ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №2, 2014 Механика

УДК 624.07:534.1

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ И НАБЛЮДЕНИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: уравнение колебаний упругой балки, оптимальное управление, наблюдение, идеальный сигнал.

Keywords: equation of oscillations of elastic beam, optimal control, observation, ideal signal.

Բարսեղյան Վ.Ռ., Մովսիսյան Լ.Ա.
Հեծանի առաձգական տատանումների օպտիմալ ղեկավարման և դիտման մասին

Դիտարկված է ազատ եզրերով հենված առաձգական հեծանի տատանումների օպտիմալ ղեկավարման և դիտման խնդիրները, երբ առկա է առանցքային սեղմում, ընդորում Էյլերյան կրիտիկական արժեքը գերազանցող ուժերի համար: Օգտվելով Ֆուրյեի փոփոխականների անջատման եղանակից օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը բերված է յուրաքանչյուր հարմոնիկի համար համապատասխան խնդրին, որը լուծված է մոմնտների պրոբլեմով: Կառուցված է օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունը և ցույց է տրված համապատասխան շարքերի զուգամիտությունը: Լուծված է ժամանակի տրված պահին կատարված չափումներով հեծանի սկզբնական պայմանների վերականգնման խնդիրը:

Barseghyan V.R., Movsisyan L.A.
On optimal control and observation of the elastic vibrations of the beam

The problems of optimal control and observation of vibrations of an elastic beam with free supported ends are considered, when there is an axial compression, and, for the forces exceeding a critical value of Euler. Using the method of the variables separation, the problems of the optimal control are modified to solving the relevant problems, described by ordinary differential equations, which are solved by the moment problems. An explicit solution to the optimal control problem of an elastic beam is constructed and the convergence of obtained series is shown. The problem of recovering the initial conditions of the beam with measures done at given moment of times is solved.

Исследуются задачи оптимального управления и наблюдения колебаниями упругой балки со свободно опёртыми концами при наличии осевого сжатия, причём, для силы, превышающей критическое значение по Эйлеру. Методом разделения переменных решение задачи оптимального управления приводится к решению соответствующих задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые решаются с помощью проблем моментов. Построено явное решение задачи оптимального управления упругой балки и показана сходимость полученных рядов. Решена также задача восстановления начальных условий балки по измерениям в заданные моменты времени.

Введение. Теория управления и наблюдения систем с распределёнными параметрами, т.е. системами, которые описываются с помощью краевых задач для уравнений с частными производными, всё больше расширяет область приложения. Эта тематика не теряет своей актуальности из-за разнообразия распределённых систем, описывающих процессы самых различных областей физики, механики и т.д..

В [1-8] исследованы задачи оптимального управления упругих систем, когда управление осуществляется через нормальную нагрузку, приложенную по всей длине объекта [1-5, 8] и задачи, когда управление осуществляется через граничные условия [6, 7].

В [1,2] обсуждаются вопросы восстановления неизвестных характеристик систем с распределёнными параметрами и приведена обширная библиография. В работах [9,10] для различных систем с распределёнными параметрами с учётом некоторой предыстории поступающего сигнала методом разделения переменных построены оптимальные операции, восстанавливающие состояния всех точек систем в любой момент времени. В [11] рассматриваются задачи наблюдения упругих колебаний балки с различными граничными условиями в отдельные фиксированные моменты времени.

В настоящей статье методом проблем моментов изучается задача оптимального управления упругой балки со свободно опёртыми концами при наличии осевого сжатия, причём, для силы, превышающей критическое значение по Эйлеру (неустойчивое состояние). Для такой системы исследуется также задача наблюдения: по данным наблюдениям восстановить неизвестные начальные условия или предсказать состояние через заданное время.

