

УДК 621.38

**О КИНЕМАТИКЕ МНОГОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С
УПРУГИМИ СОЕДИНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ И С УПРУГИМИ
ЗВЕНЬЯМИ**
Гукасян А.А.

Ключевые слова: многозвенный упругий манипулятор, кинематика, нерастяжимый упругий стержень, обобщенные координаты

Key words: multilink elastic manipulator, kinematics, inextensible elastic rod, generalized coordinates

Ղուկասյան Ա.Ա.

**Առաձգական օղակներով և առաձգական հանգույցներով բազմօղակ մանիպուլյատորի
կինեմատիկայի մասին**

Առաձգական բազմօղակ մանիպուլյատորի մաթեմատիկական մոդելի հիման վրա ուսումնասիրվում է տարածական շարժման կինեմատիկան: Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ առաձգական հանդիսանում են ինչպես մանիպուլյատորի օղակները, այնպես էլ օղակների միացման հանգույցները: Մտցված են երեք խումբ ընդհանրացված կորդինատներ, որոնք որոշում են մանիպուլյատորի բնութագրիչ կետերի տարածական դիրքերը և շարժման ընթացքում կոնֆիգուրացիան: Ենթադրելով, որ մանիպուլյատորի առաձգական հատկությունները որոշող կորդինատները փոքր են, կինեմատիկական առնչությունները որոշված են առաձգականության զծային տեսության սահմաններում:

Ընդանուր դեպքում ստացված բանաձևերը (արտահայտությունները) կիրառված են շարժական հիմքով երկօղակ մանիպուլյատորի կինեմատիկայի ուսումնասիրության դեպքում: Մանիպուլյատորը ունի երեք ազատության աստիճան, երկրորդ օղակը հանդիսանում է առաձգական չձգվող ձող, իսկ միացման հանգույցները պարունակում են առաձգական էլեմենտներ:

Ghukasyan A.A.

On the kinematics of multilink manipulator motion with elastic connecting nodes and elastic links

On the basis of mathematical model of elastic multilink manipulator the kinematics of spatial motion is investigated. The case when both the links and connecting nodes between links of manipulator are elastic is considered. Introduced three groups of generalized coordinates that define the spatial positions of the characteristic points of the manipulator and the configuration during movement. Assuming that the generalized coordinates describing the elastic properties of the manipulator are small the kinematic relationships are defined in the framework of linear theory of elasticity. The formula (expressions) that obtained in general case are used to investigate the kinematics of movement of two-link manipulator on a movable base. The manipulator has three degrees of freedom, the second link is inextensible elastic rod, and the connecting nodes contain the elastic elements.

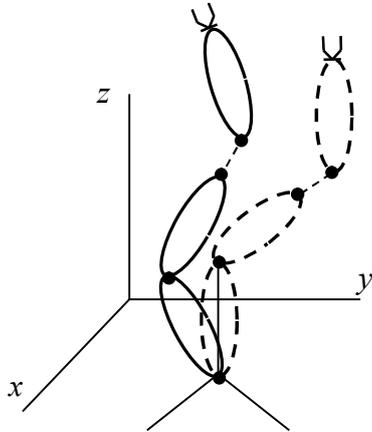
На основе математической модели упругого многозвенного манипулятора исследуется кинематика пространственного движения. Рассматривается случай, когда упругими являются как звенья, так и соединительные узлы между звеньями манипулятора. Введены три группы обобщенных координат, которые определяют пространственные положения характерных точек манипулятора и конфигурацию во время движения. Предполагая, что обобщенные координаты, характеризующие упругие свойства манипулятора, малы, кинематические соотношения определены в рамках линейной теории упругости.

Полученные в общем случае формулы (выражения) применяются для исследования кинематики движения двухзвенного манипулятора на подвижном основании. Манипулятор имеет три степени свободы, второе звено является упругим нерастяжимым стержнем, а соединительные узлы содержат упругие элементы.

1. Математическая модель многозвенного упругого манипулятора.

Исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора (фиг.1.а). Предполагается, что часть звеньев манипулятора моделируются как упругие тела или одномерные упругие стержни, а часть соединительных узлов между

звеньями содержат упругие элементы большой жёсткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи [1-5].



Фиг.1.a

Обобщённые координаты, определяющие конфигурацию манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и с идеальными соединительными узлами, обозначим через компоненты вектора

$$\mathbf{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T. \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем символ «т» обозначает транспонирование вектора или матрицы.

