ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №2, 2014 Механика

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян С.О.

Ключевые слова: термоупругость, микрополярный, тонкая оболочка, энергетические теоремы, вариационное уравнение.
Key words: thermoelasticity, micropolar, thin shell, energetic theorems, variation equation.

Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար բարակ թաղանթների ջերմաառաձգականության տեսության մի քանի ընդհանուր հարցեր

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ բնույթ ունեցող վարկածների մեթոդի հիման վրա կառուցված է միկրոպոլյար բարակ թաղանթների ջերմաառաձգականության կիրառական տեսությունը, արտածված է էներգետիկ հաշվեկշռի հավասարումը, ապացուցված են էներգետիկ թեորեմները, կառուցված է այդ տեսության վարիացիոն հավասարումը:

Sargsyan S.H.
On Some General Questions of Theory of Thermoelasticity of Micropolar Thin Shells

In the present paper on the basis of the hypotheses method, which has asymptotic nature, applied theory of thermoelacticity of micropolar thin shells is constructed, balance equation is obtained, energetic theorems are proved and variation functional is constructed for this theory.

В работе на основе метода гипотез, который имеет асимптотическую природу, построена прикладная теория термоупругости микрополярных тонких оболочек, выведены уравнения баланса энергии, доказаны энергетические теоремы, построен вариационный функционал этой теории.

Введение. В работах [1-3] изложены основы классической теории термоупругости, изучены энергетические вопросы и вариационные постановки соответствующих краевых задач. В работах [4-6] построены классические математические модели термоупругости изотропных и трансверсально-изотропных тонких оболочек без учёта и с учётом поперечных сдвиговых деформаций, доказаны общие энергетические теоремы и построены соответствующие общие вариационные функционалы. В работах [7-9] изложены основы трёхмерной термоупругости микрополярных тел, изучены энергетические вопросы и вариационные постановки краевых задач этой теории.

В настоящее время считается актуальным построение общей теории термоупругости микрополярных тонких оболочек и пластин и изучение основных вопросов энергетического поведения и вариационной постановки соответствующих краевых задач.

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин заключается в приближённом, но адекватном сведении трёхмерной задачи микрополярной термоупругости к двумерной краевой задаче. В работах [10, 11] асимптотическим методом установлены качественные стороны поведения решения краевой задачи трёхмерной микрополярной теории упругости в тонких областях пластинки или оболочки, а в работах [12-14] сформулированы адекватные гипотезы и построены общие теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек. В работах [15, 16] развит этот системный подход, построено асимптотическое решение микрополярной термоупругости в тонкой области оболочки, сформулированы адекватные гипотезы и изложены основные положения теории термоупругости микрополярных тонких оболочек.

В данной работе изложена теория термоупругости микрополярных тонких оболочек с точки зрения энергетических соображений, доказаны энергетические теоремы и построен соответствующий вариационный функционал этой теории.

1.Постановка задачи.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое изотропное микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории несвязанной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений [7]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(H_j\cdot\sigma_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_i\cdot\sigma_{ji}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_i\cdot H_j\cdot\sigma_{3i}\right)+\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\sigma_{ij}+$$
$$+H_j\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\sigma_{i3}-\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}\sigma_{jj}=0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\cdot\sigma_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\cdot\sigma_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1\cdot H_2\cdot\sigma_{33}\right)-$$
$$H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\sigma_{11}-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\sigma_{22}=0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(H_j\cdot\mu_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_i\cdot\mu_{ji}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_i\cdot H_j\cdot\mu_{3i}\right)+\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\mu_{ij}+$$
$$+H_j\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\mu_{i3}-\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}\mu_{jj}+H_i\cdot H_j\left(\sigma_{j3}-\sigma_{3j}\right)=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\cdot\mu_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\cdot\mu_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1\cdot H_2\cdot\mu_{33}\right)-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\mu_{11}-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\mu_{22}+$$
$$+H_1\cdot H_2\left(\sigma_{12}-\sigma_{21}\right)=0; \tag{1.4}$$

физические соотношения термоупругости

$$\gamma_{ii}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{ii}-\nu\left(\sigma_{jj}+\sigma_{33}\right)\right]+\alpha_tT,\qquad \gamma_{33}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{33}-\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)\right]+\alpha_tT,$$
$$\gamma_{ij}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{ij}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{ji},\ \gamma_{i3}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i},\ \gamma_{3i}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3}, \tag{1.5}$$

$$\chi_{ii}=\frac{\gamma+\beta}{\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}\left[\mu_{ii}-\frac{\beta}{2\left(\beta+\gamma\right)}\left(\mu_{jj}+\mu_{33}\right)\right],$$

$$\chi_{33}=\frac{\gamma+\beta}{\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}\left[\mu_{33}-\frac{\beta}{2\left(\beta+\gamma\right)}\left(\mu_{11}+\mu_{22}\right)\right],$$

$$\chi_{ij}=\frac{1}{4\gamma\varepsilon}\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\mu_{ij}-\left(\gamma-\varepsilon\right)\mu_{ji}\right],\quad \chi_{i3}=\frac{1}{4\gamma\varepsilon}\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\mu_{i3}-\left(\gamma-\varepsilon\right)\mu_{ji}\right], \tag{1.6}$$

$$\chi_{3i}=\frac{1}{4\gamma\varepsilon}\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\mu_{3i}-\left(\gamma-\varepsilon\right)\mu_{i3}\right],$$

либо в обратной форме

$$\sigma_{ii}=\lambda\left(\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}\right)+2\mu\gamma_{ii}-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t T,$$

$$\sigma_{33}=\lambda\left(\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}\right)+2\mu\gamma_{33}-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha_t T,\ \sigma_{ij}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma_{ji},$$

$$\sigma_{i3}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{i3}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma_{3i},\quad \sigma_{3i}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{3i}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma_{i3},$$

$$\mu_{ii}=2\gamma\chi_{ii}+\beta\left(\chi_{11}+\chi_{22}+\chi_{33}\right),\quad \mu_{33}=2\gamma\chi_{33}+\beta\left(\chi_{11}+\chi_{22}+\chi_{33}\right),$$

$$\mu_{ij}=\left(\gamma+\varepsilon\right)\chi_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\chi_{ji},\quad \mu_{i3}=\left(\gamma+\varepsilon\right)\chi_{i3}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\chi_{3i},$$

$$\mu_{3i}=\left(\gamma+\varepsilon\right)\chi_{3i}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\chi_{i3};$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ii}=\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}V_j+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}V_3,$$

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial V_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}V_i+\left(-1\right)^i\omega_3, \tag{1.7}$$

$$\gamma_{i3}=\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}V_i+\left(-1\right)^j\omega_j,\ \gamma_{3i}=\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_3}+\left(-1\right)^i\omega_j,\ \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_3},$$

$$\chi_{ii}=\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\omega_j+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\omega_3,\ \ \chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_3},$$

$$\chi_{i3}=\frac{1}{H_j}\cdot\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\omega_1,\ \ \chi_{3i}=\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_3},\ \ \chi_{ij}=\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial\omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\omega_i. \tag{1.8}$$