1. Постановка задачи оптимального управления. Рассматривается однородная, упругая балка с шарнирно-опёртыми концами, на которую действуют распределённые воздействия (искомые), перпендикулярные к оси балки и осевая сила (сжимающая). Тогда малые колебания балки описываются уравнением

$$EJ\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\rho S\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=f\left(x,t\right) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$W\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi\left(x\right),\quad 0\le x\le l \tag{1.2}$$

и однородными граничными условиями

$$W(0,t)=W(l,t)=0,\qquad W_{xx}(0,t)=W_{xx}(l,t)=0,\qquad t>0 \tag{1.3}$$

Обозначения общепринятые. В уравнении (1.1) функция $f(x,t)$ –управляющее воздействие.

Задача оптимального управления упругими колебаниями балки ставится следующим образом.

Задача 1. Среди возможных управлений $u(x,t),\ 0\le x\le l,\ 0\le t\le T$ требуется найти оптимальное управление $u^0(x,t)$, переводящее систему из заданного начального состояния (1.2) в конечное состояние

$$W\left(x,T\right)=0,\quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=T}=0,\quad 0\le x\le l \tag{1.4}$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T\int_0^l [u(x,t)]^2\,dxdt,\quad \left(u(x,t)=\frac{1}{\rho S}f(x,t)\right) \tag{1.5}$$

Выражение (1.5) имеет смысл «энергии», затраченной на управление данной колебательной системой.

Отсутствие в (1.1) нагрузки и однородных конечных условий (1.4) обусловлено только краткостью записи.

2. Решение задачи оптимального управления. При заданных граничных условиях (1.3) решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$W(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k(t)\sin\lambda_k x\,,\ \ \lambda_k=\frac{k\pi}{l},\tag{2.1}$$

где $W_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l W(x,t)\sin\lambda_k x dx$.

Так как в промежутке $[0,l]$ система функций $\{\sin\lambda_k x\}$, $(k=1,2,\ldots)$ – ортогональная и полная, то функции $u(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно разложить в ряд Фурье. Представив функции $u(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в виде рядов Фурье:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x,\qquad \text{где}\ \ u_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx;\tag{2.2}$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\lambda_k x,\qquad \text{где}\ \ \varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\lambda_k x\,dx;\tag{2.3}$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\lambda_k x,\qquad \text{где}\ \ \psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\lambda_k x\,dx\tag{2.4}$$

и подставив значения $W(x,t)$ из (2.1) и $u(x,t)$ из (2.2) в уравнение (1.1), с учётом ортогональности функций $\{\sin\lambda_k x\}$, $k=1,2,\ldots$ в промежутке $[0,l]$, получим

$$\ddot{W}_k(t)+\omega_k^2\left(1-\frac{P}{P_k}\right)W_k(t)=u_k(t),\ \ k=1,2,\ldots\tag{2.5}$$

где введены следующие обозначения:

$$\omega_k^2=\frac{EJ}{\rho S}\lambda_k^4,\quad P_k=EJ\lambda_k^2$$

Таким образом, функции $W_k(t)$, $0\le t\le T$ должны удовлетворять обыкновенным линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами со следующими начальными и конечными условиями (которые получены с учётом (2.1), (2.3), (2.4) из (1.2) и (1.4)):

$$W_k(0)=\varphi_k\,,\ \ \dot{W}_k(0)=\psi_k\tag{2.6}$$

$$W_k(T)=0\,,\ \ \dot{W}_k(T)=0\tag{2.7}$$

Рассмотрим следующие случаи.

Пусть существует число m такое, что при всех $k<m$ имеет место $P>P_k$. В этом случае имеем $1-\frac{P}{P_k}<0$. Обозначим

$$\Omega_k'=\omega_k\left(P/P_k-1\right)^{1/2}$$

Для всех $k\ge m$ имеет место $P<P_k$, следовательно, $1-\frac{P}{P_k}>0$. Тогда обозначим

$$\Omega_k = \omega_k\left(1 - P / P_k\right)^{1/2}$$

(При $P = P_m$ имеем $\Omega_m = 0$ – тривиальный случай).

Следовательно, уравнения (2.5) соответственно для $k < m$ и $k \geq m$ запишутся следующим образом:

$$\ddot{W}_k\left(t\right) - (\Omega'_k)^2 W_k\left(t\right) = u_k\left(t\right) \qquad k < m \tag{2.8}$$

$$\ddot{W}_k\left(t\right) + \Omega_k^2 W_k\left(t\right) = u_k\left(t\right) \qquad k \geq m \tag{2.9}$$

Отметим, что при $P < 0$ для любых $k = 1, ..., m, ...$ будем иметь $1 - \dfrac{P}{P_k} > 0$.

