

УДК 539.3

**О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗОК ОТ СИСТЕМЫ РАЗНОРОДНЫХ СТРИНГЕРОВ К  
УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ ИЛИ СЛОЮ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ  
ДЕФОРМАЦИИ**

**Григорян М.С.**

**Ключевые слова:** стрингер, упругое полупространство, антиплоская деформация, контактные напряжения

**Key Words:** stringer, elastic half-space, antiplane deformation, contact stresses

**Գրիգորյան Մ.Ս.**

**Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ տարասեռ ստրինգերների համակարգից առաձգական  
կիսատարածությանը կամ շերտին բեռերի փոխանցման մասին**

Գիտարկվում է հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ առաձգական կիսատարածությանը կամ տարածական շերտին կամայական վերջավոր թվով տարասեռ և համագիծ ստրինգերների համակարգից շոշափող ուժերի փոխանցման վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը:

**Grigoryan M.S.**

**On the transfer of loads from the system of dissimilar stringers to elastic half-space or layer in the antiplane deformation**

This paper in antiplane deformation considers the contact problem on the transfer of tangential forces from the system of an arbitrary finite number of dissimilar and collinear stringers to the elastic half-space or layer.

В работе при антиплоской деформации рассматривается контактная задача о передаче касательных сил от системы из произвольного конечного числа разнородных и коллинеарных стрингеров к упругому полупространству или слою.

Рассматриваются контактные задачи о передаче касательных сил от коллинеарной системы разнородных стрингеров, обладающих различными жёсткостями на растяжение или сжатие, к упругому полупространству или упругому слою при антиплоской деформации.

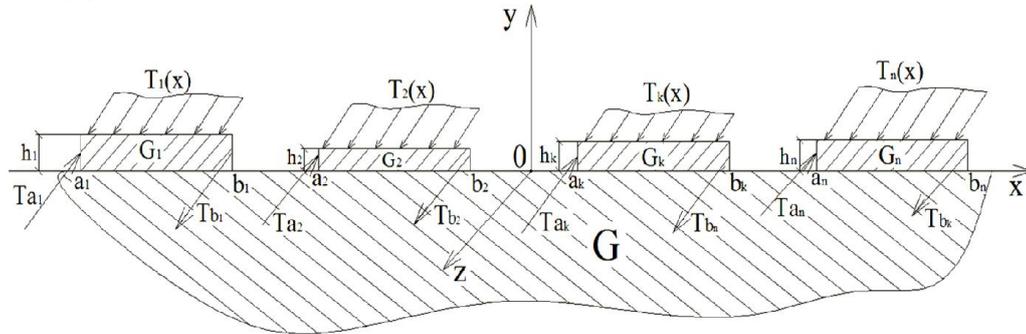
Задачи о передаче нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров (накладок) к массивным деформируемым телам ввиду их актуальности для теоретических исследований и практических приложений в инженерных расчётах стали предметом рассмотрения многих авторов. Первые исследования в этой области восходят к известной работе Мелана [1], а дальнейшее обобщение и развитие идей этой работы дано в [2-4], а также в других работах, довольно подробная библиография которых до 1976г. приведена в [5]. Укажем также на работы [6-9] и на монографию [10].

В настоящей работе рассматриваются две смешанные задачи о передаче касательных сил от коллинеарной системы из произвольного конечного числа разнородных стрингеров, обладающих различными геометрическими и упругими характеристиками, к упругому полупространству или упругому слою при антиплоской деформации. В рамках физической модели Мелана при антиплоской деформации для стрингеров [11] решения обсуждаемых задач сводятся к решениям двух отдельных сингулярных интегральных уравнений (СИУ). Для решения этих

определяющих СИУ применяется известный численно-аналитический метод решения СИУ [12-14], основанный на квадратурных формулах Гаусса для обычных и сингулярных с ядром Коши интегралов. В результате, касательные контактные напряжения под стрингерами и коэффициенты их концентрации в концевых точках стрингеров представляются явными формулами. Рассматриваются частные случаи и проводится их численный анализ.

1. Рассмотрим задачу контактного взаимодействия между упругим полупространством и системой стрингеров при антиплоской деформации. Пусть отнесённое к правой прямоугольной системе координат  $Oxyz$  полупространство  $z < 0$  обладает модулем сдвига  $G$  и на своей граничной плоскости  $z = 0$  усилено системой  $\Omega$  из произвольного конечного числа  $n$  упругих полос  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) с модулями сдвига  $G_k$  и высотами  $h_k$ , бесконечных в обе стороны по направлению оси  $Oz$  (фиг. 1), т.е. ( $a_k < b_k < a_{k+1}$ ;  $k = \overline{1, n-1}$ ,  $a_n < b_n$ ):

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n \omega_k \quad \omega_k = \{a_k \leq x \leq b_k; 0 \leq y \leq h_k; -\infty < z < \infty\}$$



Фиг. 1

Предположим, что на верхней грани  $y = h_k$  каждой полосы  $\omega_k$  в направлении оси  $Oz$  действуют равномерно распределённые по оси  $Oz$  касательные силы  $T_k(x)$ , т.е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_k} = T_k(x) \quad (a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}),$$

где  $\tau_{yz}$  – компонента касательных напряжений. Кроме того, предположим, что на граничных поверхностях  $x = a_k$  и  $x = b_k$  полосы  $\omega_k$  в направлении оси  $Oz$  действуют равномерно распределённые по этой оси касательные сосредоточенные силы  $T_{a_k}$  и  $T_{b_k}$ , соответственно.