Здесь $\sigma_{ii},\sigma_{ij},\sigma_{i3},\sigma_{3i},\sigma_{33},\mu_{ii},\mu_{ij},\mu_{i3},\mu_{3i},\mu_{33}$ – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $\gamma_{ii},\gamma_{ij},\gamma_{i3},\gamma_{3i},\gamma_{33},\chi_{ii},\chi_{ij},\chi_{i3},\chi_{3i},\chi_{33}$ –компоненты тензоров деформации и изгиба-кручений; $\vec{V}\left(V_1,V_2,V_3\right)$, $\vec{\omega}\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)$ – соответственно, вектор перемещений и вектор свободного поворота; T – функция температуры; $E,\nu\left(\mu=\dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)},\ \ \lambda=\dfrac{E\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\right)$, $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon-$ упругие константы микрополярного материала; α_t – линейный коэффициент температурного расширения; $i,j=1,2,\quad i\neq j;\ \ H_i=A_i\left(1+\dfrac{\alpha_3}{R_i}\right),\ \ H_3=1-$ коэффициенты Ляме криволинейной системы координат α_i,α_3, применяемые в теории оболочек [17], R_i – главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

К основным уравнениям микрополярной теории термоупругости (1.1)-(1.8) присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3=\pm h$ примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости:

$$\sigma_{3i}=\pm q_i^{\pm},\quad \sigma_{33}=\pm q_3^{\pm},\quad \mu_{3i}=\pm m_i^{\pm},\quad \mu_{33}=\pm m_3^{\pm}. \tag{1.9}$$

На поверхности края оболочки Σ, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, граничные условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или, в общем случае, в смешанном виде.

Следует отметить, что основной физической постоянной, удерживающей модель (1.1)-(1.9) на уровне микрополярной теории термоупругости, является упругий коэффициент α (при $\alpha = 0$ из указанной системы отделятся уравнения трёхмерной классической теории термоупругости).

2. Уравнение баланса энергии, энергетические теоремы, теорема взаимности Бетти и вариационный функционал трёхмерной термоупругости микрополярного тела.

Уравнение баланса энергии в трёхмерной теории микрополярной термоупругости имеет вид [7]:

$$\iint\limits_{S}\int\limits_{-h}^{h} WH_1H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha = A, \tag{2.1}$$

где $W-$плотность потенциальной энергии деформации:

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\big(\sigma_{11}\gamma_{11} + \sigma_{22}\gamma_{22} + \sigma_{23}\gamma_{33} + \sigma_{12}\gamma_{12} + \sigma_{21}\gamma_{21} + \sigma_{13}\gamma_{13} + \sigma_{23}\gamma_{23} + \sigma_{32}\gamma_{32} + \mu_{11}\chi_{11} +$$

$$+\mu_{22}\chi_{22} + \mu_{33}\chi_{33} + +\mu_{12}\chi_{12} + \mu_{13}\chi_{13} + \mu_{31}\chi_{31} + \mu_{23}\chi_{23} + \mu_{32}\chi_{32}\big) - \frac{\alpha_T T}{2}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right), \tag{2.2}$$

A – работа внешних поверхностных усилий и моментов на перемещениях и поворотах деформации:

$$A = \frac{1}{2}\Bigg\{\Bigg[\int\limits_{-h}^{h} d\alpha_3 \int\limits_{l_1}\left(\sigma_{21}^0 V_1 + \sigma_{22}^0 V_2 + \sigma_{23}^0 V_3 + \mu_{21}^0\omega_1 + \mu_{22}^0\omega_2 + \mu_{23}^0\omega_3\right) H_1 d\alpha_1 +$$

$$+\int\limits_{-h}^{h} d\alpha_3 \int\limits_{l_2}\left(\sigma_{11}^0 V_1 + \sigma_{12}^0 V_2 + \sigma_{13}^0 V_3 + \mu_{11}^0\omega_1 + \mu_{12}^0\omega_2 + \mu_{13}^0\omega_3\right) H_2 d\alpha_2 \Bigg] + \tag{2.3}$$

$$+\Bigg[\iint\limits_{S^+}\left(q_1^+ V_1 + q_2^+ V_2 + q_3^+ V_3 + m_1^+\omega_1 + m_2^+\omega_2 + m_3^+\omega_3\right) H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+\iint\limits_{S^-}\left(q_1^- V_1 + q_2^- V_2 + q_3^- V_3 + m_1^-\omega_1 + m_2^-\omega_2 + m_3^-\omega_3\right) H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \Bigg]\Bigg\}.$$

Плотность потенциальной энергии деформации (2.2) на основе закона Гука (1.5), (1.6) можно выражать либо через компоненты тензоров деформации и изгибов-кручений, либо через компоненты силовых и моментных напряжений. Представим плотность потенциальной энергии W через компоненты тензоров деформации и изгибов-кручений:

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\Big\{2\mu\left(\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2\right) + \lambda\left(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}\right)^2 + (\mu + \alpha)\left(\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{32}^2\right) +$$

$$+2(\mu - \alpha)\left(\gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{13}\gamma_{31} + \gamma_{23}\gamma_{32}\right) + 2\gamma\left(\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + \chi_{33}^2\right) + \beta\left(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33}\right)^2 + \tag{2.4}$$

$$+(\gamma + \varepsilon)\left(\chi_{12}^2 + \chi_{21}^2 + \chi_{13}^2 + \chi_{31}^2 + \chi_{23}^2 + \chi_{32}^2\right) + 2(\gamma - \varepsilon)\left(\chi_{12}\gamma_{21} + \chi_{13}\chi_{31} + \chi_{23}\chi_{32}\right)\Big\} -$$

$$-(3\lambda + 2\mu)\alpha_t T\left(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}\right) + \frac{3}{2}(3\lambda + 2\mu)\alpha_t^2 T^2.$$

Отметим, что подчёркнутый член в выражении W относится к температурному полю (его можно просто опустить).

Из формул (2.4) и (1.5), (1.6) вытекают следующие соотношения (типа формул Кастилиано) между величиной W и компонентами тензоров силовых-моментных напряжений и деформаций-изгибов-кручений:

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_{11}} = \sigma_{11},\ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{32}} = \sigma_{32},\ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \chi_{11}} = \mu_{11},\ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \chi_{32}} = \mu_{32}. \tag{2.5}$$

Отметим, что в трёхмерной микрополярной теории термоупругости имеет место и теорема взаимности Бетти, которая выражается следующим образом [7]:

$$\begin{aligned}
&\left\{\iint_{S^+}\left(q_1^+V_1'+q_2^+V_2'+q_3^+V_3'+m_1^+\omega_1'+m_2^+\omega_2'+m_3^+\omega_3'\right)H_1H_2d\alpha_1d\alpha_2+\right.\\
&+\iint_{S^-}\left(q_1^-V_1'+q_2^-V_2'+q_3^-V_3'+m_1^-\omega_1'+m_2^-\omega_2'+m_3^-\omega_3'\right)H_1H_2d\alpha_1d\alpha_2+\\
&+\int_{-h}^{+h}d\alpha_3\int_{l_1}\left(\sigma_{21}^0V_1'+\sigma_{22}^0V_2'+\sigma_{23}^0V_3'+\mu_{21}^0\omega_1'+\mu_{22}^0\omega_2'+\mu_{23}^0\omega_3'\right)H_1d\alpha_1+\\
&\left.+\int_{-h}^{+h}d\alpha_3\int_{l_2}\left(\sigma_{11}^0V_1'+\sigma_{12}^0V_2'+\sigma_{13}^0V_3'+\mu_{11}^0\omega_1'+\mu_{12}^0\omega_2'+\mu_{13}^0\omega_3'\right)H_2d\alpha_2\right\}- \qquad (2.6)\\
&-\left\{\iint_{S^+}\left(q_1^{+'}V_1+q_2^{+'}V_2+q_3^{+'}V_3+m_1^{+'}\omega_1+m_2^{+'}\omega_2+m_3^{+'}\omega_3\right)H_1H_2d\alpha_1d\alpha_2+\right.\\
&+\iint_{S^-}\left(q_1^{-'}V_1+q_2^{-'}V_2+q_3^{-'}V_3+m_1^{-'}\omega_1+m_2^{-'}\omega_2+m_3^{-'}\omega_3\right)H_1H_2d\alpha_1d\alpha_2+\\
&+\int_{-h}^{h}d\alpha_3\int_{l_1}\left(\sigma_{21}'^0V_1+\sigma_{22}'^0V_2+\sigma_{23}'^0V_3+\mu_{21}'^0\omega_1+\mu_{22}'^0\omega_2+\mu_{23}'^0\omega_3\right)H_1d\alpha_1+\\
&\left.+\int_{-h}^{h}d\alpha_3\int_{l_2}\left(\sigma_{11}'^0V_1+\sigma_{12}'^0V_2+\sigma_{13}'^0V_3+\mu_{11}'^0\omega_1+\mu_{12}'^0\omega_2+\mu_{13}'^0\omega_3\right)H_2d\alpha_2\right\}=\\
&=\alpha_T\iint_S\int_{-h}^{h}\left[T'\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)-T\left(\sigma_{11}'+\sigma_{22}'+\sigma_{33}'\right)\right]H_1H_2d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3.
\end{aligned}$$

Здесь имеем в виду два напряжённо-деформированных состояния микрополярного упругого тела, из которых первое характеризуется силовыми и моментными напряжениями σ_{mn},μ_{mn}, деформациями и изгибами-кручениями $\varepsilon_{mn},\chi_{mn}$, перемещениями и поворотами u_m,ω_m, возникающими под действием внешних сил и моментов: $q_1^\pm,q_2^\pm,q_3^\pm,m_1^\pm,m_2^\pm,m_3^\pm,\sigma_{21}^0$, $\sigma_{22}^0,\sigma_{23}^0,\mu_{21}^0,\mu_{22}^0$, $\mu_{23}^0,\sigma_{11}^0,\sigma_{12}^0,\sigma_{13}^0,\mu_{11}^0,\mu_{12}^0,\mu_{13}^0$ и температурного поля T, а второе – силовыми и моментными напряжениями σ_{mn}',μ_{mn}', деформациями и изгибами-кручениями $\varepsilon_{mn}',\chi_{mn}'$, перемещениями и поворотами u_m',ω_m', возникающими под действием внешних сил и моментов: $q_1^{\pm'}, q_2^{\pm'}, q_3^{\pm'}, m_1^{\pm'}, m_2^{\pm'}, m_3^{\pm'}, \sigma_{21}^{0'}$, $\sigma_{22}^{0'}, \sigma_{23}^{0'}, \mu_{21}^{0'}, \mu_{22}^{0'}$, $\mu_{23}^{0'}, \sigma_{11}^{0'}, \sigma_{12}^{0'}, \sigma_{13}^{0'}, \mu_{11}^{0'}, \mu_{12}^{0'}, \mu_{13}^{0'}$ и температурного поля T'.

Во многих случаях, как в классической теории упругости, так и в микрополярной теории упругости, для определения температурных напряжений эффективно применение вариационных методов. В связи с этим рассмотрим общий вариационный принцип в микрополярной теории термоупругости, функционал которого выражается следующим образом [7]:

$$
\begin{aligned}
I = \int_{-h}^{h}\iint_{S} \Bigg\langle W - \Bigg\{ & \sigma_{11}\left[\gamma_{11} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}V_2 + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3}V_3\right)\right] + \\
& + \sigma_{22}\left[\gamma_{22} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}V_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3}V_3\right)\right] + \sigma_{33}\left[\gamma_{33} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha_3}\right] + \\
& + \sigma_{12}\left[\gamma_{12} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}V_1 - \omega_3\right)\right] + \sigma_{21}\left[\gamma_{21} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}V_2 + \omega_3\right)\right] + \\
& + \sigma_{31}\left[\gamma_{31} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_3} - \omega_2\right)\right] + \sigma_{13}\left[\gamma_{13} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3}V_1 + \omega_2\right)\right] + \\
& + \sigma_{32}\left[\gamma_{32} - \left(\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_3} + \omega_1\right)\right] + \sigma_{23}\left[\gamma_{23} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3}V_2 - \omega_1\right)\right] + \\
& + \mu_{11}\left[\chi_{11} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\omega_2 + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3}\omega_3\right)\right] + \qquad (2.7) \\
& + \mu_{22}\left[\chi_{22} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\omega_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3}\omega_3\right)\right] + \mu_{33}\left[\chi_{33} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_3}\right] + \\
& + \mu_{12}\left[\chi_{12} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\omega_1\right)\right] + \mu_{21}\left[\chi_{21} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\omega_2\right)\right] + \\
& + \mu_{13}\left[\chi_{13} - \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3}\omega_1\right)\right] + \mu_{31}\left[\chi_{31} - \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_3}\right] + \\
& + \mu_{23}\left[\chi_{23} - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3}\omega_2\right)\right] + \mu_{32}\left[\chi_{32} - \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_3}\right]\Bigg\}\Bigg\rangle H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \\
& - \iint_{S^+}\left[q_1^+ V_1 + q_2^+ V_2 + q_3^+ V_3 + m_1^+\omega_1 + m_2^+\omega_2 + m_3^+\omega_3\right]_{\alpha_3 = h} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{S^-}\left[q_1^- V_1 + q_2^- V_2 + q_3^- V_3 + m_1^-\omega_1 + m_2^-\omega_2 + m_3^-\omega_3\right]_{\alpha_3 = -h} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_1'}\left(\sigma_{21}^0 V_1 + \sigma_{22}^0 V_2 + \sigma_{23}^0 V_3 + \mu_{21}^0\omega_1 + \mu_{22}^0\omega_2 + \mu_{23}^0\omega_3\right) H_1 d\alpha_1 +
\end{aligned}
$$

$$+\int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_1''} \Big[\sigma_{21}\left(V_1 - V_1^0\right) + \sigma_{22}\left(V_2 - V_2^0\right) + \sigma_{23}\left(V_3 - V_3^0\right) + \mu_{21}\left(\omega_1 - \omega_1^0\right) +$$

$$+\mu_{22}\left(\omega_2 - \omega_2^0\right) + \mu_{23}\left(\omega_3 - \omega_3^0\right)\Big] H_1 d\alpha_1 +$$

$$+\int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_2'} \left(\sigma_{11}^0 V_1 + \sigma_{12}^0 V_2 + \sigma_{13}^0 V_3 + \mu_{11}^0 \omega_1 + \mu_{12}^0 \omega_2 + \mu_{13}^0 \omega_3 \right) H_2 d\alpha_2 +$$

$$+\int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_2''} \Big[\sigma_{11}\left(V_1 - V_1^0\right) + \sigma_{12}\left(V_2 - V_2^0\right) + \sigma_{13}\left(V_3 - V_3^0\right) + \mu_{11}\left(\omega_1 - \omega_1^0\right) +$$

$$+\mu_{12}\left(\omega_2 - \omega_2^0\right) + \mu_{13}\left(\omega_3 - \omega_3^0\right)\Big] H_2 d\alpha_2,$$

здесь W является работой деформации, отнесённой к единице объёма (2.4). Функционал (2.7) назовём полным функционалом трёхмерной микрополярной теории термоупругости. На его основе можно получить вариационное уравнение: $\delta I = 0$, считая виртуальные приращения $\delta\gamma_{mn}$, $\delta\chi_{mn}$, δU_n, $\delta\omega_n$, $\delta\sigma_{mn}$, $\delta\mu_{mn}$ взаимно независимыми. Тогда, в качестве уравнений Эйлера будут выступать все основные уравнения (1.1)-(1.8), естественные граничные условия (1.9) и условия на Σ трёхмерной задачи микрополярной термоупругости.