Предполагается, что все соединительные узлы между звеньями представляют собой цилиндрические шарниры (вращательные кинематические пары пятого класса), или поступательные кинематические пары пятого класса.

Компоненты вектора $\mathbf{\alpha}$ обычно представляют собой совокупность углов относительных поворотов и линейных

относительных смещений звеньев, связанных поступательными парами.

Через компоненты вектора

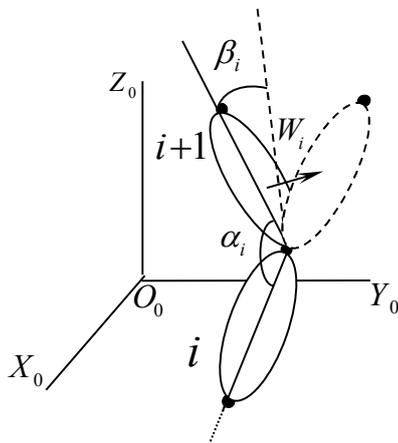
$$\mathbf{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T, \quad (m \leq n) \quad (1.2)$$

обозначим дополнительные обобщённые координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах. Заметим, что координаты векторов $\mathbf{\alpha}$ и $\mathbf{\beta}$ зависят только от времени (фиг.1.б).

Обобщённые координаты, описывающие деформацию упругих звеньев манипулятора (смещение точек соответствующего звена относительно его недеформированного состояния), по аналогии с (1.1) и (1.2) являются компонентами вектора $\mathbf{w}(t, \xi)$

$$\mathbf{w}(t, \xi) = (w_1(t, \xi), w_2(t, \xi), \dots, w_k(t, \xi))^T, \quad (1.3)$$

где ξ – произвольная точка упругого звена.



Фиг. 1.б

Положение инерционных элементов манипулятора в пространстве характеризуем N координатами:

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T. \quad (1.4)$$

Кинематику манипулятора с упругими звеньями и с упругими соединительными узлами между звеньями в общем случае можно исследовать на основе соотношения [1-4, 11, 13-16]

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, \mathbf{w}), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{\alpha}, \mathbf{\beta}, \mathbf{w})$ – заданная N -мерная вектор-функция от вектор-аргументов, структура которой зависит от выбора обобщённых координат жёсткой (1.1) и упругой модели

манипулятора (1.2), (1.3), а также от геометрии манипулятора.

Предположим, что матрицы частных производных

$$\Phi^1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{N,n}$$

$$\Phi^2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \beta_j} \right\}_{i,j=1}^{N,m}$$

$$\Phi^3(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial w_j} \right\}_{i,j=1}^{N,k}$$

имеют максимальные ранги, равные $r_1 = \min(n, N)$, $r_2 = \min(m, N)$ и $r_3 = \min(N, k)$, соответственно. Если одно из этих условий нарушается, то можно уменьшить размерность одного из векторов $\mathbf{q}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}$ или \mathbf{w} .

Для дальнейшего исследования основной задачи кинематики упругих манипуляторов, то есть вычисление координат, скоростей и ускорений произвольной точки относительно инерциальной или связанной с произвольным звеном системы отсчёта через обобщённые координаты $\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}$, скорости $\dot{\mathbf{a}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{\mathbf{w}}$ и ускорения $\ddot{\mathbf{a}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\mathbf{w}}$, предполагаем, что обобщённые координаты β_i малы, а жёсткость c_i соединительных узлов велика, то есть

$$\beta_i \sim \varepsilon, \quad c_i \sim \varepsilon^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1.6)$$

где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, а координатный вектор $\mathbf{w}(t, \xi)$ в рамках линейной теории упругости мал по сравнению с линейными размерами упругого звена и удовлетворяет соотношениям [17-19]:

$$w_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad w'_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad \dot{w}_i(t, \xi) \sim \varepsilon \quad (1.7)$$

(частные производные по ξ обозначим штрихом, а по t – точкой).

Заметим, что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ соединительные узлы становятся идеальными, а упругие звенья – абсолютно твёрдыми телами.

В рамках предположений (1.6), (1.7) для исследования кинематики упругого манипулятора применим асимптотические методы малого параметра [1-5].