Примем, что под действием совокупности указанных касательных сил полупространство вместе с системой упругих полос  $\Omega$  находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси  $Oz$  с базовой плоскостью  $Oxy$ . Тогда описанная задача сведётся к задаче для нижней упругой полуплоскости  $y < 0$ , усиленная на границе  $y = 0$  системой упругих накладок  $L$ , причём,

$$L = \bigcup_{k=1}^n L_k; \quad L_k = \{y=0, a_k < x < b_k\} \quad (k = \overline{1, n})$$

и верхняя грань  $y = h_k$   $k$ -ой накладки нагружена касательными силами  $T_k(x)$ .

Далее для накладок примем  $G_k \gg G$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и  $h_k \ll \min_{1 \leq k \leq n} (b_k - a_k)$  и тогда будем считать, что для стрингеров справедлива модель одномерного упругого континуума Мелана [11]. При сделанных предположениях требуется определить касательные контактные напряжения  $\tau(x)$  под системой стрингеров  $L$ , т.е. функцию

$$\tau_{yz} \Big|_{y=0} = \tau(x) \quad \left( x \in L = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \right)$$

и коэффициенты концентрации этих напряжений в концевых точках каждого стрингера.

С целью вывода определяющего СИУ поставленной задачи воспользуемся известным выражением единственной отличной от нуля компоненты смещений  $u_z(x, 0)$  граничных точек упругой полуплоскости от распределённых касательных сил интенсивности  $\tau(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) [15]:

$$u_z(x, 0) = w(x, 0) = \frac{1}{\pi G} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \ln \frac{1}{|x-s|} \tau(s) ds + \text{const} \quad (1)$$

Далее воспользуемся дифференциальным уравнением деформирования  $k$ -ого стрингера по модели Мелана при антиплоской деформации [11]

$$h_k G_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} = \tau(x) - T_k(x) \quad (a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}) \quad (2)$$

где  $w_k = w_k(x)$  – компонента смещений точек  $k$ -ого стрингера в направлении оси  $Oz$ . При этом, условие равновесия этого стрингера имеет вид:

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau(x) dx = T_{b_k} - T_{a_k} + \int_{a_k}^{b_k} T_k(x) dx \quad (k = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Интегрированием (2) легко находим ( $a_k \leq x \leq b_k; k = \overline{1, n}$ )

$$h_k G_k \frac{dw_k}{dx} = \frac{1}{2} (T_{a_k} + T_{b_k}) + \frac{1}{2} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(x-s) [\tau(s) - T_k(s)] ds \quad (4)$$

Теперь в условиях контакта упругой полуплоскости и системы стрингеров

$$w(x, 0) = w_k(x) \quad \text{или} \quad \frac{dw(x, 0)}{dx} = \frac{dw_k(x)}{dx} \quad (a_k \leq x \leq b_k; k = \overline{1, n})$$

подставим выражения  $w(x, 0)$  и  $w_k(x)$  из (1) и (4), соответственно. После простых преобразований придём к следующему определяющему СИУ контактной задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi G} \sum_{p=1}^n \int_{a_p}^{b_p} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \frac{1}{2h_k G_k} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) \tau(s) ds = \\ & = \frac{1}{2h_k G_k} \left[ T_{a_k} + T_{b_k} + \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) T_k(s) ds \right] \quad (a_k < x < b_k, k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (5)$$

Решения СИУ (5) должны удовлетворять условиям (3).

Далее в (5) и (3) введём безразмерные координаты и величины:

$$\begin{aligned} \xi &= x/a, \quad \eta = s/a, \quad \alpha_k = a_k/a, \quad \beta_k = b_k/a, \quad h_k^0 = h_k/a \quad (k = \overline{1, n}), \\ \lambda_k &= (\pi G) / (2h_k^0 G_k), \quad T_k^0 = T_{a_k} / (aG), \quad T_{\beta_k}^0 = T_{b_k} / (aG); \quad \tau_0(\xi) = \tau(a\xi) / G, \\ T_k^0(\xi) &= T_k(a\xi) / G, \end{aligned}$$

где  $a$  – координата одной из концевых точек отрезков  $[a_k, b_k]$ , отличная от нуля.

Например, при  $a_1 \neq 0$   $a = a_1$ . После несложных преобразований СИУ (5) представим в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left[ \frac{1}{\eta - \xi} + \lambda_k \text{sign}(\eta - \xi) \right] \tau_0(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{\tau_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = \\ & = \frac{\lambda_k}{\pi} \left[ T_{\alpha_k}^0 + T_{\beta_k}^0 + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \text{sign}(\eta - \xi) T_k^0(\eta) d\eta \right] \quad (\alpha_k < \xi < \beta_k; k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (6)$$

а условия (3) – в виде:

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \tau_0(\xi) d\xi = T_{\beta_k}^0 - T_{\alpha_k}^0 + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} T_k^0(\xi) d\xi \quad (k = \overline{1, n}) \quad (7)$$

Чтобы к СИУ (6)-(7) применить известный численно-аналитический метод решения СИУ [6-8], каждый отрезок  $[\alpha_k, \beta_k]$  преобразуем в отрезок  $[-1, 1]$ , полагая

$$\xi = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}, \quad \eta = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} u + \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \quad (k = \overline{1, n}; -1 \leq t, u \leq 1).$$

Тогда, СИУ (6) запишется в виде  $(-1 < t < 1, k = \overline{1, n})$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{u-t} + \lambda_k^0 \text{sign}(u-t) \right] \tau_k^0(u) du + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n R_{kp}(t, u) \tau_p^0(u) du = \frac{\lambda_k}{\pi} f_k^0(t) \quad (8)$$

$$R_{kp}(t, u) = \frac{\beta_p - \alpha_p}{(\beta_p - \alpha_p)u - (\beta_k - \alpha_k)t + \beta_p - \beta_k + \alpha_p - \alpha_k}; \quad \lambda_k^0 = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} \lambda_k,$$

$$\tau_k^0(u) = \tau_0\left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2}u + \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}\right); \quad \tilde{T}_k(u) = T_k^0\left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2}u + \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}\right),$$

$$f_k^0(t) = T_{\alpha_k}^0 + T_{\beta_k}^0 + \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} \int_{-1}^1 \text{sign}(u-t) \tilde{T}_k(u) du$$

