

УДК 517.977.56+539.3

**ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ГАСИТЕЛЕЙ
КОЛЕБАНИЙ ПОД УПРУГОЙ КОНЕЧНОЙ БАЛКОЙ
ПРИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ**

Хуршудян Ам. Ж., Хуршудян Ас. Ж.

Ключевые слова: оптимизация, метод Бубнова–Галёркина, билинейная система управления, гашение колебаний, проблема моментов

Key Words: optimization, Bubnov–Galerkin procedure, bilinear control system, vibration damping, moments problem

Խորշուդյան Ամ.Ժ., Խորշուդյան Աս.Ժ.

**Շարժվող բեռի ազդեցությանը ենթարկվող առաձգական վերջավոր հեծանի տակ տատանումների
առաձգամածուցիկ մարիչների օպտիմալ բաշխումը**

Հետազոտվել է հողակապորեն ամրացված, առաձգական, վերջավոր ձողի տակ տատանումների առաձգամածուցիկ մարիչների օպտիմալ բաշխման օրենքի որոշման խնդիրը, երբ հեծանը ենթարկվում է իր երկայնքով հաստատուն ինտենսիվությամբ և արագությամբ շարժվող բեռի ազդեցությանը: Ուսումնասիրության հիմնական նպատակը հեծանի տակ մարիչների բաշխման օպտիմալ ֆունկցիայի որոշումն է, իսկ օպտիմալության հայտանիշը՝ այդ բաշխման խտությունը: Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպվել է որպես Էգրային խնդիր փոփոխական, դեկլարվող գործակցով երկգծային դիֆերենցիալ հավասարման համար: Կիրառելով Բուբնով–Գալյորկինի մեթոդը խնդրի լուծումը հաջողվել է հանգեցնել մոմենտների վերջավոր չափանի պրոբլեմի, որը բացահայտ լուծվել է: Ցույց է տրվել, որ նշված իմաստով օպտիմալ է մարիչների դիսկրետ (կետային) բաշխումը: Որոշվել է հեծանի ճկվածքի մոտարկման ֆունկցիան՝ փակ տեսքով: Բերված են թվային հաշվարկների հիմնական արդյունքները:

Khurshudyan Am. Zh., Khurshudyan As. Zh.

Optimal Distribution of Viscoelastic Dampers under Elastic Finite Beam under Moving Load

The problem of viscoelastic dampers optimal distribution function determination is investigated under simply supported elastic beam of finite length, subjected to a moving load with constant intensity, moving along the beam with constant velocity. Our main aim is the dampers optimal distribution function determination, and optimality criterion – the density of that distribution. Problem is mathematically formulated as initial–boundary problem for bilinear wave equation with variable controllable coefficient. Application of Bubnov–Galerkin procedure allow us to reduce solution of the problem to finite–dimensional moments problem, which is resolved explicitly. It is proved, that optimal in mentioned sense is dampers discrete (pointwise) distribution. Approximating function of beam deflection is determined. Results of numerical calculations are presented.

Исследована задача нахождения оптимального закона распределения вязкоупругих гасителей колебаний под шарнирно опертой упругой балкой конечной длины, подверженной воздействию подвижной нагрузки постоянной интенсивности, движущейся по балке с постоянной скоростью. Основной целью является определение оптимальной функции распределения демпферов под балкой, а критерием оптимальности – плотность их распределения. Задача математически сформулирована в виде начально–краевой задачи для билинейного дифференциального уравнения с переменным управляемым коэффициентом. Применяв процедуру Бубнова–Галёркина, удалось свести решение задачи оптимизации к конечномерной проблеме моментов, которая разрешена в явном виде. Показано, что оптимальным в указанном смысле является закон дискретного распределения гасителей. Определена приближённая функция прогиба балки в замкнутой форме. Приведены основные результаты вычислительного эксперимента.

В работе предложен способ решения задачи управления для билинейных систем, т.е. систем с управляемым коэффициентом на основе метода Бубнова–Галёркина. Используя обобщённое действительное интегральное преобразование Фурье, нахождение управляемого коэффициента системы в частных производных сведено к конечномерной проблеме моментов. Построенная процедура продемонстрирована на примере задачи оптимизации распределения вязкоупругих в смысле модели Кельвина–Фойхта гасителей колебаний под шарнирно опертой упругой балкой конечной длины. Балка изгибается под воздействием подвижной нагрузки постоянной интенсивности, движущейся по балке с постоянной скоростью. Фактором оптимизации является переменный коэффициент дифференциального уравнения в частных производных четвёртого порядка, а критерием оптимальности – плотность распределения гасителей под балкой. Задача сведена к конечномерной проблеме моментов и решена в явном виде. Получено, что оптимальным в указанном смысле является дискретное (точечное) распределение демпферов. Задача вычисления определяющих точек, характеризующих положение демпферов под балкой, сведена к задаче нелинейного программирования. Определён оптимальный прогиб балки. Процесс вычисления определяющих точек продемонстрирован на численном примере.

