

УДК 539.3

**ВОЛНЫ ТИПА ЛЯВА В СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ
ДВУХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ С НЕОДНОРОДНЫМИ
СЛОЯМИ, СОЕДИНЁННЫХ ОДНОРОДНЫМ СЛОЕМ**

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З.

Ключевые слова: волны Лява, сдвиговые поверхностные волны, неоднородные слои.
Keywords: Love waves, shear surface waves, inhomogeneous layers

Դանոյան Զ.Ն., Աթոյան Լ.Ա., Սահակյան Ս.Լ., Դանոյան Ն.Զ.

**Լյավի տիպի ալիքները շերտավոր առաձգական կառուցվածքում՝ բաղկացած համասեռ շերտով
իրար միացված անհամասեռ շերտերով երկու համասեռ կիսատարածություններից**

Ուսումնասիրված են Լյավի տիպի ալիքները շերտավոր առաձգական կառուցվածքում՝ բաղկացած համասեռ շերտով իրար միացված անհամասեռ շերտերով երկու համասեռ կիսատարածություններից: Դիտարկված են հորիզոնական բևեռացված սահքի հարթ համասեռ և անհամասեռ ալիքները նկարագրող լուծումները, որոնցից առանձնացվել են շերտերին զուգահեռ տարածվող Լյավի տեսակի մակերևութային ալիքները: Ստացվել և հետազոտվել է այդ ալիքների գոյության դիսպերսիոն հավասարումը: Կառուցվել են դիսպերսիոն կորերը կառուցվածքի որոշ մասնավոր դեպքերի համար: Ցույց է տրված լրության արգելափակված գոտիների առկայությունը կառուցվածքի որոշ դեպքերի և մակերևութային ալիքի որոշ ձևերի (մոդաների) համար:

Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Sahakyan S.L., Danoyan N. Z.

Love Waves in a layered elastic media consisting of two semi-infinite half-spaces with inhomogeneous layers and homogeneous layer between them

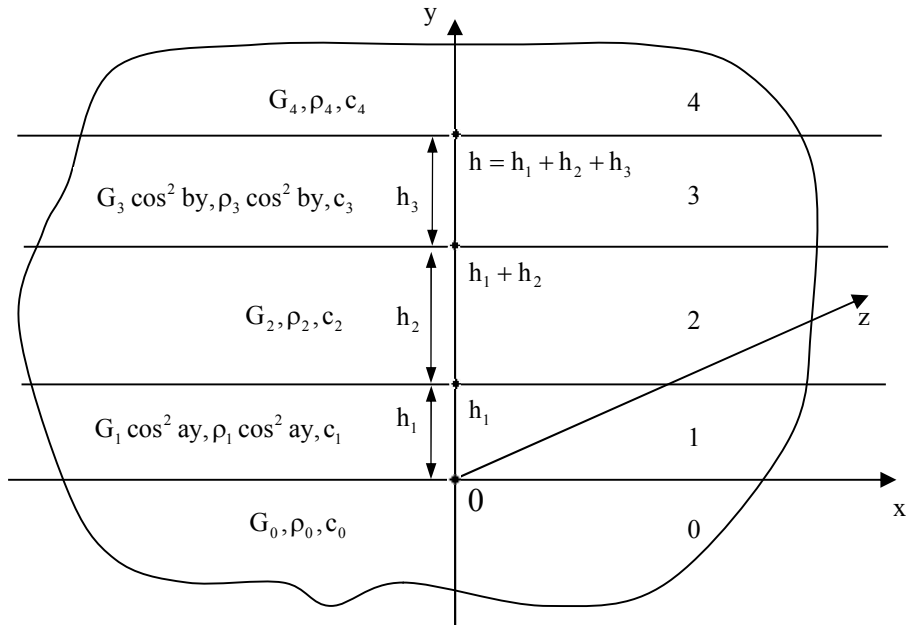
Love type waves in a layered elastic media consisting of two semi-infinite half-spaces with inhomogeneous layers and homogeneous layer between them are investigated. The solutions corresponding to horizontally polarized shear plane homogeneous and inhomogeneous waves are considered. Especially surface Love type waves, which propagate parallel to layers, are discussed. The dispersion equation according to above mentioned waves is obtained and investigated. For some special cases of structure dispersion curves are drawn and the existence of forbidden zones (band gaps) is shown.

