

УДК 539.1

**ПРОНИКАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В УПРУГУЮ ИЗОТРОПНУЮ
ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ЧАСТЬ ГРАНИЦЫ КОТОРОЙ ИМЕЕТ ДВИЖУЩУЮСЯ
ЖЁСТКУЮ ОПОРУ**

Давтян А.В.

Ключевые слова: интегральные преобразования, свёртка, движущиеся трещины, смешанные граничные задачи.

Key words: integral transforms, convolution, moving cracks, mixed boundary value problems.

Դավթյան Ա.Վ.

Հարվածային ալիքի ներթափանցումը եզրի մի մասում փոփոխական արագությամբ շարժվող կոշտ հիմք ունեցող իզոտրոպ առաձգական կիսահարթություն

Դիտարկվում է հարվածային ալիքի՝ առաձգական իզոտրոպ կիսահարթություն թափանցման հարթ խնդիրը, որի մի մասն ունի կոշտ հիմք: Հիմքի եզրը շարժվում է փոփոխական արագությամբ: Խնդիրը լուծված է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների և փաթույթների մեթոդով: Լուծված են կիսատարածության եզրով տարածվող հարվածային ալիքի վերաբերյալ մասնակի խնդիրներ: Որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները և լարումը կոնտակտի գծի վրա:

Davtyan A.V.

Penetration shock wave in elastic isotropic half-plane, boundary of which has the rigid support moving with arbitrary velocity

In present paper is considered the problem of penetration of the pressure in an isotropic elastic half-plane, boundary of which has the rigid support moving with arbitrary velocity. Solution of the plane problem is sought by method of integral transforms Laplace, Fourier and by method of the convolutions. Partial problems about a shock wave propagating along the boundary half-plane are solved. The stress intensity factors, stress on the line of contact is calculated.

Задача о распространении давления, заданного на границе, в глубь упругого или жидкого полупространства, изучалась в [1,2,3]. Решения краевых задач для анизотропной среды методом Смирнова-Соболева даны в [4], а методом интегральных преобразований – в [5,6]. Применение методов Смирнова-Соболева и интегральных преобразований к задачам динамической упругости дано в [7,8,9].

В настоящей работе рассматривается задача проникания давления в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жёсткую опору, а край опоры движется с переменной скоростью. Решение плоской задачи находится методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье и методом свёрток [10,12,14]. Решаются частные задачи об ударной волне, распространяющейся по границе полуплоскости. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений и напряжения на линии контакта.

§1. Возникновение фронта давления на жёсткой опоре

Рассматривается задача проникания давления в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жёсткую опору и опора движется с переменной скоростью $\dot{\ell}(t)$, где $\ell(t)$ – закон движения края опоры. Опора занимает часть границы $x < \ell(t)$. В момент $t = 0$ имеем $u(0, x) = 0$ при $x < \ell(0)$ и $\sigma_{xy}(0, x) = -P \cdot H(\xi - x)$ при $x > \ell(0)$, где $\xi < 0$ и $H(x)$ есть единичная функция Хевисайда.

Уравнения движения для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где a, b – скорости продольных и поперечных упругих волн.

Граничные условия при $y = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= \rho b^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \sigma^+ = -P_1 H(Vt + \xi - x) \quad \text{при } x > \ell(t), \\
u(t, x) &= u^-(t, x) = 0 \quad \text{при } x < \ell(t), \\
\sigma_{yy} &= \rho \left((a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{при } |x| < \infty,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где ρ – плотность среды, V есть скорость ударной волны, $P = \text{const}$, $V = \text{const}$,

$V > a$. При $t = 0$ имеем нулевые начальные условия $u = v = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Значения $\sigma_{xy} = \sigma^-(t, x)$ при $x < \ell(t)$ и $u = u^+(t, x)$ при $x > \ell(t)$ неизвестны.