Упругие балки, подверженные воздействию подвижных нагрузок, являются простейшими моделями мостов, по которым движется поезд. В связи с этим, гашение изгибных колебаний таких балок за конечный промежуток времени имеет непосредственную прикладную ценность.

1. Описание метода решения задачи. Оптимизация топологии или структуры конструкции [1, 2] может привести не только к минимальному распределению материала в его объёме, представляющее собой непосредственную прикладную ценность, сохранив, или даже оптимизировав целевые свойства конструкции, но и влиять на процессы, в которые она вовлечена. Такие задачи теории оптимизации представляют собой не только практический интерес, но и выделяются сложностью исследования, поскольку математически они формулируются как билинейные системы в частных производных, т.е. системы с управляемыми коэффициентами. Билинейные в смысле наличия произведения двух искомым функций или их производных, системы являются важными подклассами нелинейных систем, имеющие приложение в инженерии, биологии, экономике и т.д. Задачи управления билинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти, например, в [3, 4], а билинейными системами в частных производных – в [5–7]. В монографии [5] описано множество интересных задач, моделируемых в виде билинейных систем управления.

В общей постановке задача топологической оптимизации требует минимизировать заданный критерий оптимальности, описывающий, как правило, распределение материала в объёме конструкции при дифференциальных и топологических ограничениях. Математически эту задачу можно сформулировать в виде задачи математического программирования: выбором параметра оптимизации u из заданного множества U допустимых функций минимизировать критерий оптимальности

$$\kappa[u] \rightarrow \min, \quad u \in U,$$

при дифференциальных и геометрических ограничениях

$$\mathcal{L}_u[w] = P(x, t), \quad t > 0 \text{ и } x \in \Omega. \quad (1.1)$$

Дифференциальные ограничения (1.1) являются уравнениями движения или равновесия конструкции, решение которой должно удовлетворять заданным условиям на границе

$$w|_{x \in \partial\Omega} = w_0(t), \quad t > 0. \quad (1.2)$$

$\mathcal{L}_u[w]$ – дифференциальный оператор, определённый в области $\Omega \times \mathbb{R}^+$, действующий на функцию $w = w(\mathbf{x}, t)$ и содержащую параметр оптимизации u как коэффициент этой функции, $P(\mathbf{x}, t)$ – заданная функция, удовлетворяющая определенным условиям, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ – область пространства, необязательно односвязная, занимаемая конструкцией, а $\partial\Omega$, как обычно, обозначает границу области Ω . Примеры оператора $\mathcal{L}_u[\bullet]$ можно найти, например, в монографии [5] и в статьях [6, 7].

Задаются ещё начальные данные:

$$w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{w}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.3)$$

Целью задачи управления можно считать, например, выполнение некоторых конечных данных [7]:

$$w(\mathbf{x}, T) = w_T(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \dot{w}_T(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.4)$$

С целью решения поставленной задачи применим процедуру Бубнова–Галёркина [8]. Предположим, что нам удалось построить полную систему базисных (аппроксимирующих) функций $\{\varphi_k(\mathbf{x}, t)\}_{k=0}^n$ краевой задачи (1.1), (1.2), первая из которых удовлетворяет неоднородным, а все остальные – однородным граничным условиям (1.2). Тогда, невязка, получаемая подстановкой приближённого решения

$$w_n(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T) \quad (1.5)$$

в уравнение (1.1), где α_k – постоянные, подлежащие определению, будет иметь вид:

$$N_n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}_u[w_n] - P(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (1.6)$$

Согласно методу Бубнова–Галёркина, искомые коэффициенты α_k определяются из условий ортогональности базисных функций $\{\varphi_k(\mathbf{x}, t)\}_{k=0}^n$ к невязке (1.6) [8]:

$$\int_0^T \int_{\Omega} N_n(\mathbf{x}, t) \varphi_k(\mathbf{x}, t) dx dt = 0, \quad k = \overline{0; n}. \quad (1.7)$$

После определения искоемых коэффициентов α_k из системы линейных алгебраических уравнений (1.7) и подстановки в приближённое решение (1.5), учитывая, что в конечный момент времени T должны выполняться условия (1.4), после несложных алгебраических преобразований и выкладок, для определения параметра оптимизации получим систему ограничений вида:

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \cdot K_n(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = M_k, \quad k = \overline{0; n}, \quad (1.8)$$

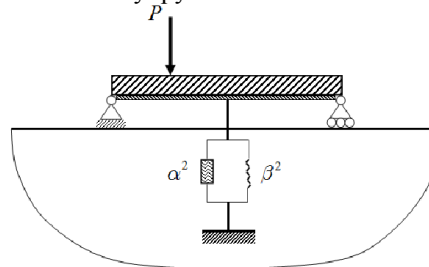
где ядра $K_n(\mathbf{x}, t)$ и постоянные M_k зависят от параметров системы (1.1), (1.2).