а условия (7) – в виде:

$$\int_{-1}^1 \tau_k^0(t) dt = Q_k, \quad Q_k = \frac{2}{\beta_k - \alpha_k} (T_{\beta_k}^0 - T_{\alpha_k}^0) + \int_{-1}^1 \tilde{T}_k(t) dt \quad (k = \overline{1, n}) \quad (9)$$

Теперь, полагая

$$\tau_k^0(t) = \chi_k(t) / \sqrt{1-t^2} \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, n}), \quad (10)$$

где  $\chi_k(t)$  – функции из гельдеровского класса на отрезке  $[-1, 1]$ , и следуя известной процедуре из [12-14], СИУ (8)-(9) сведём к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} + \lambda_k^0 \text{sign}(u_m - t_r) \right] \chi_k(u_m) + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n R_{kp}(u_m, t_r) \chi_p(u_m) = \frac{\lambda_k}{\pi} f_k^0(t_r) \\ \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M \chi_k(t_m) = Q_k \quad (k = \overline{1, n}); \quad (r = \overline{1, M-1}) \end{cases} \quad (11)$$

Здесь  $M$  – любое натуральное число, а

$$u_m = \cos((2m-1)\pi/2M) \quad (m = \overline{1, M}); \quad t_r = \cos(\pi r/M) \quad (r = \overline{1, M-1})$$

– известные чебышевские узлы.

Коэффициенты концентрации (КК) касательных контактных напряжений на концах  $k$ -ого стрингера определим по формулам:

$$K_{a_k} = \lim_{x \rightarrow a_k+0} \sqrt{x-a_k} \tau(x); \quad K_{b_k} = \lim_{x \rightarrow b_k-0} \sqrt{b_k-x} \tau(x), \quad (12)$$

а затем перейдём к безразмерным величинам. Тогда, после решения системы (11) безразмерные КК контактных напряжений в концевых точках  $k$ -ого стрингера будут вычисляться при помощи формул:

$$K_{a_k}^0 = (\sqrt{\beta_k - \alpha_k} \chi_k(-1)) / 2, \quad K_{b_k}^0 = (\sqrt{\beta_k - \alpha_k} \chi_k(1)) / 2 \quad (k = \overline{1, n}),$$

где  $\chi_k(t)$  – функция из (10), а величины  $\chi_k(\pm 1)$  после решения системы (11) определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа [14]:

$$\chi_k(1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} \chi_k(u_m) \text{ctg} \left[ \frac{(2m-1)\pi}{4M} \right]; \quad (13)$$

$$\chi_k(-1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \chi_k(u_m) \text{tg} \left[ \frac{(2m-1)\pi}{4M} \right]$$

$$\{K_{a_k}^0, K_{b_k}^0\} = (\sqrt{aG})^{-1} \{K_{a_k}, K_{b_k}\} \quad (k = \overline{1, n})$$

В случаях абсолютно жёстких стрингеров при  $\lambda_k = 0$  и одного стрингера, СИУ (6)-(7) и, соответственно, системы (11) примут более простой вид.

2. Перейдём ко второй задаче. Пусть имеем упругую полосу  $\Pi = \{-\infty < x, z < \infty; -H \leq y \leq 0\}$  высотой  $H$  и модуль сдвига  $G$ , нижняя

грань  $y = -H$  которой жёстко закреплена, а на её верхней грани  $y = 0$  в направлении оси  $Oz$  действуют касательные силы интенсивности  $\tau(x)$ . При помощи интегрального преобразования Фурье по переменной  $x$  для перемещений точек верхней грани полосы, нагружённой по совокупности отрезков  $L$ , получим формулу:

$$w(x, 0) = \frac{1}{\pi G} \int_L \ln \operatorname{cth}(\pi|x-s|/4H) \tau(s) ds = \frac{1}{\pi G} \sum_{p=1}^n \int_{a_p}^{b_p} \ln \operatorname{cth}(\pi|x-s|/4H) \tau(s) ds$$

Отсюда дифференцированием по  $x$  находим

$$\frac{dw(x, 0)}{dx} = \frac{1}{2GH} \int_L \frac{\tau(s) ds}{\operatorname{sh}[\pi(s-x)/2H]} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Перейдя теперь к формулировке основных уравнений второй задачи, будем считать, что полоса  $\Pi$  на своей верхней грани  $y = 0$  по совокупности отрезков  $L$  усилена стрингерами с описанными в предыдущем пункте геометрическими и упругими характеристиками и подвержены тем же силовым факторам. Тогда, поступив совершенно аналогично сделанному в п.1, придём к следующей определяющей системе СИУ поставленной задачи для полосы  $(a_k < x < b_k; k = \overline{1, n})$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2GH} \sum_{p=1}^n \int_{a_p}^{b_p} \frac{\tau(s) ds}{\operatorname{sh}[\pi(s-x)/2H]} - \frac{1}{2h_k G_k} \int_{a_k}^{b_k} \operatorname{sign}(s-x) \tau(s) ds = \\ & = \frac{1}{2h_k G_k} \left[ T_{a_k} + T_{b_k} + \int_{a_k}^{b_k} \operatorname{sign}(s-x) T_k(s) ds \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Так как  $\lim_{H \rightarrow \infty} 2H \operatorname{sh}[(s-x)/2H] = \pi(s-x)$ , то эта система СИУ при предельном переходе  $H \rightarrow \infty$  переходит в систему СИУ первой задачи (5). При этом, условие равновесия  $k$ -ого стрингера опять имеет вид (3).

