k_1^2}}}{L_1'(\sigma_{m1})(\sigma_{n1}+\sigma_{m1})}e^{-i\sigma_{n1}}x \tag{3.4}$$

Таким образом, волновое поле в области Ω_{11} даётся формулой (3.2), где составляющая $\Lambda_L^{(1)}(x,y)$ представляет сумму излучённых локализованных волн Лява, соответствующих волновым числам $\sigma_{n1}(n=1,2,...N)$, $w_L^{(1)}(x,y)$– падающая волна, а интегральные составляющие представляют излучённое поле объёмных волн.

Следует отметить, что в связи с наличием в интеграле с бесконечным пределом из (3.2) экспоненцтально убивающего множителя, с вычислительной точки зрения формула (3.2) более удобна для анализа ближнего поля, чем исходный интеграл (2.1) по вещественной оси [16].

При определении асимптотических формул, представляющих волновое поле в дальних зонах, главным образом, исходят из формулы (3.1), используя различные подходы, наиболее распространенный из которых является метод перевала [16]. Оказывается, представление (3.2) более чем удобно для определения асимптотических формул, представляющих характерные особенности волнового поля в дальних зонах рассматриваемой области [12].

С этой целью в (3.2) перейдём к полярным координатам

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \pi/2 < \theta \le \pi \tag{3.5}$$

и запишем её в следующем виде:

$$w_{11}(r,\theta)=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[L_1(0-i\tau)e^{-r_n^{(-)}}-L_1(0+i\tau)e^{-rn^{(+)}}\right]\frac{\sqrt{k_2+i\tau}\bar{K}^{+}(i\tau)d\tau}{\Delta_1(\tau)(\sigma_{m1}+i\tau)}+$$

$$+\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{2\pi}\int_0^{k_1}\left[L_1(\sigma+i0)e^{i\lambda^{(+)r}}-L_1(\sigma-i0)e^{-ir\lambda^{(-)}}\right]\frac{\sqrt{k_2+\sigma\_}\bar{K}^{+}(\sigma)}{\Delta_2(\sigma)}\frac{d\tau}{\sigma_{m1}+\sigma}+$$

$$+\Lambda_L^{(1)}(r,\theta)+w_L^{(1)}(r,\theta) \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1(\tau)&=\mu_2^2\left(k_2^2+\tau^2\right)\sin^2\left(\gamma_2^{(\tau)}h\right)+\mu_1^2\left(k_1^2+\tau^2\right)\cos^2\left(\gamma_2^{(\tau)}h\right)\\ \Delta_2(\sigma)&=\mu_2^2\left(k_2^2-\sigma^2\right)\sin^2\left(\gamma_2^{(\sigma)}h\right)+\mu_1^2\left(k_1^2-\sigma^2\right)\cos^2\left(\gamma_2^{(\sigma)}h\right)\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\lambda^{(\pm)}(\sigma)=\sigma|\cos\theta|\pm\sqrt{k_1^2-\sigma^2}\sin\theta,\qquad h^{(\pm)}(\tau)=\tau|\cos\theta|\pm\sqrt{k_1^2+\tau^2}\sin\theta \tag{3.8}$$

$$\left\{\Lambda_L^{(1)}(r,\theta),\ w_L^{(1)}(r,\theta)\right\}=\left\{\Lambda_L^{(1)}(x,y),\ w_L^{(1)}(x,y)\right\}_{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}} \tag{3.9}$$

Теперь, следуя [11], из (3.6) получим следующую асимптотическую формулу для волнового поля в квадранте Ω_{11} при $r\to\infty$

$$\begin{aligned}w_{11}(r,\theta)&=A_m^{(L)}e^{-\gamma_m^{(1)}r\sin\theta+i\sigma_{m1}r\cos\theta}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{A}_m^{(L)}\mu_2B_{11}^{(1)}\frac{e^{i(k_1r-\pi/4)}}{r^{1/2}}+\\ &+iA_m^{(L)}\mu_2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{k_2+\sigma_{n1}}\bar{K}^{+}(\sigma_{n1})}{L_1'(\sigma_m)(\sigma_{n1}+\sigma_{m1})}e^{-i\sigma_{n1}r\cos\theta-r\sin\theta\gamma_m^{(1)}}+0\left(r^{-3/2}\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$B_{11}^{(1)}=-\frac{L_1(k_1|\cos\theta|)}{\Delta_2(k_1|\cos\theta|)}\cdot\frac{\bar{K}^{+}(k_1|\cos\theta|)}{\sigma_{m1}+k_1|\cos\theta|}\frac{\sqrt{k_2+k_1|\cos\theta|}}{\sqrt{2}}\sqrt{k_1}\sin\theta \tag{3.11}$$

