

УДК 539.3

**ОБ УЛУЧШЕНИИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЕСОМОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА
КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ**

Торосян В.С.

Ключевые слова: совокупность нерегулярных бесконечных систем, улучшение сходимости рядов, численный эксперимент.

Key words: set of non-regular infinite systems, numerical experiment.

Թորոսյան Վ.Ս.

Վերջավոր երկարությամբ կշիռ ունեցող հոծ առավազական գլանի կոնտակտային խնդրի թվային լուծման զուգամիտության արագացումը

Աշխատանքում, հիմնվելով ոչ ռեգուլյար գծային հանրաշվական անվերջ հավասարումների համախմբի լուծումների ասիմպտոտիկայի վրա, գտնվել է մոտեցում, որը հնարավորություն է տալիս էապես կրճատել կարճեցված հավասարումների քանակը, որի լուծումների միջոցով հաշվվում են լարումները և տեղափոխությունները, ինչպես նաև պարզել լարումների վարքը անկյունային կետին մոտենալիս:

Torosyan V.S.

On improvement of convergence of the numerical solution of the contact problem for an elastic heavy cylinder of finite length

In the paper, based on the solutions of an infinite system of non-regular linear algebraic equations, an approach is found that allows to reduce essentially the number of shortened equations through which solutions the stresses and displacements are calculated as well as to determine the behavior of the stresses when approaching to the angular point.

В работе на основе анализа решения нерегулярной бесконечной системы, образованной из трёх бесконечных систем, после установления асимптотических свойств коэффициентов, посредством которых выражаются смещения и напряжения в цилиндре, используя новый метод ускорения сходимости тригонометрических рядов Фурье, удалось существенно сократить число уравнений, удерживаемых при решении нерегулярной системы, а также установить характер напряжений при подходе к угловой точке.

В работе [1] при помощи бигармонической функции А. Лява было получено решение осесимметричной задачи для сплошного упругого цилиндра конечной длины, находящегося под действием собственного веса, когда на нижнем торце цилиндра отсутствуют перемещения, а на другом торце и на боковой поверхности отсутствуют напряжения. После удовлетворения граничным условиям, решение задачи сведено к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, образованной из трёх нерегулярных бесконечных систем. И, как результат, при вычислении смещений и напряжений на торцевых поверхностях цилиндра мы сталкиваемся с плохой сходимостью рядов Фурье-Дини. Очевидно, что традиционные способы улучшения сходимости этих рядов [2] в этом случае не применимы. И, следовательно, основой для эффективного вычисления этих рядов

может служить лишь анализ решений трёх нерегулярных бесконечных систем, т.е. установление асимптотических свойств неизвестных бесконечных систем, посредством которых выражаются смещения и напряжения.

В предлагаемой работе, основываясь на характер убывания коэффициентов рядов, посредством которых выражаются напряжения в цилиндре, предложен способ улучшения сходимости этих рядов.

1. Рассмотрим вначале выражение для нормального напряжения $\sigma_z(Ra, 0)$ на нижнем торце цилиндра. Имеем [1]

$$\sigma_z(Ra, 0) = -1 + (1 - \nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k Ra)}{J_0(\mu_k R)} q_1(k) \quad (0 \leq a < 1) \quad (1.1)$$

Учитывая, что $a > 0$ и используя асимптотическое выражение для функций Бесселя вещественного аргумента и корней уравнения $J_1(\lambda) = 0$ [3], представление (1.1) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_z(Ra, 0) = & -1 + (1 - \nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{a}} \cos\left(k\pi a - \frac{\pi}{4}(1-a)\right) q_1(k) + \\ & + (1 - \nu) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J_0(\mu_k Ra)}{J_0(\mu_k R)} - \frac{(-1)^k}{\sqrt{a}} \cos\left(k\pi a - \frac{\pi}{4}(1-a)\right) \right] q_1(k) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Анализ численных результатов, проведённых в [1], показывает, что

$$q_1(k) \approx O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (1.3)$$

Учитывая последнее и используя значения сумм рядов [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin ny}{n} = \frac{y}{2} \quad (-\pi < y < \pi) \quad (1.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos ny}{n} = \ln\left(2 \cos \frac{y}{2}\right) \quad (-\pi < y < \pi), \quad (1.5)$$

выражение для $\sigma_z(Ra, 0)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z(Ra, 0) \approx & -1 + (1 - \nu) \sum_{k=1}^n \left[\frac{J_0(\mu_k Ra)}{J_0(\mu_k R)} - \frac{(-1)^k}{\sqrt{a}} \cos\left(k\pi a - \frac{\pi}{4}(1-a)\right) \right] q_1(k) + \\ & + A \frac{(1 - \nu)}{\sqrt{a}} \left[-\cos \frac{\pi(1-a)}{4} \ln\left(2 \cos \frac{\pi a}{2}\right) + \frac{\pi a}{2} \sin \frac{\pi(1-a)}{4} \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Постоянную A , входящую в выражение (1.6) и корректирующую связь (1.3), можно найти различными способами. Здесь использован следующий подход. Из совокупности урезанных бесконечных систем определяются коэффициенты $q_1(k)$.