Исследуются поверхностные волны типа Лява в слоистой упругой структуре, состоящей из двух однородных полупространств с неоднородными слоями, соединённые однородным слоем. Рассматриваются решения, представляющие горизонтально поляризованные сдвиговые плоские однородные и неоднородные волны, причём, выделены поверхностные волны типа Лява, которые распространяются параллельно слоям. Получено и исследовано дисперсионное уравнение, соответствующее этим волнам. Для некоторых частных случаев структуры построены дисперсионные кривые. Показано существование частотных зон умолчания или запрещённых зон для определённых случаев структур и мод волн.

1. Введение. Вопросами распространения волн типа Лява в слоистой упругой конструкции, когда однородный слой конечной толщины скреплён двумя изотропными полупространствами, занимался Стоунли [1]. Случай, когда слой между полупространствами является неоднородным по толщине, изучался в работах [2,3]. В настоящей статье обсуждается случай структуры, когда между двумя однородными полупространствами есть два неоднородных слоя, соединённые однородным слоем. Получено дисперсионное соотношение, на основе которого

построены кривые зависимостей фазовых скоростей поверхностных волн от приведённой суммарной толщины слоёв.

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругую слоистую структуру, состоящую из двух однородных полупространств с неоднородными слоями, (функции неоднородностей слоёв разные), разделённых однородным слоем (фиг.1).



Фиг. 1.

Выше приняты следующие обозначения: индексами 0, 1, 2, 3 и 4 отмечаются величины, относящиеся, соответственно, к первому однородному полупространству, к первому неоднородному слою, к однородному среднему слою, ко второму неоднородному слою и ко второму однородному полупространству, через $w_j(x, y, t)$ ($j=0,1,2,3,4$) обозначены упругие перемещения по оси z в соответствующих областях, они являются функциями только переменных x , y и t (t – время), G_j – модули сдвига, ρ_j – плотности масс, $c_j^2 = G_j / \rho_j$ – фазовые скорости сдвиговых волн, $h = h_1 + h_2 + h_3$ – общая толщина слоёв, h_1, h_2, h_3 – толщины соответствующих слоёв.

В двух неоднородных слоях предполагается, что все параметры, характеризующие данный неоднородный слой, меняются по одному и тому же закону:

в первом неоднородном слое –

$$G_1(y) = G_1 \cos^2(ay), \rho_1(y) = \rho_1 \cos^2(ay), \quad (1)$$

во втором неоднородном слое –

$$G_3(y) = G_3 \cos^2(by), \rho_3(y) = \rho_3 \cos^2(by), \quad (2)$$

где выше $G_1, G_3, \rho_1, \rho_3, a, b$ – постоянные.

Волновой процесс в нашей структуре описывается следующими уравнениями:

$$\Delta w_0 = \frac{1}{c_0^2} \ddot{w}_0, \quad (3)$$

$$\Delta w_1 + a^2 w_1 = \frac{1}{c_1^2} \ddot{w}_1, \quad (4)$$

$$\Delta w_2 = \frac{1}{c_2^2} \ddot{w}_2, \quad (5)$$

$$\Delta w_3 + b^2 w_3 = \frac{1}{c_3^2} \ddot{w}_3, \quad (6)$$

$$\Delta w_4 = \frac{1}{c_4^2} \ddot{w}_4, \quad (7)$$

где $w_1 = w^{(1)} \cos(ay)$, $w_3 = w^{(3)} \cos(by)$. $w^{(1)}, w^{(3)}, w_0, w_2, w_4$ – реальные перемещения по оси Oz в соответствующих слоях.

Контактные условия между слоями, отражающие непрерывность перемещений и напряжений, выражаются следующими соотношениями:

$$w_0(0) = w_1(0), \quad (8)$$

$$G_0 \frac{\partial w_0(0)}{\partial y} = G_1 \frac{\partial w_1(0)}{\partial y}, \quad (9)$$

$$\frac{w_1(h_1)}{\cos(ah_1)} = w_2(h_1), \quad (10)$$

$$G_2 \frac{\partial w_2(h_1)}{\partial y} = G_1 \left(\frac{\partial w_1(h_1)}{\partial y} \cos(ah_1) + w_1(h_1) a \sin(ah_1) \right), \quad (11)$$

$$w_2(h_1 + h_2) = \frac{w_3(h_1 + h_2)}{\cos(b(h_1 + h_2))}, \quad (12)$$

$$G_2 \frac{\partial w_2(h_1 + h_2)}{\partial y} = \quad (13)$$

$$= G_3 \left(\frac{\partial w_3(h_1 + h_2)}{\partial y} \cos(b(h_1 + h_2)) + w_3(h_1 + h_2) b \sin(b(h_1 + h_2)) \right),$$

$$w_4(h) = \frac{w_3(h)}{\cos(bh)}, \quad (14)$$

$$G_4 \frac{\partial w_4(h)}{\partial y} = G_3 \left(\frac{\partial w_3(h)}{\partial y} \cos(bh) + w_3(h) b \sin(bh) \right). \quad (15)$$

В этих соотношениях аргументы x и t опущены.