Формула Тейлора для функции (1.5) относительно $\boldsymbol{\beta}$ и \mathbf{w} с точностью ε по $\boldsymbol{\beta}$ и ε^2 по \mathbf{w} будет:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_j} w_j + O(\varepsilon^2). \quad (1.8)$$

Введя обозначения

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0, 0), \quad \mathbf{f}^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i,$$

$$\mathbf{f}^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_j} w_j, \quad (1.9)$$

где имеет место

$$\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv 0, \quad (1.10)$$

разложения (1.8) с учётом (1.9) можно представить в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}). \quad (1.11)$$

Из (1.11) можно предположить, что положение инерциальных элементов упругого манипулятора описывается в рамках жёсткой модели путем введения дополнительного вектора $\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, обусловленного упругостью соединительных узлов между звеньями, порядок которого не превышает ε и вектора $\mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$, обусловленного упругой податливостью звеньев манипулятора, порядок которого не превышает ε^2 . Движение рассматриваемой модели манипулятора имеет колебательный характер относительно движения жёсткой модели [1–4, 9, 11].

Формула (1.11) позволяет исследовать кинематику манипулятора, когда соединительные узлы между звеньями идеальные, а звенья – абсолютно жёсткие ($\boldsymbol{\beta} \equiv 0, \mathbf{w} \equiv 0$), на основе кинематического соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (1.12)$$

между обобщёнными координатами $\boldsymbol{\alpha}$ и \mathbf{q} , а также в случае упругих соединительных узлов между звеньями и абсолютно жёсткими ($\mathbf{w} \equiv 0$) звеньями

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad (1.13)$$

и когда звенья манипулятора являются упругими, а соединительные узлы – идеальными

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}). \quad (1.14)$$

Все эти частные математические модели манипулятора имеют место и широко исследуются в научной литературе [1-16 и др.].

2. Обобщённые скорость и ускорения движений упругого манипулятора.

Вычисляя производные по времени от функций (1.11), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} \quad (2.1)$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.3)$$

определяет скорость движения манипулятора с абсолютно жёсткими звеньями и идеальными соединительными узлами,

$$\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} \quad (2.4)$$

– дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью соединительных узлов, а

$$\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} \quad (2.5)$$

– вектор скорости, который зависит от упругих свойств звеньев манипулятора.

Заметим, что

$$\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0.$$

Для определения компонентов вектора скорости (2.1) вычислим элементы матриц $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$, $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$.

Из (1.11) следует, что матрица $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ с размерностью $N \times n$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N(\mathbf{a})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_N(\mathbf{a})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_N(\mathbf{a})}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Матрица $\mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ имеет также размерность $N \times n$ с элементами

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_N^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_N^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

где общим элементом матрицы $\mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ является

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right), \quad \frac{\partial f_i^{1*}(\mathbf{a}, 0)}{\partial \alpha_j} \equiv 0, \\ (i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n)$$

Матрица $\mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ с размерностью $N \times m$ имеет вид:

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_m} \\ \frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_N^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial f_N^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_m} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

где

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) = \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_j}$$

$(i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m)$

Аналогично, матрица $\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ имеет размерность $N \times n$ с элементами

$$\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial f_N^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial f_N^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

где

$$\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right), \quad \frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, 0)}{\partial \alpha_j} \equiv 0,$$

$(i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n)$

Матрица $\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ с размерностью $N \times k$ имеет вид:

$$\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_k} \\ \frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_N^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_N^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_k} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

где

$$\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) = \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_j}$$

$(i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, k)$.

Следовательно, алгоритм вычисления скорости движения упругого манипулятора по формуле (2.2), в общем случае, сводится к необходимости определения элементов матриц (2.6)–(2.10). Из (2.7)–(2.10) следует, что дополнительный вектор – слагаемое $\mathbf{v}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ – имеет порядок ε , а порядок вектора $\mathbf{v}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ не превышает ε^2 .