Общие решения уравнений (2.8) и (2.9) с начальными условиями (2.6) соответственно будут:

$$W_k\left(t\right) = \varphi_k \mathrm{ch}\Omega'_k t + \frac{1}{\Omega'_k}\psi_k \mathrm{sh}\Omega'_k t + \frac{1}{\Omega'_k}\int_0^t u_k\left(\tau\right)\mathrm{sh}\Omega'_k\left(t - \tau\right)d\tau$$

при $k = 1, ..., m-1$, (2.10)

$$W_k\left(t\right) = \varphi_k \cos\Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k}\psi_k \sin\Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k}\int_0^t u_k\left(\tau\right)\sin\Omega_k\left(t - \tau\right)d\tau$$

при $k = m, m+1, ...$ (2.11)

Таким образом, искомое решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) или (2.6), согласно (2.10) и (2.11), имеет вид:

$$\begin{aligned} W\left(x,t\right) = \sum_{k=1}^{m-1}\left(\varphi_k \mathrm{ch}\Omega'_k t + \frac{1}{\Omega'_k}\psi_k \mathrm{sh}\Omega'_k t + \frac{1}{\Omega'_k}\int_0^t u_k\left(\tau\right)\mathrm{sh}\Omega'_k\left(t - \tau\right)d\tau\right)\sin\lambda_k x + \\ + \sum_{k=m}^{\infty}\left(\varphi_k \cos\Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k}\psi_k \sin\Omega_k t + \frac{1}{\Omega_k}\int_0^t u_k\left(\tau\right)\sin\Omega_k\left(t - \tau\right)d\tau\right)\sin\lambda_k x \end{aligned} \tag{2.12}$$

Первые два слагаемых в обеих скобках в выражении (2.12) характеризуют собой решение задачи о свободных колебаниях балки при заданных начальных условиях, а третьи слагаемые – о вынужденных колебаниях под действием внешней силы при нулевых начальных условиях.

Дифференцируя $W\left(x,t\right)$ в (2.12) по t и учитывая, что функции $W\left(x,t\right)$ и $W_t\left(x,t\right)$ соответственно должны удовлетворять условиям (1.4) или (2.7), и проведя некоторые преобразования, найдём, что функция $u_k(t)$ должна удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

при $k < m$

$$\int_0^T u_k\left(\tau\right)\mathrm{sh}\Omega'_k\tau d\tau = \Omega'\varphi_k, \quad \int_0^T u_k\left(\tau\right)\mathrm{ch}\Omega'_k\tau d\tau = -\psi_k, \tag{2.13}$$

а при $k \geq m$

$$\int_0^T u_k\left(\tau\right)\sin\Omega_k\tau d\tau = \Omega_k\varphi_k, \quad \int_0^T u_k\left(\tau\right)\cos\Omega_k\tau d\tau = -\psi_k. \tag{2.14}$$

Преобразуя минимизируемый функционал (1.5), получим:

$$\int_0^T\int_0^l [u(x,t)]^2\,dxdt = \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T u_k^2(\tau)\,d\tau .$$

Но так как $\int_0^T u_k^2(\tau)d\tau \ge 0$, минимизация функционала (1.5) равносильна минимизации функционалов

$$\int_0^T u_k^2(\tau)\,d\tau \quad (k=1,2,\ldots). \tag{2.15}$$

Таким образом, для решения **задачи 1** получили задачу условного экстремума (2.13) и (2.14), минимизируемым функционалом (2.15) с соответствующими значениями k. Решим полученные вариационные задачи методом проблемы моментнов [3, 12] при $k<m$ и $k\ge m$. Тогда для искомых оптимальных функций $u_k(t)$ получим:

при $k<m$

$$u_k^0(t) = A_k \operatorname{sh}\Omega_k' t - B_k \operatorname{ch}\Omega_k' t , \tag{2.16}$$