Далее в (14) и в условиях (3), как в предыдущем пункте, введём безразмерные переменные и величины.

$$\begin{aligned} \xi &= \pi x/H, \quad \eta = \pi s/H, \quad \alpha_k = \pi a_k/H, \quad \beta_k = \pi b_k/H \quad (k = \overline{1, n}); \\ \lambda_k &= HG/2h_k G_k; \quad \tau_0(\xi) = \tau(\pi^{-1}\xi H)/G, \quad T_k^{(0)}(\xi) = T_k(\pi^{-1}\xi H)/G; \\ T_{\alpha_k}^{(0)} &= \pi T_{a_k}/HG; \quad T_{\beta_k}^{(0)} = \pi T_{b_k}/HG \end{aligned}$$

В результате, система СИУ (14) примет вид  $(\xi \in (\alpha_k, \beta_k), k = \overline{1, n})$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \left[ \sum_{p=1}^n \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{\tau_0(\eta) d\eta}{2\operatorname{sh}[(\eta-\xi)/2]} + \lambda_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \operatorname{sign}(\eta-\xi) \tau_0(\eta) d\eta \right] = \frac{\lambda_k}{\pi} f_k(\xi), \\ & f_k(\xi) = T_{\alpha_k}^{(0)} + T_{\beta_k}^{(0)} + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \operatorname{sign}(\eta-\xi) T_k^{(0)}(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

а условие равновесия  $k$ -ого стрингера – вид

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \tau_0(\xi) d\xi = T_{\beta_k}^{(0)} - T_{\alpha_k}^{(0)} + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} T_k^{(0)}(\xi) d\xi \quad (k = \overline{1, n}) \quad (16)$$

Систему СИУ (15) и условия (16) преобразуем, перейдя к ядру Коши. С этой целью, полагая

$$t = e^\xi, \quad u = e^\eta, \quad \gamma_k = e^{\alpha_k}, \quad \delta_k = e^{\beta_k} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (17)$$

после простых преобразований системы СИУ (15) преобразуем в следующую систему:

$$\frac{1}{\pi} \left[ \sum_{p=1}^n \int_{\gamma_p}^{\delta_p} \frac{\omega_0(u) du}{u-t} + \frac{\lambda_k}{\sqrt{t}} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} \text{sign}(u-t) \omega_0(u) \frac{du}{\sqrt{u}} \right] = \frac{\lambda_k}{\pi} g_k(t) \quad (18)$$

$$\omega_0(u) = \tau_0(\ln u) / \sqrt{u}; \quad S_k^{(0)}(u) = T_k^{(0)}(\ln u) / \sqrt{u}; \quad (\gamma_k < t < \delta_k; k = \overline{1, n}),$$

$$g_k(t) = f_k(\ln t) / \sqrt{t} = \frac{T_{\alpha_k}^{(0)} + T_{\beta_k}^{(0)}}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} \text{sign}(u-t) \frac{S_k^{(0)}(u)}{\sqrt{u}} du, \quad (k = \overline{1, n}),$$

а условия (16) – в условия

$$\int_{\gamma_k}^{\delta_k} \omega_0(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = T_{\beta_k}^{(0)} - T_{\alpha_k}^{(0)} + \int_{\gamma_k}^{\delta_k} \frac{S_k^{(0)}(t) dt}{\sqrt{t}}, \quad (k = \overline{1, n}) \quad (19)$$

При этом, из цепи замены переменных легко находим:

$$t = e^{\pi x/H}, \quad u = e^{\pi s/H}, \quad \gamma_k = e^{\pi a_k/H}, \quad \delta_k = e^{\pi b_k/H} \quad (k = \overline{1, n})$$

В системе СИУ (18) и в условиях (19) каждый интервал  $(\gamma_k, \delta_k)$   $(k = \overline{1, n})$

преобразуем в интервал  $(-1, 1)$ , полагая

$$t = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2} \zeta + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2}; \quad u = \frac{\delta_p - \gamma_p}{2} \nu + \frac{\delta_p + \gamma_p}{2} \quad (-1 < \zeta, \nu < 1; k = \overline{1, n}). \quad (20)$$

Новые переменные  $\zeta, \nu$  с исходными переменными  $x, s$  связаны соотношениями:

$$\zeta = \frac{2e^{\pi x/H} - (e^{\pi a_k/H} + e^{\pi b_k/H})}{e^{\pi b_k/H} - e^{\pi a_k/H}}, \quad \nu = \frac{2e^{\pi s/H} - (e^{\pi a_k/H} + e^{\pi b_k/H})}{e^{\pi b_k/H} - e^{\pi a_k/H}} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (21)$$

В результате несложных преобразований система определяющих СИУ (18)-(19) преобразуется в систему СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\nu - \zeta} + \frac{\lambda_k (\delta_k - \gamma_k) \text{sign}(\nu - \zeta)}{\sqrt{[(\delta_k - \gamma_k)\nu + \delta_k + \gamma_k][(\delta_k - \gamma_k)\zeta + \delta_k + \gamma_k]}} \right\} \tau_k^{(0)}(\nu) d\nu + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \int_{-1}^1 R_{kp}^{(0)}(\zeta, \nu) \tau_p^{(0)}(\nu) d\nu = \frac{\lambda_k}{\pi} f_k^{(0)}(\zeta) \quad (22)$$

$$R_{kp}^{(0)}(\zeta, v) = \frac{\delta_p - \gamma_p}{(\delta_p - \gamma_p)v - (\delta_k - \gamma_k)\zeta + \delta_p - \delta_k + \gamma_p - \gamma_k} \quad (k, p = \overline{1, n})$$