3. Термоупругость микрополярных тонких оболочек.

Предполагается, что толщина оболочки весьма мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряжённо-деформированное состояние тонкого трёхмерного тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего напряжённо-деформированного состояния, охватывающего всю оболочку, и пограничного слоя, локализирующего вблизи поверхности края оболочки Σ. Построение общей прикладной-двумерной теории термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить теорию термоупругости микрополярных оболочек на основе метода гипотез. Сами гипотезы сформулируем на основе результата асимптотического анализа поставленной трёхмерной граничной задачи микрополярной теории термоупругости в тонкой трёхмерной области оболочки.

С учётом качественных результатов [15] асимптотического решения системы уравнений (1.1)-(1.8) с указанными выше граничными условиями, в основу предлагаемой ниже теории термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек можем ставить следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

1. В процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически можем записать так: перемещения точек тела-оболочки распределены по толщине оболочки по линейному закону следующим образом:

$$V_i = u_i\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + \alpha_3 \psi_i\left(\alpha_1, \alpha_2\right), \qquad V_3 = w\left(\alpha_1, \alpha_2\right), \tag{3.1}$$

кроме того, будем считать, что тангенциальные повороты и нормальный поворот также имеют линейное распределение по толщине оболочки следующего характера:

$$\omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2). \tag{3.2}$$

Отметим, что с точки зрения перемещений принятая гипотеза (3.1), по сути дела, совпадает с кинематической гипотезой Тимошенко в классической теории упругих оболочек [5, 6]. Гипотезу (3.1), (3.2), в целом, назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

2. Силовым напряжением σ_{33} в обобщённом законе Гука (1.5) можно пренебречь относительно силовых напряжений σ_{ii}, а также моментное напряжение μ_{3i} в обобщённом законе Гука (1.6) можно пренебречь относительно моментного напряжения μ_{i3}.

3. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2). \tag{3.3}$$

После вычисления указанных величин значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим путём прибавления к значениям (3.3) соответственно слагаемые, получаемые интегрированием первых двух (1.1) $(i = 1{,}2)$ и шестого уравнений равновесия (1.4), для которых потребуем выполнения условия, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

4. Принимаем, что температура по толщине оболочки меняется по линейному закону, а именно:

$$T = T_0(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_3}{h} \Delta T(\alpha_1, \alpha_2), \tag{3.4}$$

где $T_0 = \frac{1}{2}\left(T^+ + T^-\right), \quad (\Delta T) = T^+ - T^-,$ (3.5)

$T^+(\alpha_1, \alpha_2)$ и $T^-(\alpha_1, \alpha_2)$ – температуры соответственно на внешней $(\alpha_3 = h)$ и внутренней $(\alpha_3 = -h)$ поверхностях оболочки.

1. Величинами $\frac{\alpha_3}{R_i}$ по сравнению с единицей будем пренебрегать.

В соответствии с обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко (3.1), (3.2), для компонентов тензоров деформаций, изгиба-кручений из уравнений (1.7), (1.8) получим:

$$\gamma_{ii} = \Gamma_{ii}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 K_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \tag{3.6}$$

$$\gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{ij} = k_{ij}(\alpha_1, \alpha_2), \tag{3.7}$$

$$\chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 l_{i3}(\alpha_1, \alpha_2), \ \chi_{33} = k_{33}(\alpha_1, \alpha_2), \ \gamma_{33} = 0, \ \chi_{3i} = 0,$$

где

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \qquad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\qquad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i,$$

$$\Gamma_{i3}=-\vartheta_i+(-1)^j\,\Omega_j,\quad \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\,\Omega_j,\quad \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\tag{3.8}$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_i},\qquad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$

$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\qquad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},\quad k_{33}=\iota.$$

Далее, на основе обобщённого закона Гука (1.5), (1.6), уравнений равновесия (1.1)-(1.4) и принятых гипотез, для компонентов тензоров силовых и моментных напряжений будем иметь следующие окончательные формулы:

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right)-(1+\nu)\alpha_T T_0\right]+\alpha_3\frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(K_{ii}+\nu K_{jj}\right)-(1+\nu)\alpha_T\frac{\Delta T}{h}\right]$$

$$\sigma_{ij}=\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right]+\alpha_3\left[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}\right],$$

$$\sigma_{i3}=(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i},\tag{3.9}$$

$$\sigma_{33}=\overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\left\{-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2\sigma_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1\sigma_{23})}{\partial\alpha_2}\right]+\left(\frac{\overset{0}{\sigma}_{11}}{R_1}+\frac{\overset{0}{\sigma}_{22}}{R_2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{q_3^+-q_3^-}{2}+\alpha_3\frac{q_3^++q_3^-}{2h},$$

$$\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\left\{-\frac{1}{A_iA_j}\left[\frac{\partial\left(A_j\overset{0}{\sigma}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial\left(A_i\overset{0}{\sigma}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}\right]+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{0}{\sigma}_{jj}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{0}{\sigma}_{ij}-\frac{\sigma_{i3}}{R_i}\right\}+$$

$$+\left(\frac{\alpha_3^2}{2}-\frac{h^2}{6}\right)\left\{-\frac{1}{A_iA_j}\left[\frac{\partial\left(A_j\overset{1}{\sigma}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial\left(A_i\overset{1}{\sigma}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}\right]+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{1}{\sigma}_{jj}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{1}{\sigma}_{ij}\right\}$$

$$\overset{0}{\sigma}_{3i}=(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}+(\mu-\alpha)\Gamma_{i3},\qquad \mu_{ii}=(\beta+2\gamma)k_{ii}+\beta\left(k_{jj}+k_{33}\right),$$

$$\mu_{ij}=(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji},\qquad \overset{0}{\mu}_{33}=(\beta+2\gamma)\kappa_{33}+\beta\left(k_{11}+k_{22}\right),$$

$$\mu_{3i}=\overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\left\{-\frac{1}{A_iA_j}\left[\frac{\partial(A_i\mu_{ii})}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial(A_i\mu_{ji})}{\partial\alpha_j}\right]-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\mu_{ij}-\right.$$

$$\left.-\frac{\overset{0}{\mu}_{i3}}{R_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\mu_{jj}-(-1)^j\left(\sigma_{i3}-\overset{0}{\sigma}_{3j}\right)\right\}=\frac{m_i^+-m_i^-}{2}+\alpha_3\frac{m_i^++m_i^-}{2h},\tag{3.10}$$

$$\mu_{33}=\overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\left\{-\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right)+\left(\frac{\mu_{11}}{R_1}+\frac{\mu_{22}}{R_2}\right)-\left(\overset{0}{\sigma}_{12}-\overset{0}{\sigma}_{21}\right)\right\}+$$

$$+\left(\frac{\alpha_3^2}{2}-\frac{h^2}{6}\right)\left\{-\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial\left(A_2\overset{1}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right)-\left(\overset{1}{\sigma}_{12}-\overset{1}{\sigma}_{21}\right)\right\},$$

$$\mu_{i3}=\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{i3}+\alpha_3\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}.$$