при $k\ge m$

$$u_k^0(t) = C_k \sin\Omega_k t + D_k \cos\Omega_k t , \tag{2.17}$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_k = X_k\left(\frac{\operatorname{sh}^2\Omega_k' T}{\Omega_k'} + T\frac{\Omega_k'\varphi_k}{\psi_k} + \frac{\varphi_k}{2\psi_k}\operatorname{sh}2\Omega_k' T\right),$$

$$B_k = X_k\left(\frac{\operatorname{sh}2\Omega_k' T}{2\Omega_k'} + \frac{\varphi_k}{\psi_k}\operatorname{sh}^2\Omega_k' T - T\right)$$

$$C_k = Y_k\left(\frac{\sin^2\Omega_k T}{\Omega_k} + T\frac{\Omega_k\varphi_k}{\psi_k} + \frac{\varphi_k}{2\psi_k}\sin 2\Omega_k T\right),$$

$$D_k = Y_k\left(\frac{\sin 2\Omega_k T}{2\Omega_k} - \frac{\varphi_k}{\psi_k}\sin^2\Omega_k T - T\right)$$

$$X_k = \frac{2\psi_k}{\dfrac{\operatorname{sh}^2\Omega_k'^2 T}{\Omega_k'^2} - T^2}\ , \quad Y_k = \frac{2\psi_k}{T^2 - \left(\dfrac{\sin 2\Omega_k T}{2\Omega_k}\right)^2}$$

Теперь значение функционала (2.15) будет равно:

при $k<m$

$$\int_0^T \left(u_k^0(t)\right)^2 dt = X_k\psi_k\left\{T\left[\left(\frac{\Omega_k'\varphi_k}{\psi_k}\right)^2 - 1\right] + \left[\left(\frac{\Omega_k'\varphi_k}{\psi_k}\right)^2 + 1\right]\frac{\operatorname{sh}2\Omega_k' T}{2\Omega_k'} + 2\frac{\varphi_k}{\psi_k}\operatorname{sh}^2\Omega_k' T\right\}$$

при $k\ge m$

$$\int_0^T \left(u_k^0(t)\right)^2 dt = Y_k\psi_k \left\{ T\left[1+\left(\frac{\Omega_k\varphi_k}{\psi_k}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\Omega_k\varphi_k}{\psi_k}\right)^2 - 1\right]\frac{\sin 2\Omega_k T}{2\Omega_k} + 2\frac{\varphi_k}{\psi_k}\sin^2\Omega_k T \right\}$$

Полностью определены функции $u_k^0(t)$, $(k=1,2,\ldots)$, имеющие вид при $k<m$ (2.16), а при $k \ge m$ – (2.17). Подставляя выражение (2.16) и (2.17) в ряд (2.2), будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t)\sin\lambda_k x = \sum_{k=1}^{m-1}\left(A_k \mathrm{sh}\Omega'_k t - B_k \mathrm{ch}\Omega'_k t\right)\sin\lambda_k x + \\ + \sum_{k=m}^{\infty}\left(C_k \sin\Omega_k t + D_k \cos\Omega_k t\right)\sin\lambda_k x \qquad (2.18)$$

Докажем, что ряд (2.18) сходится, при этом сумма этого ряда $u^0(x,t)$ будет решением поставленной задачи, т.е. $u^0(x,t)$ – оптимальное управляющее воздействие. Для этой цели оценим общий член ряда (2.18). Учитывая, что в (2.18) первая сумма при $k<m$ конечна, приведём оценку общего члена второго ряда:

$$\left|u_k^0(t)\sin\frac{k\pi}{l}x\right| \le \frac{3/\lambda_k + 2T}{T^2 - 1/\lambda_k^2}\left(|\psi_k| + \lambda_k|\varphi_k|\right). \qquad (2.19)$$

Для этого ряда построили мажорирующий ряд, общий член которого есть правая часть неравенства (2.19).

Мы должны убедиться в непрерывности функции (2.12). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда для $W(x,t)$, т.к. общий член этого ряда– непрерывная функция, а равномерно сходящийся ряд непрерывных функций определяет непрерывную функцию.