Уравнения (1.1) и (1.2) будем решать с помощью преобразования Лапласа по времени t и преобразования Фурье по координате x (преобразование LF) и решение ищем в виде:

$$u = \frac{1}{4\pi^2 i} \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} u_n^{LF}(s, q) \exp(st - i\bar{\beta}_n y - iqx) ds dq, \tag{1.3}$$

$$v = \frac{1}{4\pi^2 i} \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} v_n^{LF}(s, q) \exp(st - i\bar{\beta}_n y - iqx) ds dq,$$

$$\bar{\beta}_1(s, q) = i\sqrt{\frac{s^2}{a^2} + q^2}, \quad \bar{\beta}_2(s, q) = i\sqrt{\frac{s^2}{b^2} + q^2}.$$

Тогда изображения функций $\sigma_{xy}(t, x)$, $u(t, x)$ (обозначим через σ_{xy}^{LF} , u^{LF}) связаны соотношениями:

$$u^{LF}(s, q) = S^{LF}(s, q) \sigma_{xy}^{LF}(s, q), \tag{1.4}$$

$$S^{LF}(s, q) = -\frac{s^2 \sqrt{\frac{s^2}{b^2} + q^2}}{\rho b^4 R(s, q)}, \quad R(s, q) = \left(\frac{s^2}{b^2} + 2q^2 \right)^2 - 4q^2 \sqrt{\frac{s^2}{a^2} + q^2} \sqrt{\frac{s^2}{b^2} + q^2}$$

Здесь $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа, $\sigma_0 > 0$ и мало, $R(s, q)$ есть функция Рэлея. Стандартным путём можно провести факторизацию, т.е. представить $S^{LF}(s, q) = S_+^{LF}(s, q) S_-^{LF}(s, q)$, причём вид сомножителей $S_{\pm}^{LF}(s, q)$ зависит от диапазона, которому принадлежит скорость распространения трещины $\dot{\ell}(t)$. Аналитическая функция $S^{LF}(s, q)$ имеет следующие особые точки: $q = \pm is/a$,

$q = \pm is / b$ (точки ветвления) и $q = \pm is / c_R$ (простые полюса), где c_R – величина скорости волны Рэлея. Следуя [11] обычным путём, можно получить

$$S_+^{LF}(s, q) = \frac{\sqrt{\frac{s}{b} - iq}}{\frac{s}{c_R} - iq} D_+ \left(\frac{iq}{s} \right), \quad S_-^{LF} = - \frac{1}{2\rho b^4 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)} \frac{\sqrt{\frac{s}{b} + iq}}{\frac{s}{c_R} + iq} D_- \left(\frac{iq}{s} \right), \quad (1.5)$$

$$D_{\pm} \left(\frac{iq}{s} \right) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta \mp \frac{iq}{s}} d\zeta \right), \quad \varphi(\zeta) = \arctg \left[\frac{4\zeta^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{a^2}}}{\left(\frac{1}{b^2} - 2\zeta^2 \right)^2} \right]$$

Для облегчения дальнейших вычислений представим $D_{\pm} \left(\frac{iq}{s} \right)$ в некоторой иной форме [10,12]:

$$D_{\pm} \left(\frac{iq}{s} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_1(u) \frac{du}{u \mp \frac{iq}{s}}, \quad D_{\pm}^{-1} \left(\frac{iq}{s} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_2(u) \frac{du}{u \mp \frac{iq}{s}}, \quad (1.6)$$

$$F_1(u) = \gamma(u) \exp[\chi(u)], \quad F_2(u) = -\gamma(u) \exp[-\chi(u)],$$

$$\gamma(u) = \frac{\frac{4}{\pi} u^2 \sqrt{u^2 - \frac{1}{a^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - 2u^2 \right)^4 + 16u^4 \left(\frac{1}{b^2} - u^2 \right) \left(u^2 - \frac{1}{a^2} \right)}}, \quad \chi(u) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - u}.$$

Введём функции $P_{\pm}^{LFF} = 1 / S_{\pm}^{LFF}$. Обозначим через $S_{\pm}(t, x), P_{\pm}(t, x)$ оригиналы, соответственно, $S_{\pm}^{LF}(s, q), P_{\pm}^{LF}(s, q)$ и вычисляя их аналогично [10,12], получим

$$S_+(t, x) = \frac{H(x)}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[1 - \frac{\sqrt{\frac{1}{c_R} - \frac{1}{b}}}{\sqrt{\frac{1}{c_R} - \frac{t}{x}}} BH \left(\frac{1}{c_R} - \frac{t}{x} \right) \right] H \left(\frac{t}{x} - \frac{1}{b} \right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{x}} \frac{F_1(u) \sqrt{\frac{1}{b} - u} H \left(\frac{1}{b} - \frac{t}{x} \right)}{\left(\frac{1}{c_R} - u \right) \sqrt{\frac{t}{x} - u}} du H \left(\frac{t}{x} - \frac{1}{a} \right) \right\}, \quad (1.7)$$