Если при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ невязка (1.6) тождественно равна нулю: $N_{n_0}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, то соответствующая функция $w_{n_0}(\mathbf{x}, t)$ (1.5) будет точным решением задачи (1.1), (1.2). В противном случае, увеличив число n слагаемых в (1.5), можно приблизить искомого решение к точному с требуемой точностью.

Из системы (1.8) искомую функцию можно определить несколькими способами, например, способом, предложенным в [9], трактуя эту систему как проблему моментов [9, 10]. Удобность этого подхода состоит в том, что удаётся не только найти явный вид функции управления, но и установить условия его существования [7, 9–12].

2. Демпфирование изгибных колебаний балки вязкоупругими гасителями при подвижных воздействиях. Применим теперь указанную процедуру для решения задачи оптимизации распределения вязкоупругих гасителей колебаний под упругой балкой конечной длины $2l$, шарнирно опёртой по краям $x_* = -l$ и $x_* = l$. Балка изгибается под воздействием нагрузки постоянной интенсивности, движущейся по длине балки с постоянной скоростью (фиг. 1).

В недавних исследованиях [13–18] рассмотрено множество задач гашения колебаний систем, подвергающихся воздействию подвижных нагрузок. Основным параметром оптимизации является смещение гасителей (демпферов) при их фиксированных конфигурациях и расположениях под балкой [13–16]. В последнее время, с целью повышения сейсмостойкости сооружений исследуются также оптимальные расположения, а также число вязкоупругих гасителей колебаний [17, 18].



Фиг. 1. Иллюстрация балки с вязкоупругим демпфером

Предположив, что нагрузка сходит с балки в заданный момент времени τ_* , $v_* \tau_* = 2l$, требуется обеспечить нулевые конечные условия (1.4) в заданный момент времени $T_* > \tau_*$. Вводя безразмерные переменные и величины:

$$x = \frac{x_*}{l}, \quad w = \frac{w_*}{l}, \quad t = \omega t_*, \quad P = \frac{P_* l^2}{EJ}, \quad v = \frac{v_*}{\omega l} = \frac{2}{\omega \tau_*},$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha_*^2 \omega l^4}{EJ}, \quad \beta^2 = \frac{\beta_*^2 l^4}{EJ}, \quad \gamma^2 = \frac{\rho S}{EJ} \omega^2 l^4,$$

на основе модели Кельвина–Фойхта вязкоупругого тела, задачу математически можно сформулировать в виде следующего дифференциального уравнения в частных производных [14]

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + u(x) \left[\alpha^2 \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \beta^2 w(x,t) \right] + \gamma^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t), \quad (2.1)$$

$$x \in (-1,1), t \in (0,T),$$

при граничных условиях шарнирного опирания:

$$w(-1,t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=-1} = w(1,t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0, \quad t \in (0,T). \quad (2.2)$$

EJ – жёсткость на изгиб, ρ – плотность, S – площадь поперечного сечения, а ω – частота свободных колебаний балки, α_*^2 и β_*^2 – коэффициенты вязкого и упругого элементов гасителя, $u(x)$ – параметр оптимизации (функция управления), характеризующая распределение гасителей под балкой,

$$F(x,t) = P\delta(x+1-vt) \cdot [\theta(t) - \theta(t-\tau)], \quad x \in (-1,1), t \in (0,T),$$

представляет подвижную нагрузку, P – интенсивность, а v_* – скорость движения нагрузки, $\theta(t)$ – единичная ступенька Хэвисайда, $\delta(x)$ – функция Дирака [19]. Случай $\alpha_*^2 = 0$ соответствует чисто упругому [14], а $\beta_*^2 = 0$ – чисто вязкому гасителю [15, 16]. Поперечное сечение балки считается постоянной.