Надо также доказать равномерную сходимость рядов $W_t(x,t)$, $W_{tt}(x,t)$, $W_{xx}(x,t)$ и $W_{xxxx}(x,t)$, что необходимо, чтобы функция $W(x,t)$ удовлетворяла уравнению (1.1). Для этого достаточно доказать возможность двухкратного почленного дифференцирования рядов для $W(x,t)$ по всем переменным и четрёхкратного дифференцирования по x, для чего, в свою очередь, достаточно доказать сходимость мажорантных рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^4|\varphi_k|,\ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3|\psi_k|. \qquad (2.20)$$

Для сходимости рядов (2.20) достаточно потребовать, чтобы:

1) начальное отклонение $\varphi(x)$ имело непрерывные производные до 4-ого порядка.

2) начальная скорость $\psi(x)$ имела непрерывные производные до 3-ого порядка и чтобы выполнялись следующие условия:

$$\psi(0)=\psi(l)=\psi''(0)=\psi''(l)=0$$

Эти условия являются достаточными условиями для сходимости указанных рядов.

3. Задача наблюдения за упругими колебаниями балки. Рассмотрим упругие колебания балки, которая описывается краевой задачей (1.1), (1.3), с предположением, что начальные и конечные условия не заданы.

Для восстановления колебательного процесса балки предположим, что имеется возможность измерения состояния балки в некоторые моменты времени. Пусть через измерительные устройства поступает идеальный сигнал, который связан с состоянием балки соотношением

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W(x,t_1) \\ W_t(x,t_1) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где t_1 $(t_1>0)$ – некоторый фиксированный момент времени, a_{ik} – заданные постоянные ($i,k=1,2$). Предполагается, что $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$. Отметим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – результаты измерения, т.е. заданные функции.

Задача наблюдения за упругими колебаниями балки ставится следующим образом.

Задача 2. Требуется восстановить начальные условия процесса, т.е. функции $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ для колебательного процесса балки (1.1) с краевыми условиями (1.3) по заданным измерениям $y(x)$ (3.1).

Из формулы (3.1) имеем:

$$\begin{aligned} &a_{11}W(x,t_1)+a_{12}W_t(x,t_1)=y_1(x) \\ &a_{21}W(x,t_1)+a_{22}W_t(x,t_1)=y_2(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Формальное представление функции $W(x,t)$ и $W_t(x,t)$ через неизвестные начальные условия запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(x,t)=&\sum_{j=1}^{m-1}\left(\varphi_j^0\mathrm{ch}\Omega_j't+\frac{1}{\Omega_j'}\psi_j^0\mathrm{sh}\Omega_j't+\frac{1}{\Omega_j'}\int_0^t u_j(\tau)\mathrm{sh}\Omega_j'(t-\tau)\,d\tau\right)\sin\lambda_j x+ \\ &+\sum_{k=m}^{\infty}\left(\varphi_k^0\cos\Omega_k t+\frac{1}{\Omega_k}\psi_k^0\sin\Omega_k t+\frac{1}{\Omega_k}\int_0^t u_k(\tau)\sin\Omega_k(t-\tau)\,d\tau\right)\sin\lambda_k x \\ W_t(x,t)=&\sum_{j=1}^{m-1}\left(\varphi_j^0\Omega_j'\mathrm{sh}\Omega_j't+\psi_j^0\mathrm{ch}\Omega_j't+\int_0^t u_j(\tau)\mathrm{ch}\Omega_j'(t-\tau)\,d\tau\right)\sin\lambda_j x+ \\ &+\sum_{k=m}^{\infty}\left(-\varphi_k^0\Omega_k\sin\Omega_k t+\psi_k^0\cos\Omega_k t+\int_0^t u_k(\tau)\cos\Omega_k(t-\tau)\,d\tau\right)\sin\lambda_k x \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\varphi_k^0=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi^0(x)\sin\lambda_k x\,dx;\qquad \psi_k^0=\frac{2}{l}\int_0^l\psi^0(x)\sin\lambda_k x\,dx;\quad k=1,\dots,m,\dots$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ представим в виде рядов Фурье

$$y_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k^{(i)}\sin\lambda_k x,\quad \text{где}\quad y_k^{(i)}=\frac{2}{l}\int_0^l y_i(x)\sin\lambda_k x\,dx;\qquad (i=1,2) \tag{3.4}$$