Вычисляя производные по времени от функции (2.1), определим ускорение

движений инерционных элементов упругого манипулятора

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} = & \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{F}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{a}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})\ddot{\mathbf{a}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \\ & + \mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \dot{\boldsymbol{\beta}})\ddot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})\ddot{\mathbf{a}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})\ddot{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

По аналогии с (2.2) вектор ускорения движений упругого манипулятора также можно определить в виде суммы трёх слагаемых:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}) + \mathbf{w}^{*2}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{w}^{*3}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}), \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{w}^{*1}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{F}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{a}} \quad (2.13)$$

соответствует ускорению движения абсолютно жёсткой модели манипулятора,

$$\mathbf{w}^{*2}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})\ddot{\mathbf{a}} + \quad (2.14)$$

$$+ \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \dot{\boldsymbol{\beta}})\ddot{\boldsymbol{\beta}}$$

зависит от упругости соединительных узлов между звеньями, а вектор ускорения

$$\mathbf{w}^{*3}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})\ddot{\mathbf{a}} + \quad (2.15)$$

$$+ \frac{d}{dt} \mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})\ddot{\mathbf{w}}$$

обусловлен упругостью звеньев манипулятора.

Дополнительные слагаемые в (2.12) тождественно равны нулю, когда соединительные узлы между звеньями идеальные, а звенья – абсолютно жесткие, то есть:

$$\mathbf{w}^{*2}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, 0, 0, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{w}^{*3}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, 0, 0, 0) \equiv 0. \quad (2.16)$$

Для определения вектора ускорения (2.11) необходимо также определить элементы матриц $\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{a})$, $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$, $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$, $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ и $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})$.

Согласно (2.6), элементы матрицы $\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{a})$ с размерностью $N \times n$ имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{a})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{a})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{a})}{\partial \alpha_n \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{a})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{a})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{a})}{\partial \alpha_n \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_N(\mathbf{a})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_N(\mathbf{a})}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_N(\mathbf{a})}{\partial \alpha_n \partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Матрица $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})$ с размерностью $N \times n$ имеет следующие элементы:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}) = \begin{pmatrix} F_{11}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) & F_{12}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) & \dots & F_{1n}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) \\ F_{21}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) & F_{22}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) & \dots & F_{2n}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) & F_{N2}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) & \dots & F_{Nn}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

где с учётом (2.7)

$$\begin{aligned} F_{ij}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i^{1*}(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right] = \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \dot{\alpha}_p + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta_k \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \dot{\beta}_k \end{aligned}$$

$$(F_{ij}^1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, 0, 0) \equiv 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

Матрица $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}) = \begin{pmatrix} F_{11}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) & F_{12}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) & \dots & F_{1m}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \\ F_{21}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) & F_{22}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) & \dots & F_{2m}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) & F_{N2}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) & \dots & F_{Nm}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Здесь элементы $F_{ij}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$ матрицы (2.19) определяются согласно (2.8) и имеют вид

$$F_{ij}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_l \partial \beta_j} \dot{\alpha}_l, \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

Матрица $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ с размерностью $N \times n$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} F_{11}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) & F_{12}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) & \dots & F_{1n}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \\ F_{21}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) & F_{22}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) & \dots & F_{2n}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) & F_{N2}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) & \dots & F_{Nn}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Согласно (2.9), элементы $F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{\alpha}_k + \sum_{p=1}^k \frac{\partial^2}{\partial w_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{w}_p \end{aligned}$$

$$(F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, 0, 0) \equiv 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

Элементами последней матрицы $\frac{d}{dt} F_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ с размерностью $N \times k$ являются:

$$\frac{d}{dt} F_4(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} F_{11}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) & F_{12}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) & \dots & F_{1k}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) \\ F_{21}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) & F_{22}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) & \dots & F_{2k}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) & F_{N2}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) & \dots & F_{Nk}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

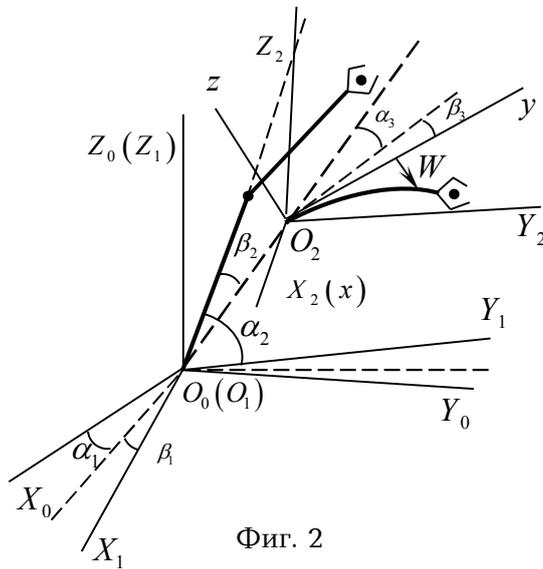
где, согласно (2.10),

$$F_{ij}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_l \partial w_j} \dot{\alpha}_l, \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, k).$$

Следовательно, для определения скорости и ускорения движений многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями в рамках линейной теории упругости необходимо вычислить элементы матриц (2.6)-(2.10), (2.17)-(2.21) и сделать ряд вычислений, которые для современной вычислительной техники являются весьма простыми.