$$P_+(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{c_R} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \left[D_+^{-1} \left(\frac{1}{b} \right) \delta \left(t - \frac{x}{b} \right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_3(h) \delta(t - hx) dh \right] \right\}, \quad (1.8)$$

$$F_3(h) = \int_{\frac{1}{a}}^h \frac{d}{du} \left(\frac{F_2(u)}{\sqrt{\frac{1}{b}-u}} \right) \frac{du}{\sqrt{h-u}}, \quad D_+^{-1} \left(\frac{1}{b} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_2(u) du}{u - \frac{1}{b}}, \quad B = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_1(u) du}{u - \frac{1}{c_R}},$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака, $F_1(u), F_2(u)$ даются формулой (1.6). Функции $S_-(t, x), P_-(t, x)$ получаются из (1.7) и (1.8) заменой x на $-x$ и умножением на постоянные соответственно $(-2\rho b^4 (b^{-2} - a^{-2}))^{-1}$ и $-2\rho b^4 (b^{-2} - a^{-2})$.

Представим функции $u^{LF}(s, q), \sigma_{xy}^{LF}(s, q)$ в виде

$$u^{LF} = u_+^{LF} + u_-^{LF}, \quad \sigma^{LF} = \sigma_+^{LF} + \sigma_-^{LF}, \quad (1.9)$$

где u_+^{LF}, σ_-^{LF} – неизвестные функции, u_-^{LF}, σ_+^{LF} есть изображения оригиналов $u_-(t, x), \sigma_+(t, x)$. Кроме того, нетрудно заметить, что функция $S^{LF}(s, q)$ такова, что указанная факторизация приводит к функциям $S_{\pm}^{LF}(s, q), P_{\pm}^{LF}(s, q)$, оригиналы которых удовлетворяют условиям:

$$S_-(t, x) = P_-(t, x) = 0 \quad \text{при } x > -c_R t, \quad (1.10)$$

$$S_+(t, x) = P_+(t, x) = 0 \quad \text{при } x < c_R t, \quad -c_R < \dot{\ell}(t) < c_R,$$

где $\dot{\ell}(t)$ – гладкая функция.

Подставляя (1.9) в (1.4) и учитывая (1.10), можно, как и в [10,12], получить решения поставленной задачи в форме свёрток по x, t :

$$\sigma_-(t, x) = -P_- ** [(S_- ** \sigma_+ - P_+ ** u_-) H(\ell - x + 0)]; \quad (1.11)$$

$$u_+(t, x) = S_+ ** [(S_- ** \sigma_+ - P_+ ** u_-) H(x - \ell + 0)].$$

Здесь символы $**$ означают свёртку по t, x .

Подставляя (1.7), (1.8) и значение σ_+ из (1.2) в (1.11) и учитывая, что по условию задачи $u_- = 0$, на оси x получим:

$$\sigma_-(t, x) = -P_- ** [(S_- ** \sigma_+) H(\ell - x + 0)];$$

$$u_+(t, x) = S_+ ** [(S_- ** \sigma_+) H(x - \ell + 0)]. \quad (1.12)$$

Используя формулы (1.12), (1.8) и (1.2), вычислим свёртку $S_- ** \sigma_+$, которая записывается в виде

$$S_- ** \sigma_+ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t S_-(t', x') \sigma_+(t - t', x - x') dt' dx'. \quad (1.13)$$

Вычисление интеграла (1.13) с учётом (1.2) даёт

$$S_- ** \sigma_+ = \frac{P_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t - \frac{x - \xi}{V}} \text{H} \left(t - \frac{x - \xi}{V} \right), \quad (1.14)$$

$$P_0 = \frac{-PB_1C_0}{\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{V}}}, \quad B_1 = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{V}}{\frac{1}{c_R} + \frac{1}{V}} D_- \left(\frac{1}{V} \right), \quad C_0 = \frac{-1}{2\rho b^4 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)}$$

Подставляя (1.14) и значение $P_-(t, x)$ из (1.8) в (1.12), получаем:

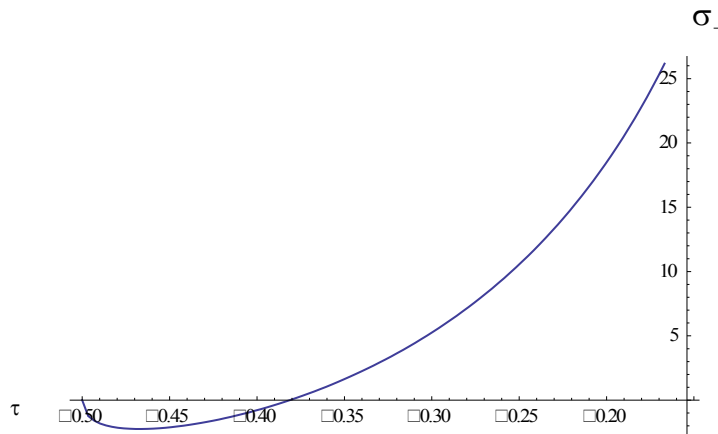
$$\sigma_-(t, x) = \frac{PB_1}{\pi} \left[D_+^{-1} \left(\frac{1}{b} \right) N \left(x, t, \xi, \frac{1}{b} \right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_3(h) N(x, t, \xi, h) dh \right], \quad (1.15)$$

$$N(x, t, \xi, h) = \frac{1 + \frac{1}{c_R} \dot{\ell}}{1 + h\dot{\ell}} \theta \left(\frac{1}{b} \right) H \left(T_0 - \frac{1}{V} \right) + \frac{\left(\frac{1}{c_R} + \frac{1}{V} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \theta(h) H \left(T_0 - \frac{1}{V} \right) \right)}{\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{V}} \sqrt{h + \frac{1}{V}}},$$

$$\theta(h) = \sqrt{\frac{(\ell_0 - \xi) \left(T_0 - \frac{1}{V} \right)}{(\ell_0 - x) \left(h + \frac{1}{V} \right)}}, \quad T_0 = \frac{t_0}{\ell_0 - \xi}, \quad \ell_0 = \ell(t_0), \quad \ell(t_0) - x - \frac{t - t_0}{h} = 0.$$

Аналогичным путём можно получить значение функции $u^+(t, x)$ при $x > \ell(t)$.

Сделаны расчёты по (1.15) для неподвижного случая, т.е. при $\ell(t) \equiv 0$, для следующих значений параметров $a/b = 2$, $a/V = 0.5$, $P = 100$ и построен график функции σ_- в зависимости от $\tau = \frac{x}{a(t + \xi V^{-1})}$ (фиг.1).



Фиг.1

Как видно, на участке $-\frac{1}{2} < \tau < -0.38$ имеет место растяжение, а при $-0.38 < \tau < 0$ имеет место сжатие.

Учитывая, что при $x \rightarrow \ell(t)$ и $t_0 \rightarrow t$ имеем $\frac{\ell(t) - x}{\ell(t_0) - x} \rightarrow 1 + h\dot{\ell}(t)$, можно из (1.15) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x \rightarrow \ell-0} \sigma^- \sqrt{2\pi(\ell - x)} = \frac{\sqrt{2}PB_1B_2 \left(1 + \frac{\dot{\ell}}{c_R}\right)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{V}}} \sqrt{T - \frac{1}{V}} \sqrt{\ell - \xi} H\left(T - \frac{1}{V}\right), \quad (1.16)$$

$$B_2 = \frac{D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{b}\dot{\ell}}} + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_3(h)}{\sqrt{1 + h\dot{\ell}}} dh, \quad T = \frac{t}{\ell - \xi}, \quad \ell = \ell(t), \quad \dot{\ell} = \dot{\ell}(t).$$

Подставляя из (1.8) значение функции $F_3(h)$ в (1.16) и изменив порядок интегрирования в двукратном интеграле, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow \ell-0} \sigma^- \sqrt{2\pi(\ell - x)} = \frac{PB_1\sqrt{2}(1 + c_R^{-1}\dot{\ell})K(\dot{\ell})}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{V}} \sqrt{1 + \frac{1}{b}\dot{\ell}}} \sqrt{T - \frac{1}{V}} \sqrt{\ell - \xi} H\left(T - \frac{1}{V}\right), \quad (1.17)$$

$$K(\dot{\ell}) = \left\{ 1 + \dot{\ell} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_2(u)}{1 + u\dot{\ell}} du \right\}.$$

§2. Взрыв на границе полуплоскости вне опоры.