Для момента времени $t = t_1$ функции $W(x,t_1)$ и $W_t(x,t_1)$ из (3.3) и $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из (3.4), подставляя в (3.2), будем иметь следующие соотношения:

при $k < m$

$$\varphi_k^0\left(a_{11}\text{ch}\Omega'_k t_1 + a_{12}\Omega'_k\text{sh}\Omega'_k t_1\right) + \psi_k^0\left(\frac{a_{11}}{\Omega'_k}\text{sh}\Omega'_k t_1 + a_{12}\text{ch}\Omega'_k t_1\right) +$$

$$+\int_0^{t_1} u_k(\tau)\left(\frac{a_{11}}{\Omega'_k}\text{sh}\Omega'_k(t_1-\tau) + a_{12}\text{ch}\Omega'_k(t_1-\tau)\right)d\tau = y_k^{(1)},$$

$$\varphi_k^0\left(a_{21}\text{ch}\Omega'_k t_1 + a_{22}\Omega'_k\text{sh}\Omega'_k t_1\right) + \psi_k^0\left(\frac{a_{21}}{\Omega'_k}\text{sh}\Omega'_k t_1 + a_{22}\text{ch}\Omega'_k t_1\right) +$$

$$+\int_0^{t_1} u_k(\tau)\left(\frac{a_{21}}{\Omega'_k}\text{sh}\Omega'_k(t_1-\tau) + a_{22}\text{ch}\Omega'_k(t_1-\tau)\right)d\tau = y_k^{(2)};$$

при $k \ge m$

$$\varphi_k^0\left(a_{11}\cos\Omega_k t_1 - a_{12}\Omega_k\sin\Omega_k t_1\right) + \psi_k^0\left(\frac{a_{11}}{\Omega_k}\sin\Omega_k t_1 + a_{12}\cos\Omega_k t_1\right) +$$

$$+\int_0^{t_1} u_k(\tau)\left(\frac{a_{11}}{\Omega_k}\sin\Omega_k(t_1-\tau) + a_{12}\cos\Omega_k(t_1-\tau)\right)d\tau = y_k^{(1)}$$

$$\varphi_k^0\left(a_{21}\cos\Omega_k t_1 - a_{22}\Omega_k\sin\Omega_k t_1\right) + \psi_k^0\left(\frac{a_{21}}{\Omega_k}\sin\Omega_k t_1 + a_{22}\cos\Omega_k t_1\right) +$$

$$+\int_0^{t_1} u_k(\tau)\left(\frac{a_{21}}{\Omega_k}\sin\Omega_k(t_1-\tau) + a_{22}\cos\Omega_k(t_1-\tau)\right)d\tau = y_k^{(2)}.$$

При каждом значении k из вышеполученных равенств соответственно для $k < m$ и $k \ge m$ получим:

при $k < m$

$$\varphi_k^0 = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\left[(a_{21}y_k^{(1)} - a_{11}y_k^{(2)})\frac{\text{sh}\Omega'_k t_1}{\Omega'_k} + (a_{22}y_k^{(1)} - a_{12}y_k^{(2)})\text{ch}\Omega'_k t_1\right] + \\ + \frac{1}{\Omega'_k}\int_0^{t_1} u_k(\tau)\text{sh}\Omega'_k\tau d\tau;$$

$$\psi_k^0 = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\left[(a_{12}y_k^{(2)} - a_{22}y_k^{(1)})\Omega'_k\text{sh}\Omega'_k t_1 + (a_{11}y_k^{(2)} - a_{21}y_k^{(1)})\text{ch}\Omega'_k t_1\right] - \\ - \int_0^{t_1} u_k(\tau)\text{ch}\Omega'_k\tau d\tau, \tag{3.5}$$

