

УДК 539.3

**СДВИГОВЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ СО  
СВОЙСТВАМИ УПРОЩЁННОЙ МОДЕЛИ КОССЕРА**

**Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б.**

**Ключевые слова:** периодическая система, сдвиговые волны, модель Коссера

**Key words:** Periodic systems, shear waves, Cosserat model

**Համարձույնան Ս.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ., Ղազարյան Կ.Բ**

**Սահիքի առաձգական ալիքները Կոսսերաների պարզեցված մոդելի հատկություններով պարբերական միջավայրում**

Կոսսերաների պարզեցված մոդելի շրջանակում դիտարկված է միաչափ սահիքի ալիքի տարածումը, երբ ալիքն ուղղահայաց է երկու տարբեր, պարբերաբար հերթագայող, համասեռ առաձգական միջավայրերի եզրերին: Հաստատվել է, որ բարձր հաճախությունների ընդգրկությամբ մոմենտային լարումների հաշվի առնելը, էականորեն ձևափոխում է միջավայրերի պարբերականության պայմանավորված հաճախությունների արգելված գոտիների կառուցվածքը:

**Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B.**

**Shear elastic waves in a periodic medium with the Cosserat simplified model properties**

Based on the Cosserat simplified model a dynamic problem is considered for an one-dimensional shear elastic wave travelling perpendicularly to the boundaries of two different periodically alternating homogeneous media. The results show that Cosserat effect significantly alters the band gap structure in the range of high frequencies due to the Bragg scattering.

В рамках упрощённой модели Коссера рассмотрен вопрос распространения одномерной сдвиговой волны перпендикулярно к границам двух различных периодически чередующихся упругих однородных сред. Установлено, что в диапазоне высоких частот учёт моментных напряжений существенно изменяет структуру запретных зон частот, обусловленных периодичностью среды.

Имеется обширная литература по исследованию проблем механики на основе микрополярной теории упругости (или на основе среды Коссера). Из обзоров, в частности, отметим [1-3]. В общем случае, уравнения и связи микрополярной теории довольно сложные, поэтому для решения конкретных задач часто используют более простые модели [4-6]. С другой стороны, возможно, что наиболее существенные эффекты, связанные с учётом моментных напряжений, имеют место в динамических задачах. Для таких задач, в частности, для исследования распространения упругих волн на основе модели Коссера была предложена более простая модель, учитывающая только динамику внутреннего вращения частиц. Модель упрощённой среды Коссера для динамических задач, по видимому, впервые была предложена в [7]. На основе этой модели был решён ряд задач [8-14].

Большое количество статей посвящено задаче распространению акустических волн в периодической среде, например, обзор [15]. Были исследованы также сдвиговые волны в упругой периодической среде с усложнёнными свойствами [16-18].

1. В прямоугольной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  уравнения движения упругой среды следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{ji}$  – компоненты тензора напряжений,  $u_i$  – компоненты вектора упругих перемещений,  $\rho$  – плотность материала среды. Согласно упрощённой модели Коссера [7,11,14], материальные уравнения среды (обобщение закона Гука) принимаются в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{kk} + J \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

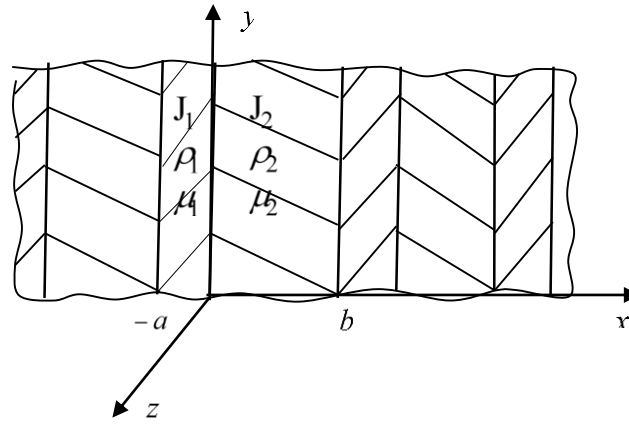
В (1.2) тензор деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и тензор вращений  $\omega_{ij}$  определяются посредством упругих перемещений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.3)$$

$\lambda, \mu$  – упругие коэффициенты Ламе,  $J$  – динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении).