Для иллюстрации алгоритма определения положений (1.11), скоростей (2.1) и ускорений (2.12) движений упругого манипулятора рассмотрим пространственное движение двухзвенного манипулятора с тремя степенями подвижности.

3. Модель двухзвенного упругого манипулятора. Манипулятор состоит из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг.2). Рука состоит из двух звеньев, соединённых шарниром O_2 . Первое звено соединено шарниром O_1 с платформой и является абсолютно твёрдым стержнем. Второе звено является



Фиг. 2

упругим стержнем, на конце которого расположен схват. Предполагается также, что соединительные узлы между звеньями и платформой являются цилиндрическими шарнирами, которые содержат упругие элементы большой жёсткости. Манипулятор имеет три степени свободы.

Движение осуществляется посредством приводов, расположенных в шарнирах.

Введём обозначения: l_1 – длина первого звена, l_2 – длина второго звена, α_1 – угол поворота манипулятора относительно оси O_0z_0 , β_1 –

дополнительный угол поворота, обусловленный упругостью соединительного узла, обеспечивающего поворот манипулятора относительно оси O_0z_0 , α_2 – угол

поворота первого звена относительно платформы, α_3 – угол между касательной O_2y к упругому звену в точке O_2 и первым звеном (α_3 – угол поворота второго упругого звена), β_2, β_3 – дополнительные углы поворотов, обусловленные упругой податливостью соединительных узлов O_1, O_2 , соответственно. $\mathbf{w}(t, \xi)$ – вектор упругой деформации точек нейтральной линии второго звена в системе координат O_2xyz ($\xi \in [O_2, l_2]$), $\mathbf{R}(t, \xi)$ – радиус-вектор точек нейтральной линии второго звена относительно точки O_2 в момент времени t .

Здесь векторы (1.1)-(1.4) имеют следующие координаты:

$$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T, \quad \mathbf{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T, \\ \mathbf{w} = (w_1(t, \xi), w_2(t, \xi), w_3(t, \xi))^T, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T \quad (3.1)$$

и

$$\mathbf{R}(t, \xi) = (w_1(t, \xi), \xi + w_2(t, \xi), w_3(t, \xi))^T.$$

В рамках линейной теории упругих стержней предполагается, что вектор упругих деформаций точек нейтральной линии второго звена мал по сравнению с его длиной, то есть [17-19]:

$$w_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad w'_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad \dot{w}_i(t, \xi) \sim \varepsilon \quad (i=1,3) \\ w_2(t, \xi) \sim \varepsilon^2, \quad w'_2(t, \xi) \sim \varepsilon^2, \quad \dot{w}_2(t, \xi) \sim \varepsilon^2, \quad (3.2)$$

где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр $l_2 \sim 1$, частные производные по ξ обозначены штрихом, а по t – точкой.

Имеет место также предположение (1.6) относительно упругости соединительного узла и коэффициента жёсткости.

Используя матрицы перехода от системы координат O_2xyz к системе $O_2X_2Y_2Z_2$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma_2 - \gamma_3) & -\sin(\gamma_2 - \gamma_3) \\ 0 & \sin(\gamma_2 - \gamma_3) & \cos(\gamma_2 - \gamma_3) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

условия параллельностей осей системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ и $O_1X_1Y_1Z_1$, а также матрицы перехода от системы $O_1X_1Y_1Z_1$ к инерциальной системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 & -\sin \gamma_1 & 0 \\ \sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

координаты произвольной точки второго звена манипулятора относительно системы $O_0X_0Y_0Z_0$ можно представить в виде [1, 14, 15, 19]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Gamma}_2 \left[\mathbf{\Gamma}_1 \cdot \mathbf{R}(t, \xi) + (0 \quad l_1 \cos \gamma_2 \quad l_1 \sin \gamma_2)^T \right]$$

(здесь $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$; $\gamma_2 = \alpha_2 - \beta_2$; $\gamma_3 = \alpha_3 + \beta_3$)