при $k \ge m$

$$\varphi_k^0 = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[(a_{21}y_k^{(1)} - a_{11}y_k^{(2)}) \frac{\sin\Omega_k t_1}{\Omega_k} + (a_{22}y_k^{(1)} - a_{12}y_k^{(2)}) \cos\Omega_k t_1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Omega_k} \int_0^{t_1} u_k(\tau) \sin\Omega_k \tau d\tau,$$

$$\psi_k^0 = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[(a_{22}y_k^{(1)} - a_{12}y_k^{(2)})\Omega_k \sin\Omega_k t_1 - (a_{21}y_k^{(1)} - a_{11}y_k^{(2)}) \cos\Omega_k t_1 \right] - \tag{3.6}$$

$$- \int_0^{t_1} u_k(\tau) \cos\Omega_k \tau d\tau.$$

Таким образом, искомые функции $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ находятся в виде рядов Фурье

$$\varphi^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^0 \sin\lambda_k x, \qquad \psi^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^0 \sin\lambda_k x$$

Заметим, что при отсутствии внешних сил $u(x,t) = 0$, в случае $a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0$, т.е. при $y_1(x) = W(x, t_1), \quad y_2(x) = W_t(x, t_1)$ из (3.5) и (3.6) соответствено будем иметь:

при $k < m$

$$\varphi_k^0 = y_k^{(1)} \mathrm{ch}\Omega'_k t_1 - \frac{1}{\Omega'_k} y_k^{(2)} \mathrm{sh}\Omega'_k t_1, \quad \psi_k^0 = y_k^{(2)} \mathrm{ch}\Omega'_k t_1 - \Omega'_k y_k^{(1)} \mathrm{sh}\Omega'_k t_1,$$

при $k \geq m$

$$\varphi_k^0 = y_k^{(1)} \cos\Omega_k t_1 - \frac{1}{\Omega_k} y_k^{(2)} \sin\Omega_k t_1, \quad \psi_k^0 = \Omega_k y_k^{(1)} \sin\Omega_k t_1 + y_k^{(2)} \cos\Omega_k t_1 .$$

Заключение. Методом разделения переменных решения задачи оптимального управления упругой балки со свободно опёртыми концами при наличии осевого сжатия и задачи восстановления неизвестных начальных условий (измеряя состояния балки в некоторые моменты времени) приводятся к решению соответствующих задач бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Построено явное решение задачи оптимального управления упругой балки и показана сходимость полученных рядов. Решена задача восстановления начальных условий балки по измерениям в заданные моменты времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Короткий А.И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределёнными параметрами // Изв. ВУЗов. Математика. 1995. № 11. С.101–124.
2. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Синтез оптимального управления в системах с распределёнными параметрами при неполном измерении состояния (обзор) // Изв. АН СССР. Кибернетика. 1983. № 2. С.123–136.
3. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975. 568с.
4. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176с.

5. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем // МТТ. № 6. 1999. С.146-153.
6. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук. 2005. Вып. 6(366). С.89-114.
7. Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению колебанием упругих систем // Прикладная механика. 2012. Т.48. №2. С.137-142.
8. Барсегян В.Р. Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях //Уч. записки ЕГУ. 1998. № 1(188). С.24-29.
9. Барсегян В.Р. Задача оптимального восстановления состояния систем с распределенными параметрами при наличии погрешностей в неполных измерениях // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. № 1. С.70–75.
10. Barsegyan V. R. The Problem for Optimal Restoration of the State of the System Described by an Integro-Differential Equation in the Presence of Errors in Measurements // Automation and Remote Control. 2012. Vol.73. № 8. P.1365-1370.
11. Егоров А.И. О наблюдаемости упругих колебаний балки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т.48. № 6. С.967-973.
12. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.

Сведения об авторах:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ. мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.
Тел.: (10) 52 36 40; **E-mail:** barseghyan@sci.am

Мовсисян Лаврентий Александрович – доктор техн.наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Ереван, Армения, пр. Маршала Баграмяна 24/2

Поступила в редакцию 20.01.2014