Из (1.2) и выражения для  $\omega_{ij}$  следует несимметричность тензора напряжений ( $\sigma_{ji} \neq \sigma_{ij}$ ) для динамических задач.

Рассматривается слоистая среда, периодически повторяющаяся по направлению координаты  $x_1 = x$  (фиг.1)



Фиг.1. Периодическая среда, состоящая из двух различных упругих материалов.

Слои  $k=1$  ( $-a < x < 0$ ) и  $k=2$  ( $0 < x < b$ ) имеют различные физико-механические свойства и периодически повторяются, при этом,  $-\infty < x_2 < \infty$ ,  $-\infty < x_3 < \infty$ . Предполагается, что в этой среде распространяются чисто сдвиговые одномерные волны (не зависящие от  $x_2, x_3$ ). Согласно (1.2) и (1.3), для напряжений сдвига имеем следующие выражения:

$$\sigma_{13}^{(k)} = \mu_k \frac{\partial w_i}{\partial x} + J_k \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial t^2}, \quad \sigma_{31}^{(k)} = \mu_k \frac{\partial w_i}{\partial x} - J_k \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial t^2}, \quad k = 1, 2 \quad (1.4)$$

где  $w_k$  – компонента вектора перемещения в направлении оси  $x_3$  соответствующего слоя. Подстановка (1.4) в уравнения движения (1.1) при  $i = 3$  даёт

$$c_{ik}^2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + l_k^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

в (1.5) приняты следующие обозначения:

$$c_{ik}^2 = \frac{\mu_k}{\rho_k}, \quad l_k^2 = \frac{J_k}{\rho_k} \quad (1.6)$$

Ввиду периодичности свойств среды вдоль координаты  $x$ , согласно Флоке, достаточно рассмотреть только часть пространства  $-a \leq x \leq b$ . Тогда условием контакта двух слоёв будет непрерывность перемещения и напряжения.

$$w_1 = w_2, \quad \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)} \quad \text{при } x = 0. \quad (1.7)$$

Условия квазипериодичности (условия Флоке) будут иметь вид:

$$s w_1(-a, t) = w_2(b, t), \quad s = e^{-ipd} \quad (1.8)$$

$$s \sigma_{13}^{(1)}(-a, t) = \sigma_{13}^{(2)}(b, t), \quad d = a + b$$

2. Решения уравнений (1.5) представляются в виде

$$w_k = f_k(x) e^{i\omega t}. \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.5) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций  $f_k(x)$ , имеющим общие решения

$$f_k(x) = A_k \cos \alpha_k x + B_k \sin \alpha_k x, \quad (2.2)$$

где

$$\alpha_k = \omega (c_{ik}^2 - e_k^2 \omega^2)^{-1/2} \quad (2.3)$$

и  $A_k, B_k$  – произвольные постоянные.

После удовлетворения граничным условиям контакта слоёв (1.7), для функций  $f_k(x)$  получаются

$$f_1(x) = A \cos \alpha_1 x + B \sin \alpha_2 x \quad (2.4)$$

$$f_2(x) = A \cos \alpha_2 x + \gamma B \sin \alpha_2 x$$

где  $A, B$  – новые произвольные постоянные

$$\gamma = \rho_1 \alpha_2 / (\rho_2 \alpha_1). \quad (2.5)$$

Подстановка (2.4) в условия Флоке (1.8) приводит к следующей системе однородных уравнений относительно произвольных постоянных  $A, B$ .

$$(s \cdot \cos \alpha_1 a - \cos \alpha_2 b) A - (s \cdot \sin \alpha_1 a - \gamma \sin \alpha_2 b) B = 0 \quad (2.6)$$

$$(s \cdot \sin \alpha_1 a + \gamma^{-1} \sin \alpha_2 b) A + (s \cdot \cos \alpha_1 a - \cos \alpha_2 b) B = 0$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.6) после некоторых преобразований приводится к уравнению

$$\cos pd = F(\omega) \quad (2.7)$$

$$F(\omega) = \cos a\alpha_1(\omega) \cos b\alpha_2(\omega) - 0,5(\gamma(\omega) + \gamma(\omega)^{-1}) \sin a\alpha_1(\omega) \sin b\alpha_2(\omega)$$