При получении уравнения (2.1) были использованы известные соотношения [19]: $\theta(|\lambda|t) = \theta(t)$ и $|\lambda|\delta(|\lambda|x) = \delta(x)$, $\lambda \neq 0$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ заданы начальные условия:

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{w}_0(x), \quad x \in (-1,1). \quad (2.3)$$

Множество допустимых управлений U состоит из функций u , обеспечивающих выполнение в заданный момент $t = T$ нулевых условий

$$w(x,T) = 0, \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad x \in (-1,1). \quad (2.4)$$

Из этого множества мы должны выбрать ту функцию, которая минимизирует плотность распределения гасителей под балкой, т.е. функционал [9, 11, 12]

$$\kappa[u] = \int_{-1}^1 u(x) dx, \quad u \in U. \quad (2.5)$$

Для согласованности граничных условий (2.2) и начальных, конечных данных (2.3), (2.4) необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$w_0(\pm 1) = \dot{w}_0(\pm 1) = 0, \quad w_0''(\pm 1) = \dot{w}_0''(\pm 1) = 0.$$

Исходя из физических рассуждений, полагаем, что параметр оптимизации неотрицательный и является финитным с носителем в $[-1,1]$. Поскольку пространство $L^1[-1,1]$, измеримых на $[-1,1]$ функций, является банаховым относительно нормы

$\|u\|_{L^1[-1,1]} \equiv \kappa[u]$, то множество допустимых управлений состоит из неотрицательных, финитных, суммируемых на $[-1,1]$ функций, обеспечивающих условия (2.4): $U = \{0 \leq u \in L^1[-1,1] : u \equiv 0, x \notin [-1,1]\}$. Оно всюду плотно в $L^1[-1,1]$ [19].

Уже на этом шаге можно было бы применить вышеуказанную процедуру, однако, пользуясь тем, что параметр оптимизации явно не зависит от переменной t , мы поступим немного иначе. Запишем дифференциальное уравнение (2.1) и условия (2.2) для всех $t \in \mathbb{R}$. Для этого введём оператор $A_T[\bullet]$, определённый на всей числовой оси и действующей по формуле

$$A_T[f] \equiv f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$$

Явный вид этого оператора можно построить по-разному, например, с помощью характеристической функции (индикатор) отрезка $[0, T]$:

$$\chi_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$$

Выразив функцию $\chi_{[0,T]}(t)$ через функцию Хэвисайда [7, 11, 12]:

$$A_T[f] = [\theta(t) - \theta(t-T)]f(t) \equiv f_1(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

мы можем не только записать задачу (2.1), (2.2) в классе обобщённых функций для всех $t \in \mathbb{R}$, но и включить в неё начальные и конечные данные (2.3) и (2.4):

$$\frac{\partial^4 w_1(x,t)}{\partial x^4} + u(x) \left[\alpha^2 \frac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} + \beta^2 w_1(x,t) \right] + \gamma^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = G(x,t), \quad (2.6)$$

$$x \in (-1,1), t \in \mathbb{R},$$

$$w_1(-1,t) = \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=-1} = w_1(1,t) = \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

$$G(x,t) = F(x,t) + \alpha^2 u(x) w_0(x) \delta(t) + \gamma^2 [w_0(x) \delta'(t) + \dot{w}_0(x) \delta(t)],$$

причём, производная функции Дирака понимается в обобщённом смысле [19]. Поскольку $\tau < T$, то ясно, что $A_T[F] = F(x,t)$. Ясно также, что функция

$w_1(x,t) \equiv A_T[w]$ является финитной с носителем в $[-1,1] \times [0,T]$, где совпадает с функцией $w(x,t)$.

Применим теперь к системе (2.6), (2.7) действительное обобщённое интегральное преобразование Фурье по переменной t [19]:

$$\frac{d^4 \bar{w}_1(x,\sigma)}{dx^4} + [(\beta^2 - i\sigma\alpha^2)u(x) - \sigma^2\gamma^2] \bar{w}_1(x,\sigma) = \bar{G}(x,\sigma), \quad (2.8)$$

$$x \in (-1, 1), \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\bar{w}_1(-1, \sigma) = \left. \frac{d^2 \bar{w}_1(x, \sigma)}{dx^2} \right|_{x=-1} = \bar{w}_1(1, \sigma) = \left. \frac{d^2 \bar{w}_1(x, \sigma)}{dx^2} \right|_{x=1} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

где

$$\mathcal{F}_t[f] \equiv \bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\sigma t} dt, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

– преобразование Фурье функции $f(t)$ по переменной t , $\mathcal{F}_t[\cdot]$ – оператор, а σ – спектральный параметр.