$$\tau_k^{(0)}(v) = \omega_0 \left( \frac{\delta_k - \gamma_k}{2} v + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \right); \quad f_k^{(0)}(\zeta) = g_k \left( \frac{\delta_k - \gamma_k}{2} \zeta + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} [T_{\alpha_k}^{(0)} + T_{\beta_k}^{(0)}]}{\sqrt{(\delta_k - \gamma_k)\zeta + \delta_k + \gamma_k}} + (\delta_k - \gamma_k) \int_{-1}^1 \frac{\text{sign}(v - \zeta) \tilde{S}_k(v) dv}{\sqrt{[(\delta_k - \gamma_k)v + \delta_k + \gamma_k][(\delta_k - \gamma_k)\zeta + \delta_k + \gamma_k]}}$$

$$\tilde{S}_k(v) = S_k^{(0)} \left( \frac{\delta_k - \gamma_k}{2} v + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \right).$$

При этом, условия (20) преобразуются в условия ( $k = \overline{1, n}$ )

$$\int_{-1}^1 \frac{\tau_k^{(0)}(v) dv}{\sqrt{(\delta_k - \gamma_k)v + \delta_k + \gamma_k}} = \frac{\sqrt{2} [T_{\beta_k}^{(0)} - T_{\alpha_k}^{(0)}]}{\delta_k - \gamma_k} + \int_{-1}^1 \frac{\tilde{S}_k(v) dv}{\sqrt{(\delta_k - \gamma_k)v + \delta_k + \gamma_k}}. \quad (23)$$

Итак, решение второй задачи о взаимодействии системы стрингеров с полосой  $\Pi$  свелось к решению системы СИУ (22)-(23).

Эту систему СИУ, в свою очередь, как в п.1, можно свести к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\Phi_k(u_m)$  ( $k = \overline{1, n}; m = \overline{1, M}$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{v_m - \zeta_r} + \frac{\lambda_k (\delta_k - \gamma_k) \text{sign}(v_m - \zeta_r)}{\sqrt{[(\delta_k - \gamma_k)v_m + \delta_k + \gamma_k][(\delta_k - \gamma_k)\zeta_r + \delta_k + \gamma_k]}} \right] \times \\ & \times \Phi_k(v_m) + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n R_{kp}^{(0)}(\zeta_r, v_m) \Phi_p(v_m) = \frac{\lambda_k}{\pi} f_k^{(0)}(\zeta_r) \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ & \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\Phi_k(v_m)}{\sqrt{(\delta_k - \gamma_k)v_m + \delta_k + \gamma_k}} = \frac{\sqrt{2} [T_{\beta_k}^{(0)} - T_{\alpha_k}^{(0)}]}{\delta_k - \gamma_k} + \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\tilde{S}_k(v_m) \sqrt{1 - v_m^2}}{\sqrt{(\delta_k - \gamma_k)v_m + \delta_k + \gamma_k}}. \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Здесь

$$v_m = \cos[(2m-1)\pi/2M], \quad \zeta_r = \cos(\pi r/M) \quad (m = \overline{1, M}, r = \overline{1, M-1})$$

и принято

$$\tau_k^{(0)}(v) = \Phi_k(v) / \sqrt{1 - v^2} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (25)$$

где  $\Phi_k(v)$  – гильдеровские функции на отрезке  $[-1, 1]$ .

**3.** Рассмотрим несколько частных случаев поставленных задач. В первом частном случае предположим, что все стрингеры в первой задаче абсолютно жёсткие, т.е.  $G_k = \infty$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Тогда придём к однородному СИУ

$$\int_L \frac{\tau(s) ds}{s-x} = 0 \quad (x \in L),$$

которое совпадает с СИУ классической плоской контактной задачи теории упругости, когда в нижнюю упругую полуплоскость вдавливаются система штампов с плоскими основаниями. Замкнутое решение этого СИУ при условиях типа (3) приведено в [17].

Во втором частном случае предположим, что в первой задаче  $n=1$  и  $a_1 = -a$ ,  $b_1 = a$ ,  $T_1(x) \equiv 0$ . В этом случае  $\alpha_1 = -1$ ,  $\beta_1 = 1$  и определяющее СИУ задачи (6) примет вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - \xi} + \lambda_1 \text{sign}(\eta - \xi) \right] \tau_0(\eta) d\eta = \frac{\lambda_1}{\pi} (T_{-1}^{(0)} + T_1^{(0)}) \quad (26)$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi a G}{2h_1 G_1}, \quad T_{-1}^{(0)} = T_{-a}/aG; \quad T_1^{(0)} = T_a/aG,$$

а условие (3) – вид:

$$\int_{-1}^1 \tau_0(\xi) d\xi = T_1^{(0)} - T_{-1}^{(0)}. \quad (27)$$

В итоге, СИУ (26)-(27) сведётся к системе линейных уравнений (11), которая в данном частном случае запишется в форме:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left[ \frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \lambda_1 \text{sign}(\eta_m - \xi_r) \right] \chi(\eta_m) = \frac{\lambda_1}{\pi} (T_{-1}^{(0)} + T_1^{(0)}) & (r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{m=1}^M \frac{\pi}{M} \chi(\eta_m) = T_1^{(0)} - T_{-1}^{(0)} & (k = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (28)$$

Коэффициенты концентрации напряжений вычисляются по формулам (13).