Дисперсионные уравнения (2.7) определяют волновое число  $p$  в зависимости от частоты  $\omega$ . Если имеются области значений  $\omega$ , для которых  $|F(\omega)| > 1$ , то в этой области частот распространение сдвиговой волны не имеет места (в этом случае волновое число  $p$  не является действительным).

Из (2.7) для неперриодической среды, когда материалы одинаковы, имеем следующее дисперсионное уравнение и формулы для фазовой и групповой скоростей сдвиговых волн:

$$p = \frac{\omega}{\sqrt{c_t^2 - l_1^2 \omega^2}};$$

$$V_f = \frac{\omega}{p} = \frac{c_t}{\sqrt{1 + l^2 p^2}}; \quad V_g = \frac{d\omega}{dp} = \frac{c_t}{\sqrt{(1 + l^2 p^2)^2}}.$$

В частном случае, когда

$$\rho_1 \mu_1 = \rho_2 \mu_2, \quad \rho_1 J_1 = \rho_2 J_2 (\Rightarrow \gamma = 1), \quad (2.8)$$

где первое равенство означает равенство импедансов материала слоёв, а второе – условно равенство «вращательных импедансов», из (2.7) следует:

$$pd = \frac{\omega a}{\sqrt{c_{t_1}^2 - l_1^2 \omega^2}} + \frac{\omega b}{\sqrt{c_{t_2}^2 - l_2^2 \omega^2}} + 2n\pi. \quad (2.9)$$

Из (2.9) в рассматриваемом частном случае (2.8) следует, что при условии

$$\omega^2 \geq \min\left(\frac{\mu_1}{J_1}, \frac{\mu_2}{J_2}\right) \quad (2.10)$$

упругая сдвиговая волна не может распространяться вдоль периодической системы.

Пусть  $\gamma = 1$ , но хотя бы одно из равенств (2.8) не имеет места. Это возможно, если частота колебаний упругой среды имеет значение

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_1 - \rho_2 \mu_2}{\rho_1 J_1 - \rho_2 J_2}}. \quad (2.11)$$

В этом случае, согласно (2.7), для волнового числа получается

$$pd = \frac{\rho_1 a + \rho_2 b}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_2 - \rho_2 \mu_2}{\mu_2 J_1 - \mu_1 J_2}} + 2n\pi. \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что для частоты колебаний (2.11) волна Флоке возможна либо при

$$\rho_1 \mu_2 > \rho_2 \mu_2, \quad \mu_2 J_1 > \mu_1 J_2, \quad (2.13)$$

либо при

$$\rho_1 \mu_2 < \rho_2 \mu_2, \quad \mu_2 J_1 < \mu_1 J_2. \quad (2.14)$$

3. Рассматривается общий случай на основе уравнения (2.7). Пусть для определённости имеет место неравенство

$$\frac{\mu_1}{J_1} \leq \frac{\mu_2}{J_2}. \quad (3.1)$$

При условии  $\omega^2 < \mu_1/J_1$  уравнение (2.7) позволяет применить приближение

$$(\alpha_1 a)^2 \ll 1, (\alpha_2 b)^2 \ll 1, \quad (3.3)$$

откуда получается

$$\cos d = 1 - \frac{\rho_1 a + \rho_2 b}{2\rho_1 \rho_2} (\rho_2 \alpha_1^2 a + \rho_1 \alpha_2^2 b). \quad (3.4)$$

Из (3.4) можно легко вычислить значения  $k d$  для конкретных материалов.