Очевидно, что

$$\mathcal{F}_t[g_1] = \mathcal{F}_t\{A_T[g]\} = \int_0^T g(t) e^{i\sigma t} dt,$$

$$\bar{G}(x, \sigma) \equiv \mathcal{F}_t[G] = \bar{F}(x, \sigma) + \alpha^2 u(x) w_0(x) + \gamma^2 [\dot{w}_0(x) - i\sigma w_0(x)],$$

$$\bar{F}(x, \sigma) \equiv \mathcal{F}_t[F] = \frac{Pe^{i\sigma \frac{x+1}{v}}}{v} [\theta(x+1) - \theta(x+1 - v\tau)].$$

Характерным для обыкновенного дифференциального уравнения (2.8) является то, что функция управления содержится не только в её коэффициентах, но и в правой части. Легко проверить, однако, что при $\beta^2 = 0$ (вязкий гаситель) вводя вспомогательную функцию $\bar{w}(x, \sigma) = i\sigma \bar{w}_1(x, \sigma) + w_0(x)$, функцию $u(x)$ можно исключить из правой части уравнения (2.8):

$$\frac{d^4 \bar{w}(x, \sigma)}{dx^4} - [i\sigma \alpha^2 u(x) + \sigma^2 \gamma^2] \bar{w}(x, \sigma) = \bar{G}_0(x, \sigma), \quad x \in (-1, 1), \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\bar{G}_0(x, \sigma) = i\sigma [\bar{F}(x, \sigma) + \gamma^2 \dot{w}_0(x)] + w_0''(x).$$

При $\alpha^2 = 0$ (упругий гаситель) функция управления будет фигурировать только в коэффициентах уравнения (2.8).

Применим теперь процедуру Бубнова–Галёркина. В качестве аппроксимирующих функций, взяв ортонормированную в $[-1, 1]$ систему $\{\sin(\pi kx)\}_{k=1}^n$, представив решение системы (2.8), (2.9) в виде

$$\bar{w}_{1n}(x, \sigma) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\sigma) \sin(\pi kx), \quad x \in [-1, 1], \sigma \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

из (1.7) для определения неизвестных коэффициентов α_k получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \Lambda_{km} = \Omega_m, \quad m = \overline{1; n}, \quad (2.11)$$

$$\Lambda_{km} = \left[(\pi k)^4 - \gamma^2 \sigma^2 \right] \delta_k^m + \left[\beta^2 - i\sigma\alpha^2 \right] J_{km}[u], \quad \Omega_m = \int_{-1}^1 \bar{G}(x, \sigma) \sin(\pi mx) dx,$$

$\delta_k^m = \delta_m^k$ – символ Кронекера, а фактор управления фигурирует в функционале

$$J_{km}[u] = \int_{-1}^1 u(x) \sin(\pi kx) \sin(\pi mx) dx.$$

Очевидно, что интегралы $J_{km}[u]$ симметричны: $J_{km}[u] = J_{mk}[u]$. Более того, $J_{kk}[u] \geq 0$.

С целью нахождения ограничений типа равенств на интегралы $J_{km}[u]$, представим решение системы (2.11) в виде:

$$\alpha_k(\sigma) = \frac{\Delta_k(\sigma)}{\Delta(\sigma)}, \quad k = \overline{1; n}, \quad (2.12)$$

где $\Delta(\sigma)$ – главный, а $\Delta_k(\sigma)$ – вспомогательные определители системы (2.11), и учитывая, что введённая функция $w_1(x, t)$ финитна с носителем в прямоугольнике $[-1, 1] \times [0, T]$, поступим уже традиционным способом [20]. Именно, согласно известной теореме Винера–Пэли–Шварца [19, 20], функция $\bar{w}_1(x, z)$, $z \in \mathbb{C}$, является целой аналитической функцией, удовлетворяющей неравенству:

$$\left| z^\nu \cdot \bar{w}_1(x, z) \right| \leq C_\nu \cdot e^{\vartheta|z|}, \quad x \in [-1, 1], \quad z \in \mathbb{C},$$

для всех $\nu = 0, 1, 2, \dots$, соответствующих действительным постоянным C_ν , $\vartheta > 0$ тип функции $\bar{w}_1(x, z)$ и зависит лишь от величины T , следовательно, в точках $z_\iota = \sigma_\iota + i\zeta_\iota$ комплексной плоскости, где знаменатель выражения (2.12), продолженный на всю комплексную плоскость, равняется нулю:

$$\Delta(z) = 0, \quad (2.13)$$

в нуль должен обращаться и числитель дроби (2.11):

$$\Delta_k(z_\iota) = 0, \quad k = \overline{1; n}, \quad \iota = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Легко доказывается, что равенства (2.14) при (2.13) выполняются для всех $k = \overline{1; n}$ одновременно [20], т.е. следует рассмотреть лишь одно из них.