В третьем частном случае примем, что во второй задаче  $n=1$ ,  $a_1 = -a$ ,  $b_1 = a$  и  $T_1(x) \equiv 0$ . В этом случае по вторым формулам (17)  $\alpha_1 = -\pi a/H = -\alpha$ ,  $\beta_1 = \pi a/H = \alpha$ ;  $\gamma_1 = e^{-\alpha}$ ,  $\delta_1 = e^{\alpha}$  и определяющее СИУ задачи по (22) запишется в виде ( $-1 < \zeta < 1$ ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{v - \zeta} + \frac{\lambda_1 \text{sh}\alpha \text{sign}(v - \zeta)}{\sqrt{(\text{sh}\alpha v + \text{ch}\alpha)(\text{sh}\alpha \zeta + \text{ch}\alpha)}} \right\} \tau_1^{(0)}(v) dv = \frac{\lambda_1}{\pi} f_1^{(0)}(\zeta) \quad (29)$$

$$f_1^{(0)}(\zeta) = (T_{-\alpha}^{(0)} + T_{\alpha}^{(0)}) / \sqrt{(\text{sh}\alpha \zeta + \text{ch}\alpha)}$$

а условие (23) – в виде

$$\int_{-1}^1 \frac{\tau_1^{(0)}(v) dv}{\sqrt{(\text{sh}\alpha v + \text{ch}\alpha)}} = \frac{T_{\alpha}^{(0)} - T_{-\alpha}^{(0)}}{\text{sh}\alpha} \quad (30)$$

В соответствии с (24) СИУ (29)-(30) сводится к системе линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left[ \frac{1}{v_m - \zeta_r} + \lambda_1 \frac{\text{sh}\alpha \text{sign}(v_m - \zeta_r)}{\sqrt{(\text{sh}\alpha v_m + \text{ch}\alpha)(\text{sh}\alpha \zeta_r + \text{ch}\alpha)}} \right] \Phi_1(v_m) = \frac{\lambda_1}{\pi} f_1^{(0)}(\zeta_r) \\ \sum_{m=1}^M \frac{\pi}{M} \frac{\Phi_1(v_m)}{\sqrt{(\text{sh}\alpha v_m + \text{ch}\alpha)}} = \frac{T_\alpha^{(0)} - T_{-\alpha}^{(0)}}{\text{sh}\alpha} \end{array} \right. \quad (r = \overline{1, M-1}) \quad (31)$$

Коэффициенты концентрации напряжений опять вычисляются по формулам (13), в которых следует  $\chi_1(u_m)$  заменить на  $\Phi_1(v_m)$ , а из формул (21)

$$\zeta = \frac{e^{\alpha \xi_0} - \text{ch}\alpha}{\text{sh}\alpha}, \quad v = \frac{e^{\alpha \eta_0} - \text{ch}\alpha}{\text{sh}\alpha} \quad (\xi_0 = x/a, \eta_0 = s/a; \alpha = \pi a/H),$$

откуда

$$\xi_0 = [\ln(\text{ch}\alpha + \zeta \text{sh}\alpha)]/\alpha, \quad \eta_0 = [\ln(\text{ch}\alpha + v \text{sh}\alpha)]/\alpha \quad (32)$$

С другой стороны, по формулам (20) в разбираемом частном случае будем иметь:

$$t = \zeta \text{sh}\alpha + \text{ch}\alpha, \quad u = v \text{sh}\alpha + \text{ch}\alpha \quad (33)$$

Теперь, при помощи (32)-(33) расчётную формулу для безразмерных контактных напряжений можем записать в виде

$$\tau_0(\alpha \xi_0) = e^{\alpha \xi_0/2} \tau_1^{(0)}(\zeta),$$

откуда, приняв во внимание формулу (25) при  $k = 1$ , будем иметь:

$$\tau_0(\alpha \xi_0) = e^{\alpha \xi_0/2} \frac{\Phi_1(\zeta)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

и, следовательно, через решение линейной системы уравнений (31) получим:

$$\tau_0(\alpha \xi_0^{(m)}) = e^{\alpha \xi_0^{(m)}/2} \frac{\Phi_1(v_m)}{\sqrt{1 - v_m^2}}, \quad \xi_0^{(m)} = \frac{1}{2} \ln(\text{ch}\alpha - v_m \text{sh}\alpha) \quad (m = \overline{1, M}) \quad (34)$$

Определяющие системы линейных алгебраических уравнений (28) и (31) можно записать в канонической форме.

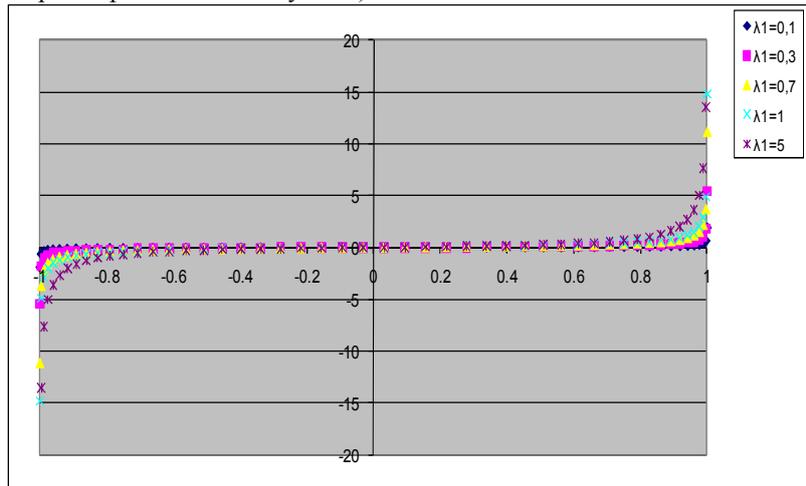
Проведён численный анализ рассматриваемых частных случаев исходных задач.