В диапазоне частот колебаний, удовлетворяющих условию  $\mu_1/J_1 < \omega^2 < \mu_2/J_2$ , уравнение (2.7) заменяется уравнением

$$\cos pd = \operatorname{ch} a\alpha_1 \sin b\alpha_{22} - 0,5(\gamma_0 - \gamma_0^{-1}) \operatorname{sh} a\alpha_1 \sin b\alpha_{22}. \quad (3.5)$$

Для частот колебаний  $\omega^2 > \mu_2/J_2$  вместо уравнения (2.7) имеем

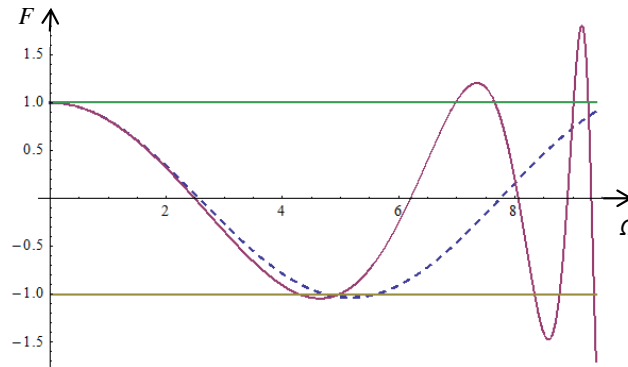
$$\cos pd = \operatorname{ch} a\alpha_{11} \operatorname{ch} b\alpha_{22} + 0,5(\gamma_1 + \gamma_1^{-1}) \operatorname{sh} a\alpha_{11} \operatorname{sh} b\alpha_{22}, \quad (3.6)$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{\omega}{\sqrt{l_1^2 \omega^2 - c_{t1}^2}}, \quad \alpha_{22} = \frac{\omega}{\sqrt{l_2^2 \omega^2 - c_{t2}^2}}; \quad \gamma_0 = \rho_1 \alpha_{22} / (\rho_2 \alpha_1); \quad (3.7)$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \alpha_{22} / (\rho_2 \alpha_{11})$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (3.7) для всех  $\omega$  не имеет решений, для которых  $p$  является действительным.



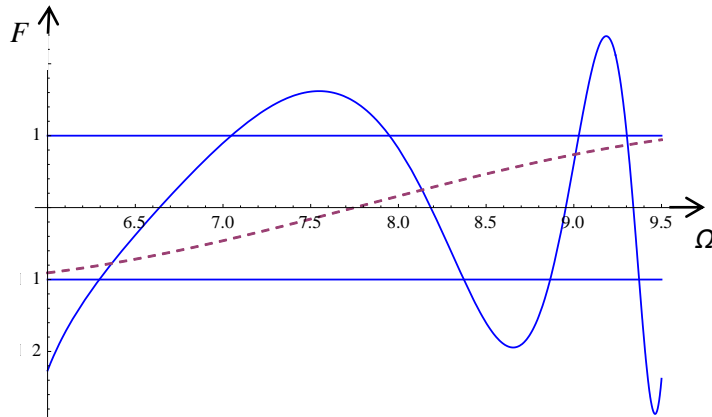
Фиг. 2. График зависимости функции  $F$  от безразмерного параметра частоты  $\Omega$  в диапазоне  $\omega^2 < \mu_1/J_1$ ;  $a = b$ ;  $\rho_1 / \rho_3 = 1/3$ ;  $c_{t1} / c_{t2} = 1/5$ ;

$$\frac{J_1}{d^2 \rho_1} = 0.01; \quad \frac{J_2}{d^2 \rho_2} = 0.03.$$

На основе численного анализа уравнений (2.7) и (3.5), на фиг. 2, 3 для слоистой среды приведены графики зависимости функции  $F(\omega)$  от безразмерной частоты

$\Omega = \frac{\omega d}{c_{t1}}$ . Последовательности точек значений частот  $\omega$ , где  $F(\omega) = 1$  и

$F(\omega) = -1$ , определяют границы зон запирания частот. Пунктирные кривые относятся к обычным средам.