Из общего вида главного определителя $\Delta(\sigma)$ следует, что равенство (2.13) имеет место лишь в конечном числе точек, чем и отличается от [20], ибо раскрывая определитель, относительно σ получим многочлен степени $2n$.

Равенства (2.14) при (2.13) и есть необходимые ограничения типа (1.8) на функционалы $J_{km}[u]$, откуда функция управления может быть найдена в явном виде. Опираясь на общую теорию моментов, можно показать [9–12, 20], что искомая функция $u^o(x)$, оптимальная в смысле функционала (2.5), есть

$$u^o(x) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j^o), \quad x \in (-1, 1), \quad (2.15)$$

где определяющие точки $-1 < x_j^o < x_{j+1}^o < 1$ соответствуют положениям гасителей и зависят от параметров $P, \nu, \tau, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

Следует подчеркнуть, что оптимальное решение (2.15) не единственно [9–12, 20], в силу чего, из условий $\{x_j^o\}_{j=1}^N \subset (-1, 1)$ число определяющих точек x_j^o однозначно вычислить, в общем случае, не удаётся.

Итак, решение поставленной задачи, в конечном счёте, свелось к вычислению определяющих точек x_j^o из нелинейных ограничений типа равенств, получаемых подстановкой в систему (2.14) функцию оптимального управления (2.15). Последнюю задачу можно решить эффективными численными методами нелинейного программирования [21].

После определения оптимальной функции (2.15), целесообразно определить и соответствующую функцию прогиба балки на основе разложения (2.9). Применив к (2.9) обратное обобщённое преобразование Фурье, получим:

$$w_{1n}(x, t) = \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_k(t) \sin(\pi k x), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

где

$$\tilde{\alpha}_k(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[\alpha_k] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_k(\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma,$$

где $\mathcal{F}_t^{-1}[\cdot]$ – обратный оператор Фурье.

Поскольку действительные части выражений $\Lambda_{km}(\sigma)$ и $\Omega_m(\sigma)$ являются чётными, а мнимые – нечётными:

$$\Re \Lambda_{km}(-\sigma) = \Re \Lambda_{km}(\sigma), \quad \Re \Omega_m(-\sigma) = \Re \Omega_m(\sigma),$$

$$\Im \Lambda_{km}(-\sigma) = -\Im \Lambda_{km}(\sigma), \quad \Im \Omega_m(-\sigma) = -\Im \Omega_m(\sigma),$$

то из общего вида главного и вспомогательных определителей системы (2.11) нетрудно заметить, что $\Re \alpha_k(-\sigma) = \Re \alpha_k(\sigma)$, а $\Im \alpha_k(-\sigma) = -\Im \alpha_k(\sigma)$. Как известно, это является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $\tilde{\alpha}_k(t)$, следовательно, и $w_{1n}(x, t)$, была действительной [19]. Тогда,

$$\tilde{\alpha}_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Re \alpha_k(\sigma) \cos(\sigma t) + \Im \alpha_k(\sigma) \sin(\sigma t)] d\sigma,$$

где

$$\Re \alpha_k(\sigma) = \frac{\Re \Delta_k \Re \Delta + \Im \Delta_k \Im \Delta}{(\Re \Delta)^2 + (\Im \Delta)^2}, \quad \Im \alpha_k(\sigma) = -\frac{\Re \Delta_k \Im \Delta - \Im \Delta_k \Re \Delta}{(\Re \Delta)^2 + (\Im \Delta)^2}.$$

Более того, $\Re \Delta(-\sigma_1, \zeta_1) = \Re \Delta(\sigma_1, \zeta_1)$, а $\Im \Delta(-\sigma_1, \zeta_1) = -\Im \Delta(\sigma_1, \zeta_1)$, т.е. вме-

сте с $z_1 = \sigma_1 + i\zeta_1$ уравнению (2.13) одновременно удовлетворит и $z_1 = -\sigma_1 + i\zeta_1$, следовательно, имея в виду, что $\Re\Delta_k(-\sigma_1, \zeta_1) = \Re\Delta_k(\sigma_1, \zeta_1)$, а $\Im\Delta_k(-\sigma_1, \zeta_1) = -\Im\Delta_k(\sigma_1, \zeta_1)$, из (2.14), на самом деле, имеем n ограничений.