или

$$q_1 = f_1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \mathbf{w}) = w_1(t, \xi) \cos(\alpha_1 + \beta_1) - [l_1 \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + w_2(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3)] \sin(\alpha_1 + \beta_1)$$

$$q_2 = f_2(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \mathbf{w}) = w_1(t, \xi) \sin(\alpha_1 + \beta_1) + [l_1 \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + w_2(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3)] \cos(\alpha_1 + \beta_1);$$

$$q_3 = f_3(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \mathbf{w}) = l_1 \sin(\alpha_2 - \beta_2) + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + w_2(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3) + w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 - \beta_3). \quad (3.5)$$

Для рассматриваемой модели упругого манипулятора, (1.5) имеет вид (3.5).

Компоненты векторов $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})$ и $\mathbf{f}^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ в разложении (1.11), имеют вид:

$$f_1(\mathbf{a}, 0, 0) = f_1(\mathbf{a}) = -[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1$$

$$f_2(\mathbf{a}, 0, 0) = f_2(\mathbf{a}) = [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1 \quad (3.6)$$

$$f_3(\mathbf{a}, 0, 0) = f_3(\mathbf{a}) = l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)$$

$$f_1^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_1(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i = -\beta_1 [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1 - \beta_2 [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1 - \beta_3 [\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1;$$

$$f_2^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_2(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i = -\beta_1 [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1 + \beta_2 [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1 + \beta_3 [\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1; \quad (3.7)$$

$$f_3^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_3(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i = -\beta_2 [\cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] - \beta_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3)$$

$$f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_1(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_j} w_j = w_1(t, \xi) \cos \alpha_1 + w_2(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \sin \alpha_1 - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \sin \alpha_1;$$

$$f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_2(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_j} w_j = w_1(t, \xi) \sin \alpha_1 + \quad (3.8)$$

$$+ w_2(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \cos \alpha_1 - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cos \alpha_1;$$

$$f_3^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_3(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_j} w_j = w_2(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3)$$

Здесь, как и в общем случае, $f_i^{1*}(\mathbf{a}, 0) \equiv 0$, $f_i^{2*}(\mathbf{a}, 0) \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$.

Для иллюстрации алгоритма определения скорости движения произвольной точки упругого манипулятора (2.2) ограничимся частным случаем, когда соединительные узлы в шарнирах O_1 и O_2 , обеспечивающих поворотные движения по степеням подвижности α_2 и α_3 – идеально цилиндрические ($\beta_2 = 0, \beta_3 = 0$), а второе звено является нерастяжимым упругим стержнем ($w_2(t, \xi) \sim \varepsilon^2$ пренебрегается).

Определим элементы матриц $\mathbf{F}(\mathbf{a})$, $\mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$, $\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ (2.6)-(2.10) для рассматриваемого частного случая.

Элементами матрицы $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ (2.6) являются:

$$f_{11}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_1} = -[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1;$$

$$f_{12}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_2} = [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1;$$

$$f_{13}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_3} = -\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \sin \alpha_1;$$

$$f_{21}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_2(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_1} = -[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1;$$

(3.9)

$$f_{22}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_2(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_2} = [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1;$$

$$f_{23}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_2(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_3} = \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cos \alpha_1; \quad f_{31}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_3(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_1} = 0;$$

$$f_{32}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_3(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_2} = l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3);$$

$$f_{33}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f_3(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_3} = -\xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3).$$

Элементы матрицы $\mathbf{F}_1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ (2.7) в рассматриваемом случае определяются так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} &= \beta_1 [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1; \\
\frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} &= \beta_1 [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1; \\
\frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_3} &= -\xi \beta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cos \alpha_1; \\
\frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} &= -\beta_1 [l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1; \\
\frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} &= \beta_1 [l_1 \sin \alpha_2 + \xi \sin(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1; \\
\frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_3} &= -\xi \beta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \sin \alpha_1; \\
\frac{\partial f_3^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial f_3^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial f_3^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_3} = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Элементами $\mathbf{F}_2(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})$ матрицы являются:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \beta_1} = -[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \cos \alpha_1; \\
\frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} &= \frac{\partial f_1^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_3} = 0; \\
\frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} &= -[l_1 \cos \alpha_2 + \xi \cos(\alpha_2 - \alpha_3)] \sin \alpha_1; \\
\frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} &= \frac{\partial f_2^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_3} = 0; \\
\frac{\partial f_3^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial f_3^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} = \frac{\partial f_3^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_3} = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Элементы матрицы $\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ и $\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ зависят от упругости второго звена манипулятора.