Во втором частном случае обсуждаются два подслучая: а)  $T_1^{(0)} = T_{-1}^{(0)} = T_0 = 1$ , т.е. когда верхняя грань струнгера свободна от касательных сил, а в его концевых сечениях действуют равные по величине, но противоположные по направлению сосредоточенные касательные силы единичной величины; б)  $T_1^{(0)} = -T_{-1}^{(0)} = 1$ , т.е. когда в концевых сечениях действуют равные по величине и одинаково направленные касательные сосредоточенные силы единичной величины. В этих подслучаях при различных значениях параметра  $\lambda_1$ , характеризующего относительную жёсткость системы струнгера-основание, решалась система линейных уравнений (35), где  $T_1^{(0)} + T_{-1}^{(0)} = 2$ ;  $T_1^{(0)} - T_{-1}^{(0)} = 0$  – в подслучае а) и  $T_1^{(0)} + T_{-1}^{(0)} = 0$ ;  $T_1^{(0)} - T_{-1}^{(0)} = 2$  – в подслучае б). На основании решения этой системы по формуле

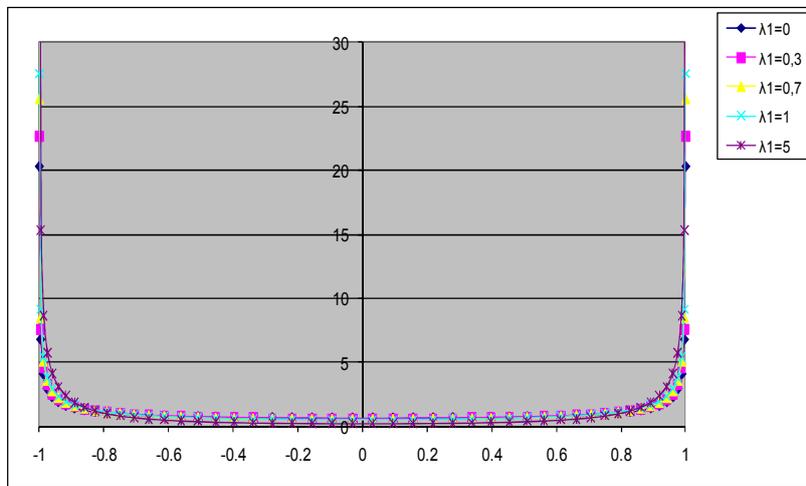
$$\tau_0(\eta_m) = X_m / \sqrt{1 - \eta_m^2} \quad (m = \overline{1, M})$$

для различных значений  $\lambda_1$  в подслучае а) (фиг.2, кососимметричное распределение напряжений) и в подслучае б) (фиг.3, симметричное распределение напряжений) построены графики изменения безразмерных касательных контактных напряжений.

Анализ этих графиков показывает, что при малых  $\lambda_1$ , т.е. когда стрингер жёстче основания, эти напряжения увеличиваются, причём, в концевых точках стрингера они резко увеличиваются. Значения безразмерного КК на правом конце стрингера  $K_1^0$  приведены в таблице, где в первой строчке записаны значения  $K_1^0$  в подслучае а), а во второй строчке – в подслучае б).



Фиг. 2



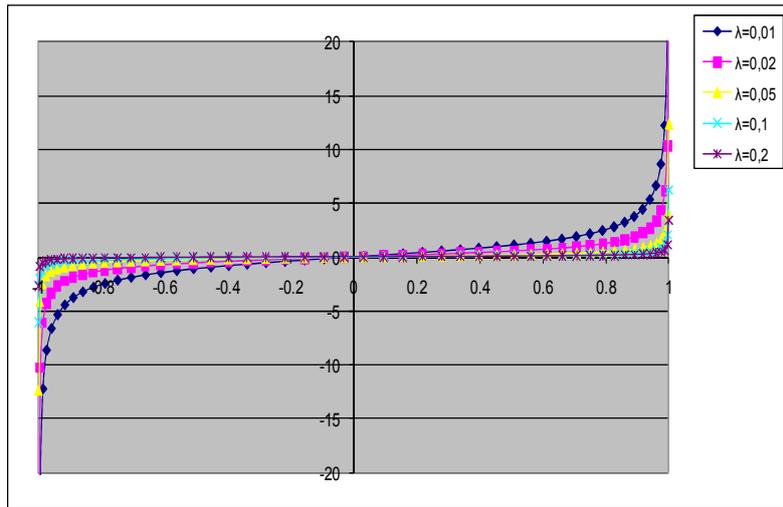
Фиг. 3

На фиг. 4 и 5 приведены графики изменения касательных контактных напряжений, соответственно, в подслучаях а) и б) третьего частного случая, рассчитанные по формуле (34) при различных  $\lambda$  ( $\alpha = \pi\lambda$ ). На этих графиках также наблюдаются отмеченные выше закономерности.

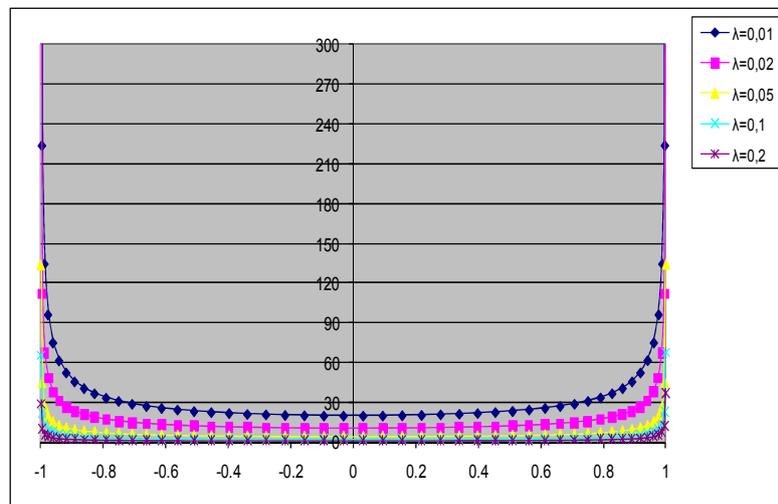
Значения  $K_1^0$

Таблица

$\lambda_1$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	1	5
$K_1^0$ а)	0	0.043281	0.1208	0.18889	0.24957	0.3299	0.94412
$K_1^0$ б)	0.45015	0.46817	0.50295	0.53622	0.56813	0.61373	1.0699