Здесь $\overset{0}{\sigma}_{ii},\overset{0}{\sigma}_{ij},\overset{0}{\mu}_{i3},\overset{1}{\sigma}_{ii},\overset{1}{\sigma}_{ij},\overset{1}{\mu}_{i3}$ представляют собой соответственно постоянную и линейную по α_3 части силовых напряжений σ_{ii},σ_{ij} и моментного напряжения μ_{i3}.

С целью приведения трёхмерной задачи микрополярной теории термоупругости к двумерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных упругих тонких оболочек вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия $T_{ii},S_{ij},N_{i3},N_{3i}$, моменты $M_{ii},H_{ij},L_{ii},L_{ij}$, L_{i3},L_{33} и гипермоменты Λ_{i3}, которые с учётом предположения 4) выражаются следующим образом:

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}d\alpha_3,\quad S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}d\alpha_3,\quad N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}d\alpha_3,\quad N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}d\alpha_3,$$

$$M_{ii}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\sigma_{ii}d\alpha_3,\quad H_{ij}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\sigma_{ij}d\alpha_3,\quad L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}d\alpha_3,\quad L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}d\alpha_3, \tag{3.11}$$

$$L_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}d\alpha_3,\quad L_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}d\alpha_3,\quad \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\mu_{i3}d\alpha_3.$$

Основная система уравнений термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений выразится так:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(q_i^++q_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(M_{ii}-M_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)-N_{3i}=-h\left(q_i^+-q_i^-\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]=q_3^++q_3^-,$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+\frac{L_{i3}}{R_i}+ \tag{3.12}$$

$$+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\left(m_i^+ + m_i^-\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=\left(m_3^+ + m_3^-\right),$$

$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(H_{12}-H_{21}\right)=h\left(m_3^+ - m_3^-\right);$$

физические соотношения термоупругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\left(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right)-(1+\nu)\Gamma_T\right],\qquad S_{ij}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right],$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[\left(K_{ii}+\nu K_{jj}\right)-(1+\nu)K_T\right],\quad H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}\right],$$

$$N_{i3}=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{3i},\quad N_{3i}=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{i3},$$

$$L_{ii}=2h\left[(\beta+2\gamma)\kappa_{ii}+\beta\left(\kappa_{jj}+\iota\right)\right], \tag{3.13}$$

$$L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}\right],\qquad L_{33}=2h\left[(\beta+2\gamma)\iota+\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\right],$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}\right],\quad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}\right].$$

Здесь

$$\Gamma_T=\frac{1}{2h}\alpha_t\int_{-h}^{h}Td\alpha_3=\alpha_tT_0,\; K_T=\frac{3}{2h^3}\alpha_t\int_{-h}^{h}T\alpha_3d\alpha_3=\alpha_t\frac{\Delta T}{h}. \tag{3.14}$$

К уравнениям равновесия (3.12) и соотношениям термоупругости (3.13) микрополярных оболочек следует присоединить геометрические соотношения (3.8).

Представим «смягчённые» граничные условия на граничном контуре Г срединной поверхности оболочки, считая, что этот контур совпадает с координатной линией $\alpha_1=\mathrm{const}$ [13]:

$$T_{11}=T_{11}^* \text{ или } u_1=u_1^*,\quad S_{12}=S_{12}^* \text{ или } u_2=u_2^*,\quad N_{13}=N_{13}^* \text{ или } w=w^*,$$
$$M_{11}=M_{11}^* \text{ или } K_{11}=K_{11}^*,\quad H_{12}=H_{12}^* \text{ или } K_{12}=K_{12}^*, \tag{3.15}$$
$$L_{11}=L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\quad L_{12}=L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,$$
$$L_{13}=L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13}=\kappa_{13}^*,\quad \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13}=l_{13}^*.$$

Система уравнений (3.12), (3.13), (3.8) и граничные условия (3.15) представляют собой математическую модель термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Эта модель представляет собой систему дифференциальных уравнений 18-го порядка с 9-ю граничными условиями на каждом из контуров срединной поверхности оболочки Γ. Это – система из 52 уравнений относительно 52 неизвестных функций: $u_i, w, \psi_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota, \vartheta_i, T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, M_{ii},\ H_{ij},\ L_{ii}, L_{ij},\ L_{33}, L_{i3}, \Lambda_{i3},\ \Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii},\ K_{ij}, \kappa_{ii},\ \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}$.

Отметим, что при $\alpha=0$ из модели (3.12), (3.13), (3.8), (3.15) будут отделяться: система уравнений и граничные условия классической термоупругости тонких оболочек типа Тимошенко [5, 6] с учётом деформаций сдвига (с некоторым отличием, связанным с нашей статической гипотезой 3)).

Если в математической модели оболочки (3.12), (3.13), (3.8), (3.15) вместо главных кривизн срединной поверхности $\frac{1}{R_i}\left(i=1,2\right)$ подставить ноль, то получим независимо друг от друга основные уравнения и граничные условия термоупругости микрополярных тонких пластин для обобщённого плоского напряжённого состояния и изгиба.

4. Уравнение баланса энергии, энергетические теоремы, теорема взаимности и вариационный функционал термоупругости микрополярных тонких оболочек.

С учётом принятых гипотез 1)-5), полученные на их основе выражения для перемещений и поворотов (3.1), (3.2), компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений (3.6), (3.7), (3.9), (3.10) (с учётом формул (3.11)), произведя в уравнении баланса энергии (2.1) трёхмерной теории микрополярной термоупругости интегрирование по толщинной координате α_3 в пределах от $-h$ до $+h$, приходим к уравнению баланса энергии для прикладной теории термоупругости микрополярных тонких оболочек:

$$\iint\limits_S W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = A_0, \tag{4.1}$$

где W_0 – плотность потенциальной энергии деформации прикладной теории термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек:

$$\begin{gathered} W_0=\frac{1}{2}\left(T_{11}\Gamma_{11}+T_{22}\Gamma_{22}+S_{12}\Gamma_{12}+S_{21}\Gamma_{21}+M_{11}K_{11}+M_{22}K_{22}+H_{12}K_{12}+H_{21}K_{21}+\right. \\ +N_{13}\Gamma_{13}+N_{31}\Gamma_{31}+N_{23}\Gamma_{23}+N_{32}\Gamma_{32}+L_{11}k_{11}+L_{22}k_{22}+L_{33}k_{33}+L_{12}k_{12}+L_{21}k_{21}+ \\ \left.+L_{13}k_{13}+L_{23}k_{23}+\Lambda_{13}l_{13}+\Lambda_{23}l_{23}\right)-\frac{\alpha_T}{2}\left(T_{11}+T_{22}\right)T_0-\frac{\alpha_T}{2h}\left(M_{11}+M_{22}\right)\Delta T, \end{gathered} \tag{4.2}$$