Из (3.10) видно, что при $r\to\infty$ в области Ω_{11} волновое поле представляется в виде суммы сдвиговой объёмной волны, локализованной падающей волны и конечного числа дифрагированных локализованных волн с волновыми числами $\sigma_n\left(n=1,2,...,N\right)$. При этом, последние две составляющие имеют доминирующий характер.

Аналогичным путем, из (2.1) для определения перемещений в области $\Omega_{21}^{(1)}\left(x<0,\quad -h<y<0\right)$ получим формулу:

$$\begin{aligned}w_{21}^{(1)}(x,y)&=\frac{\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\gamma_1^{(\tau)}\cos\left(\gamma_2^{(\tau)}(y+h)\right)\sqrt{k_2+i\tau}\bar{K}^{+}(i\tau)}{\Delta_1(\tau)}\cdot\frac{e^{-\tau|x|}d\tau}{\sigma_{m1}+i\tau}+\\ &+\frac{i\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_0^{k_1}\frac{\gamma_1^{(\sigma)}\sqrt{k_2+\sigma}\bar{K}^{+}(\sigma)}{\Delta_2(\sigma)}\cdot\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sigma_{m1}+\sigma}+w_L^{(2)}(x,y)+\Lambda_L^{(2)}(x,y)\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\Lambda_L^{(2)}(x,y)=i\bar{A}_m^{(L)}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{k_2+\sigma_{n1}}\bar{K}^{+}(\sigma_{n1})\Delta_3(\sigma_{n1})}{\sqrt{k_2^2-\sigma_{n1}^2}L_1'(\sigma_{n1})}\cdot\frac{e^{-i\sigma_{n1}}x}{\sigma_{n1}+\sigma_{m1}} \tag{3.13}$$

$$\Delta_3(\sigma_{n1})=\mu_1\sqrt{\sigma_{n1}^2-k_1^2}\sin\left(y\sqrt{k_2^2-\sigma_{n1}^2}\right)-\mu_2\sqrt{k_2^2-\sigma_{n1}^2}\cos\left(y\sqrt{k_2^2-\sigma_{n1}^2}\right)$$

$\Delta_1(\tau)$ и $\Delta_2(\sigma)$ даются формулами (3.7), а $w_L^{(2)}(x,y)$ – (1.3).

Из (3.12)–(3.14) следует, что волновое поле в Ω_{21} складывается из: а) локализованных волн с волновыми числами $\sigma_{n1}(n=1,2,...,N)$, б) падающей волны, в) дифрагированных объёмных волн.

Асимптотическая формула, представляющая распределение волнового поля в дальних зонах Ω_{21}, получена методом интегрирования по частям [11], и имеет вид:

$$w_{21}^{(1)}(x,y)=\Lambda_L^{(2)}(x,y)+w_L^{(2)}(x,y)-\frac{\bar{A}_n^{(L)}B_{21}(y)}{\sqrt{\pi}|x|^{3/2}}e^{-i(k_1x-\pi/4)}+O\left(|x|^{-5/2}\right),$$

$$x\to-\infty. \tag{3.14}$$

где

$$B_{21}(y)=\frac{\sqrt{2k_1(k_1+k_2)}\bar{K}^{+}(k_1)\cos\left((y+h)\sqrt{k_2^2-k_1^2}\right)}{\left(k_2^2-k_1^2\right)\sin^2\left(h\sqrt{k_2^2-k_1^2}\right)\left(\sigma_{m_1}+k_1\right)}$$

Третье слагаемое из (3.14) указывает, что дифрагированная объемная волна убывает как $|x|^{-3/2}$, а не $|x|^{-1/2}$ при $x\to-\infty$.

На контактной линии $y=0$ асимптотическую формулу при $x\to-\infty$ можно получить из (3.14), неподстредственно там подставляя $y=0$.