Фиг.3. График зависимости функции  $F$  от безразмерного параметра частоты  $\Omega$  в диапазоне  $\mu_1/J_1 < \omega^2 < \mu_2/J_2$ ;  $a = b$ ;  $\rho_1/\rho_3 = 1/3$ ;  $c_{t1}/c_{t2} = 1/5$ ;

$$\frac{J_1}{d^2\rho_1} = 0.01; \frac{J_2}{d^2\rho} = 0.8.$$

Анализ этих кривых указывает на существенную роль эффекта, связанного с учётом моментных напряжений, на формирование новых структур границ зон запирания частот для сдвиговых волн. Роль этого эффекта ярко выражена в высокочастотном диапазоне и зависит от периода слоистой среды.

Исследование выполнено в рамках научного проекта за № SCS 13 – 2С 005 ГКН МОН РА.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твёрдых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 327с.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Прикладная микрополярная теория упругих оболочек. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2010. 136с.
3. Кантор М.М., Никабадзе М.У., Улиханян А.Р. Уравнения движения и граничные условия физического содержания микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами. //Иzv.РАН. МТТ. 2013. №3. С.96-110.
4. Eringen A.S. Microcontinuum field theories. 1, Foundation and Solids. N.Y.: Springer, 1998. 325 p.
5. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214с. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН Армении, 2013. 222с.
6. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек //Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып 2. С.325-343.
7. Schwartz L.M., Jonson D.L., Feng S. Vibrational models in granular materials // Physical Review Letters 1984, 52 (10), p.831-834.
8. Угодчиков А.Г. Моментная динамика линейного-упругого тела. //Докл. РАН. 1995. Т.340. №1. С.50-58.
9. Манукян В.Ф. О существовании поверхностных волн в микрополярных средах// Изв НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. №2. С.75-79.

10. Grekova E.F., Herman C.G. Wave propagation in solids and rock modeled as half-Cosserat continuum// XXXI School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» Book of Abstracts- St. Petersburg, 2003. P.45-46.
11. Белубекян М.В., Манукян В.Ф. О существовании и распространении поверхностных волн с учётом внутреннего вращения /В сб.: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести». Ереван: Гитутюн, 2006. С.92-97.
12. Kulesh M.A., Grekova E.F., Schardakov I.N. Rayleigh waves in the isotropic and linear reduced Cosserat continuum// In Proc. of XXXI Summer School “Advanced Problems in Mechanics” St. Petersburg, RAS, 2006, p.281-289.
13. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебание упругой пластинки с учётом внутреннего вращения. //Изв. ЕГУАС. Ереван: 2008. Т.3. С.25-29.
14. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания весьма пологой сферической панели с учётом внутреннего вращения. //Вестник инженерной Академии Армении. Ереван. 2012. Т.9. №1. С.101-106.
15. Dowling J.P., Everitt H., Yablonovitch E. Photonic and sonic band-gap bibliography. See <http://phys.lsu.edu/~jdowling/pbgbib.html>.
16. Даноян З.Н., Казарян К.Б., Атоян Л.А., Даноян Н.З. Квазипериодические спиновые волны типа Блоха-Флоке в периодической слоистой структуре из ферромагнитных и диэлектрических слоёв. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №4. С.29-37.
17. Piliposian G.T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K.B. Shear wave propagation in periodic phononic/ photonic piezoelectric medium. // Wave Motion. 2012. V.49, Iss. 1. P.125-134.
18. D.G Piliposyan, K.B Ghazaryan, G.T Piliposian. Shear Bloch waves and coupled phonon–polariton in periodic piezoelectric waveguides //Ultrasonics, Vol.54. Issue 2. 2014. P.644–654.

**Сведения об авторах:**

**Амбарцумян Сергей Александрович** – доктор техн. наук, профессор, академик, член Президиума НАН Армении,  
**Тел.:** 52-06-44; 52-15-03  
**E-mail:** samb@sci.am

**Белубекян Мелс Вагаршакович** – кандидат физ.-мат.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения  
**Тел.:** (+374 10) 52-15-03; (+374 10) 58-00-96  
**E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

**Казарян Карен Багратович** – доктор физ.-мат.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении  
**Тел.:** (374 10) 22 73 95, (374 955) 22 73 95  
**E-mail:** ghkarren@gmail.com

Поступила в редакцию 14.04.2014