A_0 – работа внешних усилий, моментов и гипермоментов:

$$\begin{gathered} A_0=\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{l_1}\left(S_{21}^0u_1+H_{21}^0\psi_1+T_{22}^0u_2+M_{22}^0\psi_2+N_{23}^0w+L_{21}^0\Omega_1+L_{22}^0\Omega_2+L_{33}^0\Omega_3+\Lambda_{23}^0\iota\right)A_1d\alpha_1+\right. \\ +\int\limits_{l_2}\left(T_{11}^0u_1+M_{11}^0\psi_1+S_{12}^0u_1+H_{12}^0\psi_2+N_{13}^0w+L_{11}^0\Omega_1+L_{12}^0\Omega_2+L_{23}^0\Omega_3+\Lambda_{23}^0\iota\right)A_2d\alpha_2+ \\ +\iint\limits_S\Big[\left(q_1^++q_1^-\right)u_1+\left(q_1^+-q_1^-\right)h\psi_1+\left(q_2^++q_2^-\right)u_2+\left(q_2^+-q_2^-\right)h\psi_2+ \\ \left.+\left(q_3^++q_3^-\right)w+\left(m_1^++m_1^-\right)\Omega_1+\left(m_2^++m_2^-\right)\Omega_2+\left(m_3^++m_3^-\right)\Omega_3+\left(m_3^++m_3^-\right)h\iota\Big]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2\right\}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Плотность потенциальной энергии деформации W_0 на основе физических соотношений (3.13) можно выражать через компоненты деформаций-изгибов-кручений (3.8) прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек:

$$\begin{gathered} W_0=\frac{1}{2}\left\langle\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{11}^2+\Gamma_{22}^2+2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22}\right)+\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{11}^2+K_{22}^2+2\nu K_{11}K_{22}\right)+\right. \\ +\left[2h\left(\mu+\alpha\right)\left(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{21}^2\right)+2\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{12}\Gamma_{21}\right]+ \end{gathered}$$

$$+\frac{2h^3}{3}\Big[(\mu+\alpha)\big(K_{12}^2+K_{21}^2\big)+2(\mu-\alpha)K_{12}K_{31}\Big]+$$

$$+2h\Big[(\mu+\alpha)\big(\Gamma_{13}^2+\Gamma_{31}^2+\Gamma_{23}^2+\Gamma_{32}^2\big)+2(\mu-\alpha)\big(\Gamma_{13}\Gamma_{31}+\Gamma_{23}\Gamma_{32}\big)\Big]+ \quad (4.4)$$

$$+2h\Big[(\beta+2\gamma)\big(k_{11}^2+k_{22}^2+k_{33}^2\big)^2+2\beta\big(k_{11}k_{22}+k_{11}k_{33}+k_{22}k_{33}\big)\Big]+2h\Big[(\gamma+\varepsilon)\big(k_{12}^2+k_{21}^2\big)+$$

$$+2(\gamma-\varepsilon)k_{12}k_{21}\Big]+2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\big(k_{13}^2+k_{23}^2\big)+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\big(l_{13}^2+l_{23}^2\big)\Big\rangle-\frac{2Eh}{1-\nu}\big(\Gamma_{11}+\Gamma_{22}\big)\alpha_T T_0-$$

$$-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)}\big(K_{11}+K_{22}\big)\alpha_T\frac{\Delta T}{h}-\underline{\frac{2Eh}{1-\nu}\alpha_T^2T_0^2}-\underline{\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)}\alpha_T^2\left(\frac{\Delta T}{h}\right)^2}.$$

Отметим, что в формуле (4.4) можно не учитывать двух последних подчёркнутых слагаемых, т.к. они относятся к температурному полю.

На основе уравнения энергетического баланса (4.1) в микрополярной термоупругости тонких оболочек можем доказать теорему единственности, теорему существования и другие энергетические теоремы, а также обосновать вариационные методы Ритца и Бубнова-Галеркина [18] для решения краевой задачи (3.12), (3.13), (3.8), (3.15). В частности, на основе (4.4) имеют место следующие формулы:

$$T_{11}=\frac{\partial W_0}{\partial\Gamma_{11}},\ S_{12}=\frac{\partial W_0}{\partial\Gamma_{12}},\ \ldots,\ M_{11}=\frac{\partial W_0}{\partial K_{11}},\ H_{12}=\frac{\partial W_0}{\partial K_{12}},\ \ldots,\ L_{11}=\frac{\partial W_0}{\partial k_{11}},\ldots \quad (4.5)$$

В прикладной теории термоупругости микрополярных тонких оболочек имеет место теорема взаимности Бетти. Для доказательства этой теоремы на основании уравнений равновесия (3.12) легко прийти к следующему равенству:

$$-\int_{l_1}\big(S_{21}u_1'+T_{22}u_2'+N_{23}w'+H_{21}\psi_1'+M_{22}\psi_2'+L_{21}\Omega_1'+L_{22}\Omega_2'+L_{23}\Omega_3'+\Lambda_{23}\iota'\big)A_1d\alpha_1+$$

$$+\int_{l_2}\big(T_{11}u_1'+S_{12}u_2'+N_{13}w'+M_{11}\psi_1'+H_{12}\psi_2'+L_{11}\Omega_1'+L_{12}\Omega_2'+L_{13}\Omega_3'+\Lambda_{13}\iota'\big)A_2d\alpha_2-$$

$$-\iint_{(S)}\big(T_{11}\Gamma_{11}'+T_{22}\Gamma_{22}'+S_{12}\Gamma_{12}'+S_{21}\Gamma_{21}'+N_{13}\Gamma_{13}'+N_{31}\Gamma_{31}'+N_{23}\Gamma_{23}'+N_{32}\Gamma_{32}'+ \quad (4.6)$$

$$+M_{11}K_{11}'+M_{22}K_{22}'+H_{12}K_{12}'+H_{21}K_{21}'+L_{11}k_{11}'+L_{22}k_{22}'+L_{12}k_{12}'+L_{21}k_{21}'+$$

$$+L_{13}k_{13}'+L_{23}k_{23}'+\Lambda_{13}l_{13}'+\Lambda_{23}l_{23}'+L_{33}k_{33}'\big)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2=$$

$$=-\iint_{(S)}\Big[\big(q_1^++q_1^-\big)u_1'+\big(q_2^++q_2^-\big)u_2'+\big(q_3^++q_3^-\big)w'+h\big(q_1^+-q_1^-\big)\psi_1'+h\big(q_2^+-q_2^-\big)\psi_2'+$$

$$+\big(m_1^++m_1^-\big)\Omega_1'+\big(m_2^++m_2^-\big)\Omega_2'+\big(m_3^++m_3^-\big)\Omega_3'+h\big(m_3^+-m_3^-\big)\iota'\Big]A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2.$$