Кроме контактных условий необходимо учесть также условия затухания в бесконечности, которые представляются следующим образом:

$$w_0(y) \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow -\infty \quad (16)$$

$$w_4(y) \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow +\infty \quad (17)$$

2. Решение уравнений. Решения нашей задачи (3)-(7), удовлетворяющие условиям затухания (16), (17), будем искать в виде плоских волн:

$$w_0 = A_0 e^{ksy} e^{i(kx-\omega t)}, \quad (18)$$

$$w_1 = (A_1 \cos(kpy) + B_1 \sin(kpy)) e^{i(kx-\omega t)}, \quad (19)$$

$$w_2 = (A_2 \cos(kry) + B_2 \sin(kry)) e^{i(kx-\omega t)}, \quad (20)$$

$$w_3 = (A_3 \cos(kqy) + B_3 \sin(kqy)) e^{i(kx-\omega t)}, \quad (21)$$

$$w_4 = A_4 e^{-ky} e^{i(kx-\omega t)}, \quad (22)$$

где k – волновое число, ω – круговая частота, s, p, r, q, ℓ – поперечные волновые числа, которые полагаются положительными, A_j, B_k – константы ($j = 0, 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3$).

Подставив (18)-(22) в уравнения (3)-(7), получим значения поперечных волновых чисел:

$$s = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2}}, \quad p = \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} + \frac{\beta_1^2}{\xi^2} - 1}, \quad r = \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1}, \quad q = \sqrt{\frac{c^2}{c_3^2} + \frac{\beta_3^2}{\xi^2} - 1}, \quad \ell = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_4^2}}, \quad (23)$$

где $c = \omega / k$ – фазовая скорость поверхностной волны, $c_j = G_j / \rho_j$ – фазовые скорости объёмных сдвиговых волн в соответствующих областях; $\xi^2 = k^2 h^2$, $\beta_1^2 = a^2 h^2$, $\beta_3^2 = b^2 h^2$.

Далее, подставляя решения (18)-(22) в граничные условия (8)-(15) и учитывая соотношения (23), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных A_j, B_k ($j = 0, 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3$), характеризующих амплитуды волн. Условие разрешимости полученной системы даёт дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости поверхностной волны:

$$\det A = 0, \quad (24)$$

где A – матрица восьмого порядка с элементами:

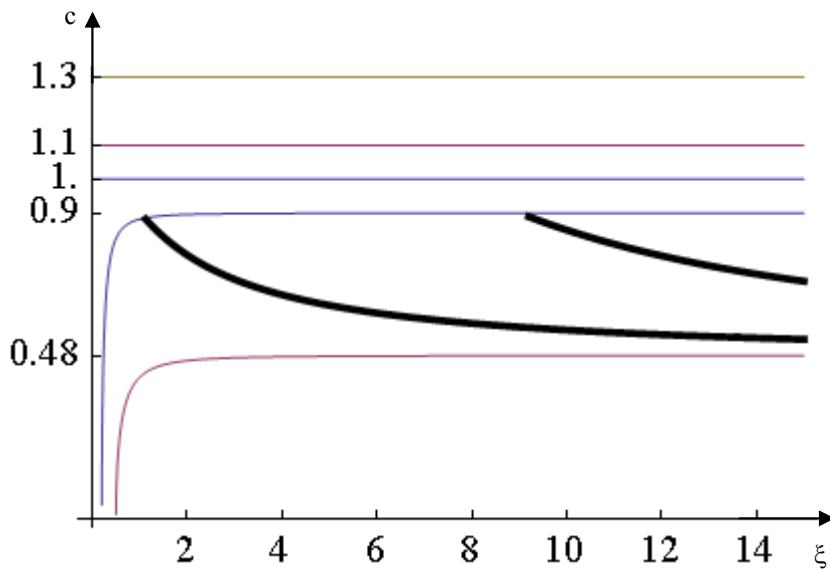
$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = G_0 ks, \quad a_{23} = -G_1 kp, \\ a_{32} &= \cos(kph_1), \quad a_{33} = \sin(kph_1), \quad a_{34} = -\cos(ah_1) \cos(krh_1), \\ a_{35} &= -\cos(ah_1) \sin(krh_1), \\ a_{42} &= -aG_1 \cos(kph_1) \sin(ah_1) + G_1 kp \cos(ah_1) \sin(kph_1), \\ a_{43} &= -G_1 kp \cos(ah_1) \cos(kph_1) - aG_1 \sin(ah_1) \sin(kph_1), \\ a_{44} &= -G_2 kr \sin(krh_1), \quad a_{45} = G_2 kr \cos(krh_1), \\ a_{54} &= -\cos(b(h_1 + h_2)) \cos(kr(h_1 + h_2)), \\ a_{55} &= -\cos(b(h_1 + h_2)) \sin(kr(h_1 + h_2)), \\ a_{56} &= \cos(kq(h_1 + h_2)), \quad a_{57} = \sin(kq(h_1 + h_2)), \\ a_{64} &= -G_2 kr \sin(kr(h_1 + h_2)), \quad a_{65} = -G_2 kr \cos(kr(h_1 + h_2)), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
a_{66} &= -bG_3 \cos(kq(h_1+h_2)) \sin(b(h_1+h_2)) + G_3 kq \cos(b(h_1+h_2)) \sin(kq(h_1+h_2)), \\
a_{67} &= -G_3 kq \cos(b(h_1+h_2)) \cos(kq(h_1+h_2)) - bG_3 \sin(b(h_1+h_2)) \sin(kq(h_1+h_2)), \\
a_{76} &= \cos(kqh), \quad a_{77} = \sin(kqh), \quad a_{78} = -e^{-kqh} \cos(bh), \\
a_{86} &= -bG_3 \cos(kqh) \sin(bh) + G_3 kq \cos(bh) \sin(kqh), \\
a_{87} &= -G_3 kq \cos(bh) \cos(kqh) - bG_3 \sin(bh) \sin(kqh), \quad a_{88} = -e^{-kqh} G_4 kl.
\end{aligned}$$

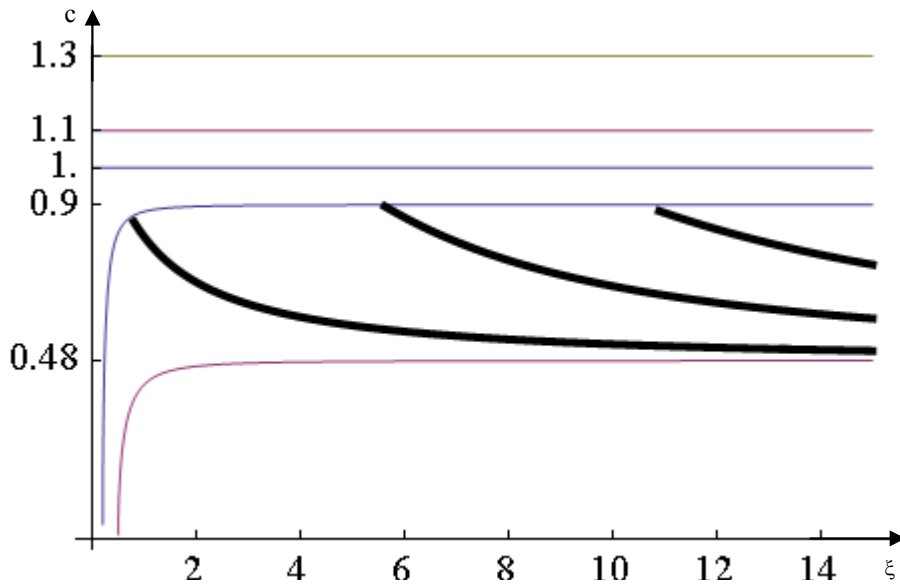
Элементы матрицы, равные нулю, здесь не приведены.

Ниже приведены дисперсионные кривые зависимостей фазовых скоростей волн Лява от приведённой толщины $\xi = kh$, где h – общая толщина слоёв.