Определим элементы матрицы $\mathbf{F}_3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_1} &= -w_1(t, \xi) \sin \alpha_1 - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cos \alpha_1; \\
\frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2} &= -w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \sin \alpha_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_3} &= -\frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2}; \\
\frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_1} &= w_1(t, \xi) \cos \alpha_1 + w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \sin \alpha_1; \\
\frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2} &= -w_3(t, \xi) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \cos \alpha_1; \\
\frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_3} &= -\frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2}; \quad \frac{\partial f_3^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_1} = 0; \\
\frac{\partial f_3^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2} &= -w_3(t, \xi) \sin(\alpha_2 - \alpha_3); \\
\frac{\partial f_3^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_3} &= -\frac{\partial f_3^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_2}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Элементами матрицы $\mathbf{F}_4(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ являются:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_1} &= \cos \alpha_1; \quad \frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_2} = 0; \\
\frac{\partial f_1^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_3} &= -\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \sin \alpha_1; \\
\frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_1} &= \sin \alpha_1; \quad \frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_2} = 0; \\
\frac{\partial f_2^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_3} &= -\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cos \alpha_1; \\
\frac{\partial f_3^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_1} &= 0; \quad \frac{\partial f_3^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_2} = 0; \quad \frac{\partial f_3^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_3} = \cos(\alpha_2 - \alpha_3).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Определим компоненты векторов $\mathbf{v}^1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$, $\mathbf{v}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$, $\mathbf{v}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ согласно (2.2)-(2.5) с учётом (3.9)-(3.13).

$$\mathbf{v}_i^1 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.14}$$

где $\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial \alpha_j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) определяются из (3.9)

$$\mathbf{v}_i^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \frac{\partial f_i^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} \dot{\beta}_1 \quad (i = 1, 2; \mathbf{v}_3^2 \equiv 0) \tag{3.15}$$

Здесь $\frac{\partial f_i^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \alpha_j}$ и $\frac{\partial f_i^{1*}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}$ определяются из (3.10) и (3.11), соответственно.

$$v_i^3 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_j} \dot{w}_j \quad (i=1,2,3; w_2=0, \dot{w}_2=0) \quad (3.16)$$

$\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j}$, $(i, j=1,2,3)$ определяются из (3.12), а $\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_j}$, $(i, j=1,2,3)$ – из (3.13).

После вычисления компонентов векторов \mathbf{v}^1 , \mathbf{v}^2 , \mathbf{v}^3 по формулам (3.14)–(3.16), можно стандартным образом определить модуль и направление вектора скорости (2.2) движения манипулятора в рассматриваемом случае. Аналогичным образом можно по формуле (2.12) также определить ускорение движения рассматриваемой модели манипулятора.

Следовательно, предложенный алгоритм позволяет в рамках принятой общей модели манипуляционных роботов определить все кинематические величины движения с определённой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
2. Черноусько Ф.Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. //Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №5.
3. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жёсткости. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №4.
4. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Вешников В.Б., Самвелян К.В., Степанов В.П., Шушко Д.А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт N231, ИПМ АН СССР. М.:1984. С.66.
5. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. –М.:Наука, 1987. С.365.
6. Акуленко Л.Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия. //ПММ. 198. Т.45. Вып.6.
7. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня. //ПММ. 1982. Т.46. Вып.4.
8. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управлении поворотом упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. №1.
9. Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. //Изв. АН СССР. МТТ. 198. №3.
10. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоским движением упругого звена манипулятора. //Изв.АН СССР. МТТ. 1983. №5.
11. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику. //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3.
12. Болотник Н.Н., Гукасян А.А. Управление движением манипулятора с учётом упругих колебаний струны. //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №4.
13. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. №3. С.79.
14. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. 478с.

15. Динамика управления роботами. Под редакцией Б.И.Юревича. М.: Наука, 1984. 336с.
16. Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н. Кинематика движения манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейной системе координат. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.62-67.
17. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 245с.
18. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560с.
19. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апрегович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
E-mail: ghukasyan10@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.02.2014