Используя физические соотношения (3.13), можно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$T_{11}\Gamma_{11}'+T_{22}\Gamma_{22}'+S_{12}\Gamma_{12}'+S_{21}\Gamma_{21}'+N_{13}\Gamma_{13}'+N_{31}\Gamma_{31}'+N_{23}\Gamma_{23}'+N_{32}\Gamma_{32}'+M_{11}K_{11}'+$$

$$+M_{22}K_{22}'+H_{12}K_{12}'+H_{21}K_{21}'+L_{11}k_{11}'+L_{22}k_{22}'+L_{12}k_{12}'+L_{21}k_{21}'+L_{13}k_{13}'+L_{23}k_{23}'+$$

$$+\Lambda_{13}l_{13}'+\Lambda_{23}l_{23}'+L_{33}k_{33}'=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\big(\Gamma_{11}\Gamma_{11}'+\Gamma_{22}\Gamma_{22}'\big)+\frac{2Eh\nu}{1-\nu^2}\big(\Gamma_{22}\Gamma_{11}'+\Gamma_{11}\Gamma_{22}'\big)+$$

$$+2h(\mu+\alpha)\big(\Gamma_{12}\Gamma_{12}'+\Gamma_{21}\Gamma_{21}'+\Gamma_{13}\Gamma_{13}'+\Gamma_{23}\Gamma_{23}'+\Gamma_{31}\Gamma_{31}'+\Gamma_{32}\Gamma_{32}'\big)+ \quad (4.7)$$

$$+2h(\mu-\alpha)\left(\Gamma_{21}\Gamma'_{12}+\Gamma_{12}\Gamma'_{21}+\Gamma_{31}\Gamma'_{13}+\Gamma_{13}\Gamma'_{31}+\Gamma_{32}\Gamma'_{23}+\Gamma_{23}\Gamma'_{32}\right)+$$

$$+\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(K_{11}K'_{11}+K_{22}K'_{22}\right)+\frac{2Eh^3\nu}{3(1-\nu^2)}\left(K_{22}K'_{11}+K_{11}K'_{22}\right)+$$

$$+\frac{2h^3}{3}(\mu+\alpha)\left(K_{12}K'_{12}+K_{21}K'_{21}\right)+\frac{2h^3}{3}(\mu-\alpha)\left(K_{21}K'_{12}+K_{12}K'_{21}\right)+$$

$$+2h(\beta+2\gamma)\left(k_{11}k'_{11}+k_{22}k'_{22}+k_{33}k'_{33}\right)+2h\beta\left(k_{11}k'_{22}+k_{33}k'_{22}+k_{11}k'_{33}+k_{22}k'_{33}+\right.$$

$$\left.+k_{22}k'_{11}+k_{33}k'_{11}\right)+2h(\gamma+\varepsilon)\left(k_{12}k'_{12}+k_{21}k'_{21}\right)+2h(\gamma-\varepsilon)\left(k_{21}k'_{12}+k_{12}k'_{21}\right)+$$

$$+2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{13}k'_{13}+2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{23}k'_{23}+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}l'_{13}+\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}l'_{23}-$$

$$-\frac{2Eh}{1-\nu}\alpha_T T_0\left(\Gamma'_{11}+\Gamma'_{22}\right)-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)}\alpha_T\frac{\Delta T}{h}\left(K'_{11}+K'_{22}\right).$$

Имея в виду симметричность выражения (4.7), из равенства (4.6) получим теорему взаимности Бетти для прикладной теории термоупругости микрополярных тонких оболочек:

$$\left\langle\int_{l_1}\left[\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{22}\,d\alpha_3\right)u'_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{21}\,d\alpha_3\right)u'_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{23}\,d\alpha_3\right)w'+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{22}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\psi'_2+\right.\right.$$

$$+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{21}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\psi'_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu}_{21}\,d\alpha_3\right)\Omega'_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu}_{22}\,d\alpha_3\right)\Omega'_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu}_{23}\,d\alpha_3\right)\Omega'_3+$$

$$\left.+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu}_{23}\,d\alpha_3\right)\iota'\right]A_1 d\alpha_1+\int_{l_2}\left[\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{11}\,d\alpha_3\right)u'_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{12}\,d\alpha_3\right)u'_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{13}\,d\alpha_3\right)w'+\right.$$

$$+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{11}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\psi'_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma}_{12}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\psi'_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu}_{11}\,d\alpha_3\right)\Omega'_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu}_{12}\,d\alpha_3\right)\Omega'_2+$$

$$\left.+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu}_{13}\,d\alpha_3\right)\Omega'_3+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu}_{13}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\iota'\right]A_2 d\alpha_2+\iint_{(S)}\left[\left(q_1^++q_1^-\right)u'_1+\left(q_2^++q_2^-\right)u'_2+\right.$$

$$+\left(q_3^++q_3^-\right)w'+h\left(q_1^+-q_1^-\right)\psi'_1+h\left(q_2^+-q_2^-\right)\psi'_2+\left(m_1^++m_1^-\right)\Omega'_1+\left(m_2^++m_2^-\right)\Omega'_2+$$

$$\left.\left.+\left(m_3^++m_3^-\right)\Omega'_3+h\left(m_3^+-m_3^-\right)\iota'\right]A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2\right\rangle-\left\langle\int_{l_1}\left[\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{22}\,d\alpha_3\right)u_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{21}\,d\alpha_3\right)u_1+\right.\right.$$

$$+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{23}\,d\alpha_3\right)w'+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{22}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\psi_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{21}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\psi_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu'}_{21}\,d\alpha_3\right)\Omega_1+$$

$$\left.+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu'}_{22}\,d\alpha_3\right)\Omega_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu'}_{23}\,d\alpha_3\right)\Omega_3+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu'}_{23}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\iota\right]A_1 d\alpha_1+\qquad(4.8)$$

$$+\int_{l_2}\left[\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{11}\,d\alpha_3\right)u_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{12}\,d\alpha_3\right)u_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{13}\,d\alpha_3\right)w+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{11}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\psi_1+\right.$$

$$+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\sigma'}_{12}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\psi_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu'}_{11}\,d\alpha_3\right)\Omega_1+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu'}_{12}\,d\alpha_3\right)\Omega_2+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu'}_{13}\,d\alpha_3\right)\Omega_3+$$

$$+\left(\int_{-h}^{h}\overset{0}{\mu'}_{13}\,\alpha_3 d\alpha_3\right)\iota\Bigg]A_2 d\alpha_2+\iint_{(S)}\Big[\left(q_1'^{+}+q_1'^{-}\right)u_1+\left(q_2'^{+}+q_2'^{-}\right)u_2+\left(q_3'^{+}+q_3'^{-}\right)w+$$

$$+h\left(q_1'^{+}-q_1'^{-}\right)\psi_1+h\left(q_2'^{+}-q_2'^{-}\right)\psi_2+\left(m_1'^{+}+m_1'^{-}\right)\Omega_1+\left(m_2'^{+}+m_2'^{-}\right)\Omega_2+$$

$$+\left(m_3'^{+}+m_3'^{-}\right)\Omega_3+h\left(m_3'^{+}-m_3'^{-}\right)\iota'\Big]A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2\Big\rangle=\iint_S\left\{\left[\frac{2Eh}{1-\nu}\alpha_T\left(\Gamma_{11}+\Gamma_{22}\right)T_0'+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)}\alpha_T\frac{\Delta T'}{h}\left(K_{11}+K_{22}\right)\right]-\left[\frac{2Eh}{1-\nu}\alpha_T\left(\Gamma_{11}'+\Gamma_{22}'\right)T_0+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)}\alpha_T\frac{\Delta T}{h}\left(K_{11}'+K_{22}'\right)\right]\right\}A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.$$