Далее, вычисляя напряжение $\sigma_z(Ra, 0)$ по формуле (1.1) и по формуле (1.6), содержащей неизвестную постоянную A , и приравняв их в двух точках $a = 0.02$ и $a = 0.98$, найдём два значения A_1 и A_2 , среднее арифметическое которых и принимается значением для постоянной A в формуле (1.6).

Из (1.6) непосредственно замечаем, что при подходе к угловой точке $a = 1$ нормальное напряжение обладает логарифмической особенностью.

Рассмотрим теперь выражение $\tau_{rz}(Ra, 0)$. Легко убедиться в том, что при вычислении касательного напряжения на нижнем закреплённом торце цилиндра плохая сходимость обусловлена наличием в выражении $\tau_{rz}(Ra, 0)$ ряда по функциям Бесселя [1], который обозначим через $\tilde{\tau}_{rz}(Ra, 0)$

$$\tilde{\tau}_{rz}(Ra, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\mu_k Ra) q_2(k) \quad (0 \leq a < 1). \quad (1.7)$$

Учитывая, что $a > 0$ и используя асимптотическое выражение для функций Бесселя вещественного аргумента, получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{rz}(Ra, 0) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(J_1(\mu_k a) - \frac{\sqrt{8} \cos \left[ka\pi - \frac{\pi}{4}(3-a) \right]}{\pi \sqrt{a} \sqrt{4k+1}} \right) q_2(k) + \\ & + \frac{\sqrt{8}}{\pi \sqrt{a}} \cos \frac{\pi(3-a)}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_2(k)}{\sqrt{4k+1}} \cos(ka\pi) + \\ & + \frac{\sqrt{8}}{\pi \sqrt{a}} \sin \frac{\pi(3-a)}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_2(k)}{\sqrt{4k+1}} \sin(ka\pi). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из численных результатов [1] следует, что

$$\frac{q_2(k)}{\sqrt{4k+1}} \approx O\left(\frac{(-1)^k}{k^{3/5}}\right). \quad (1.9)$$

Введя обозначения для сумм рядов, которые можно выразить также через полилогарифмическую функцию,

$$S_0(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{3/5}} \sin n\pi y, \quad (1.10)$$

$$S_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{3/5}} \cos n\pi y, \quad (1.11)$$

составляющую $\tilde{\tau}_{rz}(Ra, 0)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{rz}(Ra, 0) \approx \sum_{k=1}^n \left[J_1(\mu_k Ra) - \frac{\sqrt{8}}{\pi\sqrt{a}\sqrt{4k+1}} \cos\left(ka\pi - \frac{\pi(3-a)}{4}\right) \right] q_2(k) + \\ + B \frac{\sqrt{8}}{\pi\sqrt{a}} \cos \frac{\pi(3-a)}{4} S_1(a) + B \frac{\sqrt{8}}{\pi\sqrt{a}} \sin \frac{\pi(3-a)}{4} S_0(a), \end{aligned} \quad (1.12)$$

откуда можно сделать вывод о существовании разрыва для касательного напряжения $\tau_{rz}(Ra, 0)$ в угловой точке. Входящая в выражение (1.12) постоянная B определяется аналогично предыдущему случаю.

Рассмотрим теперь выражение $2Gu_r(R, za)$, которое, согласно [1], представляется тригонометрическим рядом Фурье

$$2Gu_r(R, za) = (1-\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi a) q_3(k) \quad (0 \leq a \leq 1). \quad (1.13)$$

Предполагается, что $\frac{\partial u_r(R, z)}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 u_r(R, z)}{\partial z^2}$ имеют скачки в угловой точке.

Улучшение сходимости этого ряда проводится на основе метода, который изложен в работе [5].

2. В численном примере решаются укороченные бесконечные системы из 750, 150 и 96 уравнений [1]. Используя значения найденных из бесконечной системы неизвестных коэффициентов, построены графики для контактного давления $\sigma_z(r, 0)/\rho gl$, касательного напряжения $\tau_{rz}(r, 0)/\rho gl$ и осевого перемещения $2Gu_{rz}(R, z)/\rho gl^2$, когда:

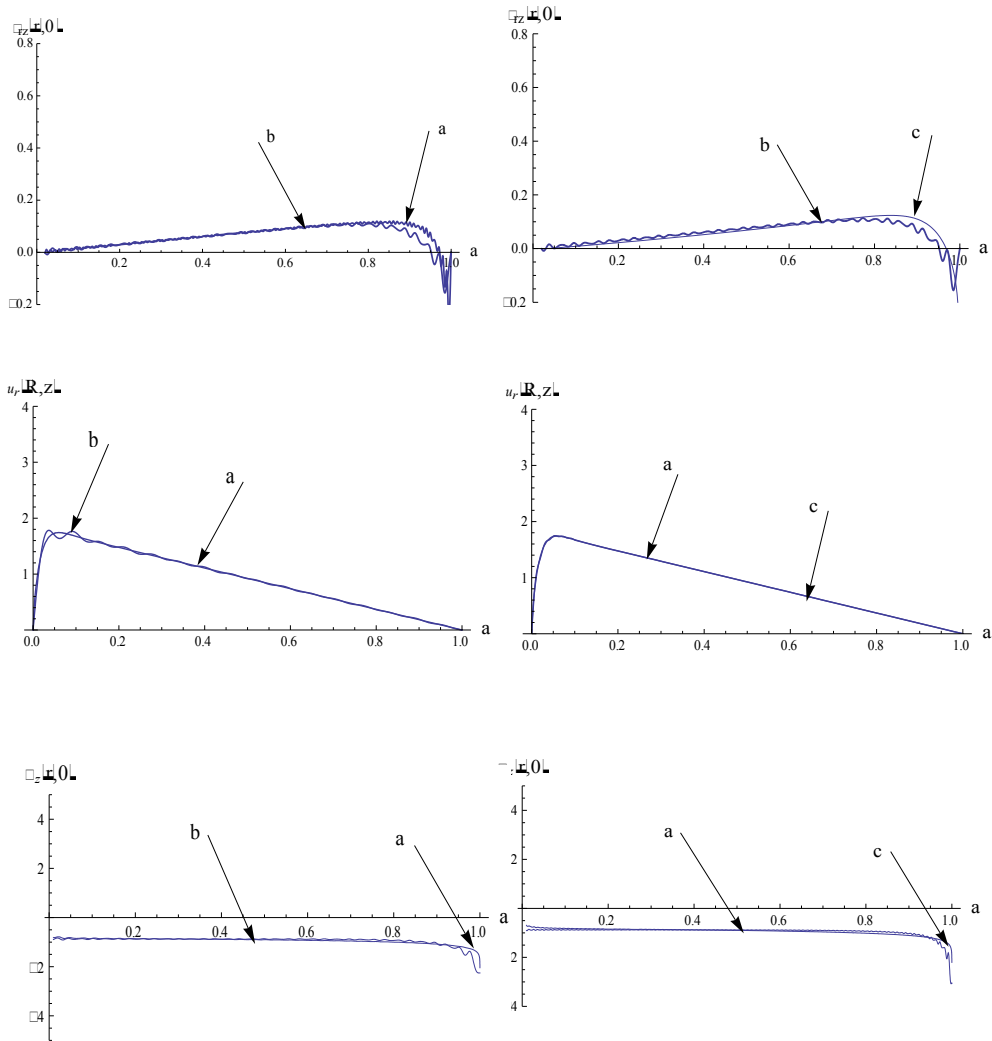
а) коэффициенты, входящие в эти ряды, определяются посредством решений из укороченной бесконечной системы из 750 уравнений [1];

б) коэффициенты, входящие в эти ряды, определяются посредством решений из укороченной бесконечной системы из 150 и 96 (для вычисления осевого перемещения) уравнений;

с) коэффициенты, входящие в эти ряды, определяются посредством решений из укороченной бесконечной системы из 150 и 96 (для вычисления осевого перемещения) уравнений с применением предлагаемых способов улучшения сходимости этих рядов.

Следует отметить, что, как и в работе [1], число коэффициентов, посредством которых при помощи соответствующих рядов вычисляются напряжения и перемещения, равно $\frac{n}{3}$.

Для наглядного представления эффективности предлагаемых способов улучшения сходимости рядов для $\sigma_z(r, 0)/\rho gl$, $\tau_{rz}(r, 0)/\rho gl$, $2Gu_{rz}(R, z)/\rho gl^2$, графики, соответствующие разным случаям численного эксперимента, на фиг.1 приведены попарно.



Фиг.1. $\nu = 0.3$, $\beta = 16$

Заключение. На основе численных результатов решения бесконечной системы, после установления асимптотических свойств коэффициентов, посредством которых выражаются смещения и напряжения в цилиндре, используя при этом значения сумм некоторых бесконечных рядов, можно значительно улучшить их сходимость. Даже, урезав из нерегулярной бесконечной системы относительно небольшое количество уравнений, удаётся проводить эффективные вычисления для $\sigma_z(r, 0)$, $\tau_{rz}(r, 0)$ и $u_z(R, z)$, а также установить характер особенностей напряжений при подходе к угловой точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Торосян В.С. Численно-аналитическое решение контактной задачи для весомого упругого цилиндра конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 1. С.14-22.
2. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264с.
3. Грей Э., Метьюз Г.В. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во Иностран.Литер., 1953. 371с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100с.
5. Нерсисян А.Б. Квазиполиномы типа Бернулли и ускорение сходимости рядов Фурье кусочно-гладких функций. //Докл. НАН Армении. 2004. Т.104. №4. С.273-279.

Сведения об авторе:

Торосян Вардан Степаевич – научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: Республика Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (095)36 20 06; **E-mail:** mechins@sci.am

Поступила в редакцию 25.11.2013