3. Пример процедуры вычисления определяющих точек. Применим построенный алгоритм в случае, когда $n = 3$, $w_0(x) = \sin(\pi x)$, $\dot{w}_0(x) = 0$, тогда

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma) &= B_4 E^4 + B_5 E^3 - B_6 E^2 + \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3, \\ \Delta_1(\sigma) &= E^2 J_{23}[u] \left[-\Omega_1 J_{23}[u] + \Omega_2 J_{13}[u] + \Omega_3 J_{12}[u] \right] - \\ &\quad - E \left[\Omega_2 \Gamma_3 J_{12}[u] + \Omega_3 \Gamma_2 J_{13}[u] \right] + \Omega_1 \Gamma_2 \Gamma_3, \\ \Delta_2(\sigma) &= E^2 J_{13}[u] \left[\Omega_1 J_{23}[u] - \Omega_2 J_{13}[u] + \Omega_3 J_{12}[u] \right] - \\ &\quad - E \left[\Omega_1 \Gamma_3 J_{12}[u] + \Omega_3 \Gamma_1 J_{23}[u] \right] + \Omega_2 \Gamma_1 \Gamma_3, \\ \Delta_3(\sigma) &= E^2 J_{12}[u] \left[\Omega_1 J_{23}[u] + \Omega_2 J_{13}[u] - \Omega_3 J_{12}[u] \right] - \\ &\quad - E \left[\Omega_1 \Gamma_2 J_{13}[u] + \Omega_2 \Gamma_1 J_{23}[u] \right] + \Omega_3 \Gamma_1 \Gamma_2, \\ \Omega_m &= (-1)^m \lambda_m P \cdot \frac{1 - e^{\frac{2i\sigma}{v}}}{\lambda_m^2 - \sigma^2} - i\sigma\gamma^2 \delta_1^m + \alpha^2 J_{1m}[u], \quad \lambda_m = \pi m v, \\ E &= \beta^2 - i\sigma\alpha^2, \Gamma_1 = EJ_{11}[u] + B_1, B_1 = (\pi i)^4 - \gamma^2 \sigma^2, \quad i = \overline{1; 3}, \\ B_4 &= J_{13}[u] \left[J_{12}[u] J_{23}[u] + J_{13}[u] J_{22}[u] \right], \\ B_5 &= J_{23}[u] \left[J_{11}[u] J_{23}[u] - J_{12}[u] J_{13}[u] \right] - J_{12}^2[u] J_{33}[u], \\ B_6 &= B_1 J_{23}^2[u] + B_2 J_{13}^2[u] + B_3 J_{12}^2[u].\end{aligned}$$

Следует учесть при этом очевидное соотношение $J_{11}[u] + J_{22}[u] = 2J_{13}[u]$.

Применив вышеизложенную процедуру, для вычисления определяющих точек x_j^o имеем задачу минимизации функционала (2.5) при системе нелинейных уравнений типа равенств $\Re\Delta_1(z_1) = 0$, $\Im\Delta_1(z_1) = 0$, $i = \overline{1; 6}$ (после отделения действительных и мнимых частей), где $z_1 = \sigma_1 + i\zeta_1$ – корни уравнения шестой степени $\Delta(z) = 0$ и ограничений типа неравенств $-1 < x_j^o < x_{j+1}^o < 1$.

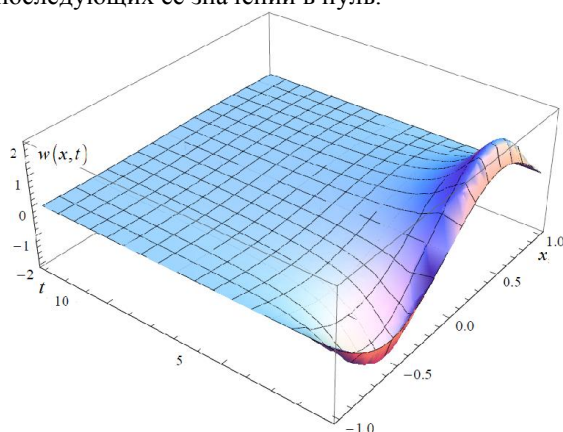
В табл. 1 приведены значения определяющих точек x_j^o для разных значений параметров $P, v, \tau, \alpha^2, \beta^2$, характеризующих интенсивность, скорость и момент отделения подвижной нагрузки, вязкость и упругость гасителей.