В области $\Omega_{12}(x>0,y>0)$ перемещение даётся формулой

$$\begin{aligned}W_{12}(x,y)=\frac{2i\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(h\gamma_2^{(\tau)}+y\gamma_1^{(\tau)}\right)}{\mu_*+\gamma_1^{(\tau)}}\cdot\frac{\gamma_2^{(\tau)}(\sigma)e^{-\tau x}}{\sqrt{k_2+i\tau}\bar{K}^{+}(i\tau)}\frac{d\tau}{\sigma_{m_1}-i\tau}-\\-\frac{2\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_0^{k_1}\frac{\sin\left(h\gamma_2^{(\sigma)}+y\gamma_1^{(\sigma)}\right)}{\mu_*\gamma_2^{(\sigma)}+\gamma_1^{(\sigma)}}\cdot\frac{\gamma_2^{(\sigma)}e^{i\sigma x}}{\sqrt{k_2+\sigma}\bar{K}^{+}(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma_{m_1}-\sigma}-\\-\frac{2\bar{A}_m^{(L)}}{\pi}\int_{k_1}^{k_2}\frac{\mu_*\gamma_1^{(\sigma)}\cos\left(h\gamma_2^{(\sigma)}\right)-\gamma_2^{(\sigma)}\sin\left(h\gamma_2^{(\sigma)}\right)}{\left(\mu_*\left(\sigma^2-k_1^2\right)+\left(k_2^2-\sigma^2\right)\right)\sqrt{k_2+\sigma}}\cdot\frac{\gamma_2^{(\sigma)}e^{-y\gamma_1^{(\sigma)}}e^{i\sigma x}}{\bar{K}^{+}(\sigma)\left(\sigma_{m_1}-\sigma-i0\right)}d\sigma\end{aligned} \tag{3.15}$$

На линии контакта $y=0$ из (3.15) получим следующую асимптотическую формулу при $x\to+\infty$:

$$w_{12}(x,0)=\frac{2\bar{A}_m^{(L)}}{\sqrt{\pi}x^{3/2}}\left\{B_1e^{i(k_1x+\pi/4)}+B_2e^{i(k_2x+\pi/4)}\right\}+O\left(x^{-5/2}\right), \tag{3.16}$$

где

$$B_1 = \frac{\mu_* \sqrt{k_1} e^{-ih\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}}{\sqrt{2(k_2^2 - k_1^2)(k_1 + k_2)} \bar{K}^+ \left(k_1\right) \left(\sigma_{m_1} - k_1\right)}$$

$$B_2 = \frac{1}{2\mu_* \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \bar{K}^+ \left(k_2\right) \left(k_2 - \sigma_{m_1}\right)} \tag{3.17}$$

Формулы (3.15), (3.16) показывают, что в дальних зонах области Ω_{12} отсутствует слагаемое, соответствующее падающей волне. Там распространяются только дифрагированные объёмные волны. При этом, по направлению линии контакта $y = 0$ распространяются объёмные волны со скоростями c_1 и c_2 с разными амплитудами (3.16), (3.17), зависящими от физических и геометрических параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grigoryan E., Jilavyan S., Agayan K. Diffraction of waves in an elastic space with semi-infinite inclusion // Days on Diffraction 2004, p.90-99.
2. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-38.
3. Агаян К.Л. Дифракция сдвиговой плоской волны на крае упругого слоя в составном пространстве // Труды XIV межд. конф. Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. 2010. т.1. С.16-20.
4. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве со щелью // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50-69.
6. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., [Гулян К.Г.] Дифракция сдвиговой плоской волны в составном упругом пространстве с полубесконечной трещиной параллельной линии неоднородности.// МТТ. №1. 2013. С.60-67.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 782с.
8. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с.
9. Бреховских Л.М., Гончаров Н.Н. Введение в механику сплошной среды. М.:1982, 332с.
10. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.46-55.

11. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн // Докл. НАН Армении. 2010. №3. С.261-271.
12. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.

Сведения об авторах:

Григорян Эдвард Хосровович, доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Тел.: (+37410) 230-389.

Агаян Каро Леренцович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Тел.: (+37491) 485-566,

E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Джилавян Самвел Акопович, канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики ЕГУ.

Тел.: (+37491) 500-770,

E-mail: samjilavyan@ysu.am

Поступила в редакцию 10.10.2014