На основании вариационного функционала (2.7) трёхмерной задачи микрополярной термоупругости, при помощи формул (3.1), (3.2), (3.6), (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) получим вариационный функционал прикладной теории термоупругости микрополярных тонких оболочек:

$$I_0=\iint_S\Bigg\langle W_0-\Bigg\{T_{11}\left[\Gamma_{11}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2+\frac{w}{R_1}\right)\right]+$$

$$+M_{11}\left[K_{11}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_2\right)\right]+T_{22}\left[\Gamma_{22}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_1\right)\right]+$$

$$+S_{12}\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_1-\Omega_3\right)\right]+M_{12}\left[K_{12}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_1-\iota\right)\right]+$$

$$+S_{21}\left[\Gamma_{21}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_2+\Omega_3\right)\right]+M_{21}\left[K_{21}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_2+\iota\right)\right]+$$

$$+N_{31}\left[\Gamma_{31}-\left(\psi_1-\Omega_2\right)\right]+N_{13}\left[\Gamma_{13}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{u_1}{R_1}+\Omega_2\right)\right]+$$

$$+N_{32}\left[\Gamma_{32}-\left(\psi_2+\Omega_1\right)\right]+N_{23}\left[\Gamma_{23}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\frac{u_2}{R_2}-\Omega_1\right)\right]+$$

$$+L_{11}\left[k_{11}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_1}\right)\right]+$$

$$+L_{22}\left[k_{22}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_1+\frac{\Omega_3}{R_1}\right)\right]+L_{33}\left(k_{33}-\iota\right)+ \qquad (4.9)$$

$$+L_{32}\left[k_{12}-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1\right)\right]+L_{21}\left[k_{21}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2\right)\right]+$$

$$+L_{13}\left[k_{13}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_1}-\frac{\Omega_1}{R_1}\right)\right]+\Lambda_{13}\left[l_{13}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_1}\right]+$$

$$\left.\left.+L_{23}\left[k_{23}-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_2}-\frac{\Omega_3}{R_2}\right)\right]+\Lambda_{23}\left[l_{23}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_2}\right]\right\}\right\rangle A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2-$$

$$-\iint_S\left(q_1^+u_1+q_1^+h\psi_1+q_2^+u_2+q_2^+h\psi_2+q_3^+w+m_1^+\Omega_1+m_2^+\Omega_2+\right.$$

$$\left.+m_3^+\Omega_3+m_3^+h\iota\right)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+\iint_S\left(q_1^-u_1-q_1^-h\psi_1+q_2^-u_2-q_2^-h\psi_2+q_3^-w+m_1^-\Omega_1+m_2^-\Omega_2+\right.$$

$$\left.+m_3^-\Omega_3-m_3^-h\iota\right)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+$$

$$+\int_{l_1'}\left(S_{21}^0u_1+T_{22}^0u_2+H_{21}^0\psi_1+M_{22}^0\psi_2+N_{23}^0w+L_{21}^0\Omega_1+L_{22}^0\Omega_2+L_{23}^0\Omega_3+\Lambda_{23}^0\iota\right)A_1d\alpha_1+$$

$$+\int_{l_1''}\left[S_{21}\left(u_1-u_1^0\right)+H_{21}\left(\psi_1-\psi_1^0\right)+T_{22}\left(u_2-u_2^0\right)+M_{22}\left(\psi_2-\psi_2^0\right)+N_{23}\left(w-w^0\right)+\right.$$

$$\left.+L_{21}\left(\Omega_1-\Omega_1^0\right)+L_{22}\left(\Omega_2-\Omega_2^0\right)+L_{23}\left(\Omega_3-\Omega_3^0\right)+\Lambda_{23}\left(\iota-\iota^0\right)\right]A_1d\alpha_1+$$

$$+\int_{l_2'}\left(T_{11}^0u_1+M_{11}^0\psi_1+S_{12}^0u_2+H_{12}^0\psi_2+N_{13}^0w+L_{11}^0\Omega_1+L_{12}^0\Omega_2+L_{13}^0\Omega_3+\Lambda_{13}^0\iota\right)A_2d\alpha_2+$$

$$+\int_{l_2''}\left[T_{11}\left(u_1-u_1^0\right)+M_{11}\left(\psi_1-\psi_1^0\right)+S_{12}\left(u_2-u_2^0\right)+H_{12}\left(\psi_2-\psi_2^0\right)+\right.$$

$$\left.+N_{13}\left(w-w_0\right)+L_{11}\left(\Omega_1-\Omega_1^0\right)+L_{12}\left(\Omega_2-\Omega_2^0\right)+L_{13}\left(\Omega_3-\Omega_3^0\right)+\Lambda_{13}\left(\iota-\iota^0\right)\right]A_2d\alpha_2.$$

Варьируя I_0 по всем независимым функциональным аргументам, из вариационного уравнения $\delta I_0=0$ получим основные уравнения и граничные условия ((3.12)-(3.13), (3.8), (3.15)) микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что с точки зрения приведённого утверждения, сформулированная выше вариационная задача соответствует наиболее общему вариационному принципу термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек. Поэтому, из последнего, как частный случай, будут следовать экстремальные принципы термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек типа принципов Лагранжа и Кастилиано. К каждому из полученных вариационных уравнений могут быть приложены прямые методы приближённого их решения (в частности, методы Ритца и Галеркина [18]), сводящие граничную задачу теории микрополярных упругих тонких оболочек к решению системы алгебраических уравнений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2c154.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Изд-во «Мир», 1964. 518с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 564с.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Изд-во «Вища школа», 1975. 216с.
4. Подстригач Я.С., Швац Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Изд-во «Наукова думка», 1978. 344с.
5. Швец Р.Н., Лунь Е.И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учётом инерции вращения и поперечного сдвига //Прикладная механика. 1971. Т.7. № 10. С.121-125.
6. Подстригач Я.С., Пелех Б.Л. Термоупругие задачи для оболочек и пластин с низкой сдвиговой жёсткостью //В сб.: «Тепловые напряжения в элементах конструкций». 1970. Вып.10. С.17-23.
7. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, Ets. «Pergamon Press», 1986. 383p.
8. Nowacki W. Couple-Stresses in the Theory of Thermoelasticity // Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids. IUTAM Symposia.Vienna, 1966. P.260-278.
9. Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругости //Прикладная механика. 1967. Т.3. № 1. С.3-17.
10. Саркисян С.О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин // Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.
11. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып.2. С.325-343.
12. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С.148-155.
13. Sargsyan S. H. General Theory of Micropolar Elastic Thin Shells// Journal of Physical Mesomechanics. 2012. V.15. №1-2. P.69-79.
14. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады РАН. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
15. Sargsyan S.H. Termoelasticity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity//Journal of Thermal Stresses. 2009. Vol.32. №8. P.791-818.
16. Саркисян С.О. Термоупругость микрополярных тонких оболочек// В сборнике научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 8-12 октября 2012. Цахкадзор. Армения. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2012. С.184-189.
17. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
18. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Изд-во «Наука», 1970. 512с.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. Вышей математики Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.

Тел.: (093) 15 16 98

E-mail: s_sargsyan@yahoo.com; slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 14.10.2013