Таблица 1. Определяющие точки x_j^o

$\gamma^2 = \pi^4$

P_*	α_*^2	β_*^2	ν_*	τ_*	x_j^o
100	0.1	100	100	10	$x_1^o = -0.87, x_2^o = -0.26, x_3^o = 0., x_4^o = 0.72$
200	1	150	50	20	$x_1^o = -0.77, x_2^o = -0.06, x_3^o = 0., x_4^o = 0.69$
200	5	200	40	25	$x_1^o = -0.56, x_2^o = 0., x_3^o = 0.61$

Фиг. 2 изображает зависимость безразмерного прогиба балки от переменных x и t . Как видно, функция $w(x, t)$, принимая при $t = 0$ заданное значение $w_0(x) = \sin(\pi x)$, растёт до некоторого значения, которое существенно зависит, в основном, от параметров $P_*, \nu_*, \tau_*, \alpha_*^2, \beta_*^2$, потом убывает, обращаясь при заданном $T = 2\pi$ и для последующих её значений в нуль.



Фиг. 2. Безразмерная функция прогиба балки

Это характерно для всех выбранных значений параметров $P_*, \nu_*, \tau_*, \alpha_*^2, \beta_*^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bendsøe M.P., Sigmund O. Topology Optimization. Berlin: Springer, 2003.
2. Christensen P., Klarbring A. An Introduction to Structural Optimization. Berlin: Springer, 2009.
3. Расина И.В., Батурина О.В. Оптимизация управления в билинейных системах // Автоматика и Телемеханика. 2013. Т.74. № 5. С.102–113.
4. Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В. Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // Автоматика и Телемеханика. 2011. Т.72. № 6. С.64–78.
5. Pardalos P.M., Yatsenko V. Optimization and Control of Bilinear Systems. Berlin: Springer, 2008.
6. Beauchard K., Rouchon P. Bilinear Control of Schrödinger PDEs. Berlin: Springer, Encyclopedia of Systems and Control, vol. XXIV, 2400p. (to appear in 2015).
7. Jilavyan S.H., Khurshudyan As.Zh., Sarkisyan A.S. On Adhesive Binding Optimization of Elastic Homogeneous Rod to a Fixed Rigid Base as a Control Problem by Coefficient // A Quart. of Polish Acad. of Sci. Archives of Control Sciences. 2013, vol. 23 (LIX), № 4. pp.413–425.

8. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. 2-ое изд., доп. М.: Наука, 1970.
9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
10. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
11. Khurshudyan As.Zh. On Optimal Boundary and Distributed Control of Partial Integro–Differential Equations // A Quart. of Polish Acad. of Sci. Archives of Control Sciences. 2014, vol. 24 (LX), №1, pp.5–25.
12. Khurshudyan As. Zh. On Optimal Boundary Control of Non–Homogeneous String Vibrations under Impulsive Concentrated Perturbations with Delay in Controls // Math. Bulletin of T. Shevchenko Scientific Society. 2013, vol. 10, pp.203–209.
13. de Silva C.W. Vibration Damping, Control and Design. CRC Press, 2007.
14. Soares R.M., del Prado Z., Gonsalves P.B. On the Vibration Control of Beams Using a Moving Absorber and Subjected to Moving Loads // Mecánica Computacioal. 2010, vol. 29, pp. 1829–1840.
15. Museros P., Moliner E., Martinez–Rodrigo M.D. Free Vibrations of Simply Supported Beam Bridges under Moving Loads. Maximum Resonance, Cancellation and Resonant Vertical Acceleration // Journal of Sound and Vibration. 2013, vol. 332, № 2, pp.326–345.
16. Museros P., Martinez–Rodrigo M.D. Vibration Control of Simply Supported Beams under Moving Loads Using Fluid Viscous Dampers // Journal of Sound and Vibration. 2007, vol.300, № 1–2, pp.292–315.
17. Qu Ji–ting, Li Hong–nan, Study on Optimal Placement and Reasonable Number of Viscoelastic Dampers by Improved Weight Coefficient Method // Mathematical Problems of Engineering. 2013, vol. 2013, ID 358709, 10p.
18. Fujita K., Moustafa A., Takewaki I. Optimal Placement of Viscoelastic Dampers and Supporting Members under Variable Excitations // Earthquakes and Structures. 2010, vol.1, № 1, pp. 43–67.
19. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. 2-ое изд. М.: МГУ, 1984.
20. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975.
21. Betts J.T. Methods of Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming. 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2010.

Сведения об авторах:

Хуршудян Амалия Жораевна–аспирант факультета науки, технологий и коммуникаций Люксембургского университета.

Адрес: 1359, Люксембург, Ричарда Куденхов–Калерги, 6.

Тел.: +352 661 29 05 88, **Е–mail:** amalya.khurshudyan@uni.lu

Хуршудян Асатур Жораевич – аспирант кафедры механики ЕГУ

Адрес: 0025, Ереван, Алека Манукяна, 1.

Тел.: +374 99 420–713, **Е–mail:** asaturkhurshudyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.03.2014