В случае, когда взрыв производится при $x = \xi$, $\xi > 0$ вне опоры в момент $t = 0$ и край опоры движется со скоростью $\dot{\ell}(t)$, граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_+ = -PH(Vt - x + \xi)H(Vt + x - \xi) \quad \text{при } x > \ell(t) \\ u(t, x) &= u^-(t, x) = 0 \quad \text{при } x < \ell(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{yy} = \rho \left((a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{при } |x| < \infty.$$

Подставляя значение $S_-(t, x)$ из (1.7) и σ_+ из (2.1) в (1.13), получаем

$$S_- ** \sigma_+ = \frac{PC_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ P \sqrt{t - \frac{x - \xi}{V}} H\left(t - \frac{\xi - x}{b}\right) H\left(t - \frac{x - \xi}{V}\right) + \right. \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
& +P_2\sqrt{t+\frac{x-\xi}{V}}H\left(\frac{\xi-x}{b}-t\right)H\left(t+\frac{x-\xi}{V}\right)+ \\
& +P_3\sqrt{\frac{\xi-x}{c_R}-t}H\left(t-\frac{\xi-x}{b}\right)H\left(\frac{\xi-x}{c_R}-t\right)+ \\
& +P_4\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{t}{\xi-x}}\frac{\psi(u)\sqrt{t+u(x-\xi)}}{(c_R^{-1}-u)}duH\left(\frac{\xi-x}{b}-t\right)H\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\Big\}, \\
\psi(u) & =\frac{F_1(u)\sqrt{\frac{1}{b}-u}}{\frac{1}{V^2}-u^2}, P_1=\frac{2\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{V}}}{\frac{1}{c_R}+\frac{1}{V}}D_-\left(\frac{1}{V}\right), P_2=\frac{2\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{V}}}{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{V}}D_+\left(\frac{1}{V}\right), \\
P_3 & =\frac{-4B\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{b}}}{\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{V^2}}, P_4=\frac{4}{V}, D_{\pm}\left(\frac{1}{V}\right)=1+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)}{u\mp\frac{1}{V}}du, B=1+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)}{u-\frac{1}{c_R}}du.
\end{aligned}$$

Произведя выкладки аналогично [10], из (1.12), (2.2) можно получить:

$$\sigma^-(t, x) = \frac{P}{\pi} \left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) M\left(t, x, \xi, \frac{1}{b}\right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_3(h) M(t, x, \xi, h) dh \right], \quad (2.3)$$

$$M(t, x, \xi, h) = M_0(t, x, \xi, h) + M_+(t, x, \xi, h) + M_-(t, x, \xi, h) + M_1(t, x, \xi, h),$$

$$\begin{aligned}
M_0(t, x, \xi, h) & =\frac{1+c_R^{-1}\ell(t_0)}{1+h\ell(t_0)}\left\{P_1\sqrt{t_0-\frac{\ell_0-\xi}{V}}H\left(t_0-\frac{\xi-\ell_0}{b}\right)H\left(t_0-\frac{\ell_0-\xi}{V}\right)+\right. \\
& +P_2\sqrt{t_0+\frac{\ell_0-\xi}{V}}H\left(\frac{1}{b}-T_0\right)H\left(T_0-\frac{1}{V}\right)+P_3\sqrt{\frac{\xi-\ell_0}{c_R}-t_0}H\left(\frac{\xi-\ell_0}{c_R}-t_0\right)H\left(t_0-\frac{\xi-\ell_0}{b}\right)+ \\
& \left.+P_4\int_{\frac{1}{a}}^{T_0}\frac{\psi(u)\sqrt{t_0+u(\ell_0-\xi)}}{\left(\frac{1}{c_R}-u\right)}duH\left(\frac{\xi-\ell_0}{b}-t_0\right)H\left(t_0+\frac{\ell_0-\xi}{a}\right)\right\}\frac{H(\ell_0-x)}{\sqrt{\ell_0-x}},
\end{aligned}$$

$$M_{\pm}(t, x, \xi, h) = \frac{P_1(c_R^{-1} \pm V^{-1})}{\sqrt{h \pm V^{-1}}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \theta\left(\pm \frac{1}{V}\right) H\left(t_0 \pm \frac{\xi - \ell_0}{V}\right) \right\} \Phi_{\pm},$$

$$M_1(t, x, \xi, h) = P_4 \left\{ \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{a}}^T \frac{\psi(u)}{\sqrt{h-u}} du - \int_{\frac{1}{a}}^{T_0} \frac{\psi(u)\theta(-u)}{\sqrt{h-u}} du H\left(T_0 - \frac{1}{a}\right) \right\} \Phi_1,$$

$$\theta(u) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(T_0 + u)(\xi - \ell_0)}{(h + u)(\ell_0 - x)}}, \quad \ell(t_0) - x - \frac{t - t_0}{h} = 0, \quad \ell_0 = \ell(t_0),$$