Фиг. 4

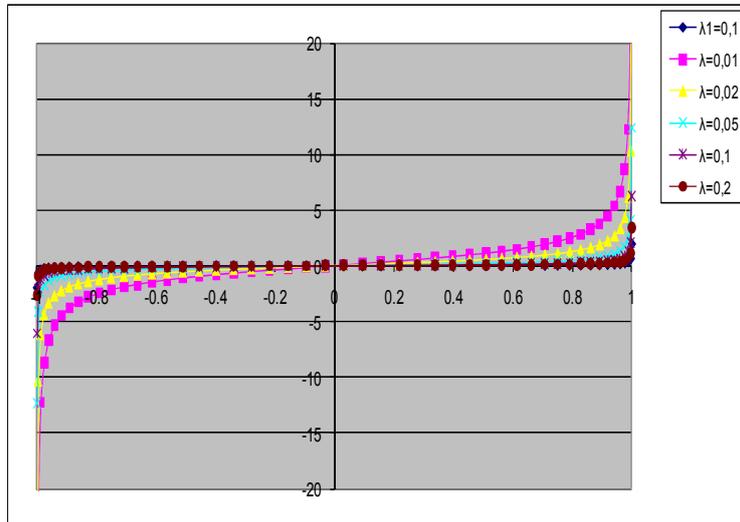


Фиг. 5

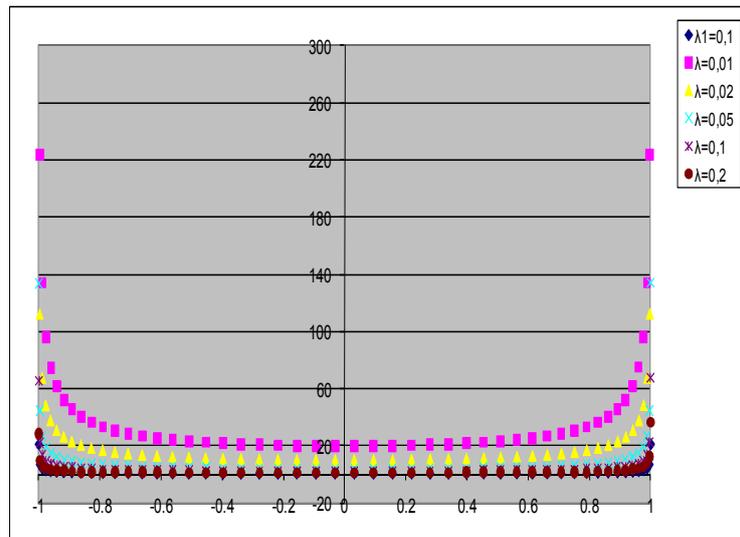
На этих графиках также наблюдаются отмеченные выше закономерности.

Наконец, на фиг. 6 и 7, соответственно, подслучаям а) и б), для сравнения приведены графики изменения касательных контактных напряжений второго и третьего частных случаев. Это сравнение показывает, что при фиксированном  $\lambda_1$  и при уменьшении параметра  $\alpha = a/H = \pi\lambda$ , когда высота  $H$  полосы возрастает и, следовательно, в предельном случае полоса переходит в полуплоскость, значения

контактных напряжений приближаются к соответствующим значениям в случае полуплоскости, т.е. напряжения в третьем частном случае приближаются к соответствующим значениям во втором частном случае. Это подтверждается также таблицами числовых значений контактных напряжений, которые из-за недостатка места здесь не приводятся.



Фиг. 6



Фиг. 7

## ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. //Ingr. Arch., 1932. Bd.3. №2. S.123-129.
2. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. //Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955. V.8. №2. Pp.164-178.
3. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen. //Österr. Ing. – Arch., 1964. Bd.18. №3-4. S.284-292.
4. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от краевого ребра жёсткости к листу (пересмотр задачи Мелана). // Прикл. мех. Труды амер. общ. инж.- мех., сер. Е. 1967. Т.34. №3. С.233-242.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493с.
6. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. Вып.4. С.632-646.
7. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. //ПММ. 1972. Т.36. Вып.5. С.770-787.
8. Григорян Э.Х. О коэффициентах интенсивности контактных напряжений в задачах для упругих тел с накладками. //Межвузовский сб. научных трудов, Механика. Ереван: Изд. ЕГУ. №5. С.130-140.
9. Агаян К.Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. //Изв. АН СССР. МТТ. 1972. №5. С.34-45.
10. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
11. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. // В сб.: «Механика деформируемого твердого тела». Ереван: Изд-во НАН Армении, 1993. С.129-143.
12. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis a solution of crack problems, pp 368-425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
13. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of singular Integral Equations. //Quart. Appl Math. Vol. XXXV. №1. Pp.173-185. 1977.
14. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
15. Манукян Э.А., Мкртчян М.С. Об антиплоской задаче кусочно-однородного упругого слоя, содержащего на линии спая систему щелей и абсолютно жёстких тонких включений. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С. 21-33.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. М.: Наука, 1969. 344с.
17. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270с.

### Сведения об авторе:

**Григорян Марине Самвеловна** – мл. н. сотр. Института механики НАН РА,  
Тел.: (374 91)63 97 58., E-mail: [gmarinchka@mail.ru](mailto:gmarinchka@mail.ru)

Поступила в редакцию 24.02.2014