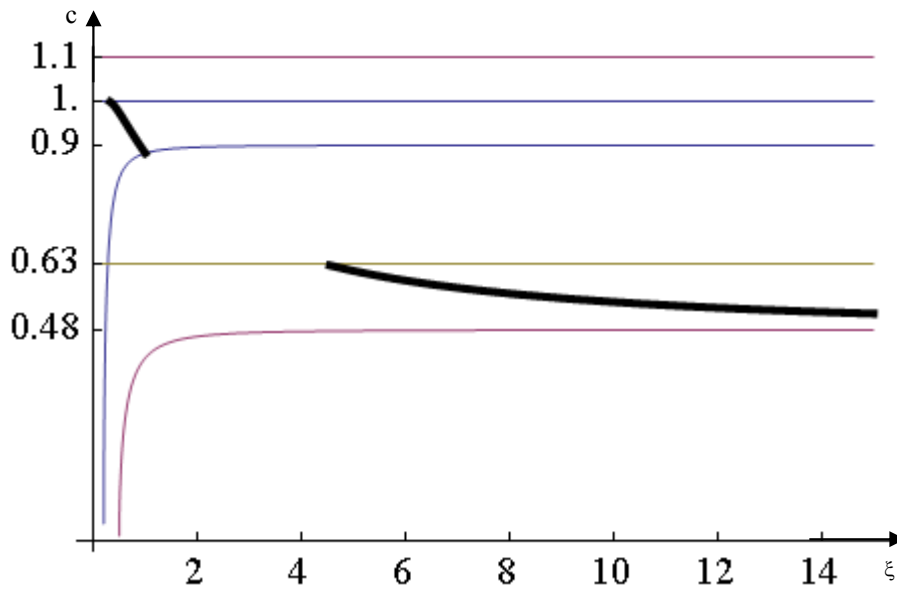
На фиг. 2, 3 и 4 жирной линией изображены дисперсионные кривые мод поверхностных волн Лява, тонкими линиями изображены скорости объёмных сдвиговых волн в разных областях нашей конструкции. При нахождении кривых мод волн Лява предполагаем, что общая толщина h остается постоянной. На фиг. 2 и 3 изображён случай, когда скорости объёмных сдвиговых волн в однородных областях больше скоростей объёмных волн в неоднородных областях. А на фиг. 4 изображён случай, когда скорость объёмных сдвиговых волн c_2 в среднем однородном слое находится в промежутке $[c_1, c_3]$. В этом случае в спектре частот волн Лява возникают зоны (одна вблизи нуля, другая приблизительно от 1.5 до 4-х, см. фиг. 4), где нет волнового процесса, т.е. появляются, так называемые, зоны умолчания или запретные зоны.



Фиг.2. Зависимость фазовой скорости от приведённого волнового числа при $a = 0.5$, $b = 0.2$, $h_1 = 0.25$, $h_2 = 0.75$, $h = 1$, $G_0 = 5.1$, $G_1 = 8.45$, $G_2 = 4.9$, $G_3 = 5.4$, $G_4 = 5.8$, $C_0 = 1.0$, $C_4 = 1.10$, $C_1 = 0.48$, $C_2 = 1.3$, $C_3 = 0.9$.



Фиг.3. Зависимость фазовой скорости от приведённого волнового числа при $a = 0.5$, $b = 0.2$, $h_1 = 0.4$, $h_2 = 0.6$, $h = 1.0$, $G_0 = 5.1$, $G_1 = 8.45$, $G_2 = 4.9$, $G_3 = 5.4$, $G_4 = 5.8$, $C_0 = 1.0$, $C_4 = 1.1$, $C_1 = 0.48$, $C_2 = 1.3$, $C_3 = 0.9$.



Фиг. 4. Зависимость фазовой скорости от приведённого волнового числа при $a = 0.5$, $b = 0.2$, $h_1 = 0.4$, $h_2 = 0.8$, $h = 1.0$, $G_0 = 5.1$, $G_1 = 3.45$, $G_2 = 4.9$, $G_3 = 8.4$, $G_4 = 5.8$, $C_0 = 1.0$, $C_4 = 1.1$, $C_1 = 0.48$, $C_2 = 0.63$, $C_3 = 0.9$.

Ввиду многочисленности различных вариантов характеристик рассматриваемой конструкции задача требует дальнейшего исследования.

Работа выполнена в рамках базового финансирования Института механики НАН РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoneley R. Elastic Waves at the Surface of Separation of two Solids. //Proc. Roy. Soc. Series A. 1924. V.106. P.424.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
3. Ghazaryan K.B., Piliposyan D.G. Love Waves in a Structure with an Inhomogeneous Layer. // Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. №2.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович –

Д.ф.-м.н., зав.отделом Института механики НАН Армении

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович –

К. ф.-м.н., ст.науч.сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

E-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Левонович –

К. ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: РА,0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

E-mail: mechins@sci.am, ssahakyan@ysu.am

Даноян Нерсес Завенович –

мл. науч. сотр. Института механики НАН Армении

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

E-mail: mechins@sci.am.

Поступила в редакцию 05.12.2013