$$\Phi_+ = H\left(t - \frac{x - \xi}{V}\right) H\left(t - \frac{\xi - x}{b}\right) H(\ell_0 - x), \quad \Phi_- = H\left(T - \frac{1}{V}\right) H\left(\frac{1}{b} - T\right) H(\ell_0 - x),$$

$$\Phi_1 = H\left(T - \frac{1}{a}\right) H\left(\frac{1}{b} - T\right) H(\ell_0 - x), \quad T_0 = \frac{t_0}{\xi - \ell_0}, \quad T = \frac{t}{\xi - x}.$$

Учитывая значение функции $F_3(h)$ из (1.8), для коэффициента интенсивности напряжений будем иметь:

$$\lim_{x \rightarrow \ell - 0} \sigma^- \sqrt{2\pi(\ell - x)} = P \sqrt{\frac{2}{\pi}} K(\dot{\ell}) \frac{(1 + \dot{\ell} c_R^{-1})}{\sqrt{1 + \dot{\ell} b^{-1}}} M'(t, x, \xi) H(\ell - x), \quad (2.4)$$

$$M'(t, x, \xi) = P_1 \sqrt{t - \frac{\ell - \xi}{V}} H\left(t - \frac{\xi - \ell}{b}\right) H\left(t - \frac{\ell - \xi}{V}\right) +$$

$$+ P_2 \sqrt{t + \frac{\ell - \xi}{V}} H\left(\frac{1}{b} - T_1\right) H\left(T_1 - \frac{1}{V}\right) + P_3 \sqrt{\frac{\xi - \ell}{c_R} - t} H\left(\frac{1}{c_R} - T_1\right) H\left(T_1 - \frac{1}{b}\right) +$$

$$+ P_4 \int_{\frac{1}{a}}^{T_1} \frac{\Psi(u) \sqrt{t + u(\ell - \xi)}}{(c_R^{-1} - u)} du H\left(\frac{1}{b} - T_1\right) H\left(T_1 - \frac{1}{a}\right),$$

$$K(\dot{\ell}) = \left\{ 1 + \dot{\ell} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_2(u)}{1 + u\dot{\ell}} du \right\}, \quad T_1 = \frac{t}{\xi - \ell}, \quad \ell = \ell(t), \quad \dot{\ell} = \dot{\ell}(t).$$

Из (1.17) и (2.4) видно, что при $x \rightarrow \ell(t) - 0$ имеется особенность вида $(\ell(t) - x)^{-1/2}$. В обеих задачах вычисления для σ_{xy} показывают, что около границы $x = 0$ имеет место растяжение, а дальше – сжатие.

Полученные результаты позволяют изучить напряжённое состояние грунта при наличии опоры, создаваемое ударной волной от взрыва. При $\ell(t) = 0$ эти задачи решены в работе [10] методом Винера-Хопфа, полученные решения совпадают.

Автор благодарит д.ф.-м.н., профессора А.Н.Мартirosяна за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомоян А.Я., Поручиков В.Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. М.: МГУ, 1970. 121с.
2. Огурцов К.И. Динамические задачи для полупространства в случае осевой симметрии. //Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. 1951. №149. Вып. 24. С.3–117.
3. Багдоев А.Г. Пространственные нестационарные задачи движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1961. 276с.
4. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. //ПММ. 1961. Т.25. Вып.5.

5. Norris A.N., Achenbach J.D. Elastic Wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material. // Q.J. Mech. Appl. Math. 1984. Vol. 37. Pt.4. P.565-580.
6. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы. // МТТ. 1976. №1. С.107–117.
7. Freund L.B. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. // J. Mech. Phys. Solids. V.20. 1972. I, p.129, II, p.141.
8. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т.27. №2. С.13–23.
9. Флитман Л.М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. // ПММ. 1959. Т.23. Вып.4. С.697–705.
10. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. Ереван: «Зангак-97», 2007. 244с.
11. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962. 280с.
12. Сарайкин В.А., Слепян Л.И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. // МТТ. 1979. №4.
13. Baker V.R. Dynamic stresses created by a moving crack. // Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V.29. №3.
14. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.

Сведения об авторе:

Давтян Ануш В. – преподаватель кафедры математики Горисского государственного университета

Тел.: 077071366

Е-mail: davtyananush@gmail.com

Поступила в редакцию 18.02.2014