ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №1, 2014 Механика

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОСЛОЕ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПО ТОЛЩИНЕ

Камалян А.А.

Ключевые слова: электроупругие волны, неоднородный пьезоэлектрический слой, распределение напряжений по толщине слоя
Key Words: electroelastic waves, inhomogeneous piezoelectric medium, tension distribution over the thickness of the layer

Քամալյան Ա.Ա.

Էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը ըստ հաստության եռանկյունաչափական անհամասեռությամբ օժտված պիեզոշերտում

Տվյալ աշխատանքը հանդիսանում է [4]-ի շարունակությունը: Ուսումնասիրված է եռանկյունաչափական անհամասեռությամբ օժտված շերտում էլեկտրաառաձգական մոնոխրոմատիկ ալիքի տարածումը: Կատարվել է ալիքի տարածումը բնութագրող դիսպերսիոն հավասարման հետազոտություն, բերված են ալիքի վարքը բնութագրող թվային տվյալներ և որոշ համեմատություններ:

Kamalyan A.A.

On problem of electroelastic wave propagationin trigonometrically graded piezoelectric layer

This paper is a continuation of paper [4]. Here the propagation of electroelastic waves in trigonometrically graded layer (over thickness) made of 6mm piezoceramics is investigated. Electroelastic and mechanical characteristics of the layer (metalized and tension free surface) are variations of the trigonometric function, which is derived here. The dispersion of shear wave is analized and the numerical data is added.

Данная работа является продолжением статьи [4], где рассматривались задачи распространения волны при классической постановке и при некотором типе неоднородности пьезоэлектрического слоя по толщине. Здесь исследована аналогичная модель распространения поверхностной электроупругой волны в пьезослое класса 6mm с другой вариацией физико-механических параметров по толщине. Приведены численные результаты характеристик распространения волн в среде и проведены сравнения с аналогичными данными, полученными в работе [4].

1. Исследуется возможность распространения поверхностной электроупругой монохроматической волны вдоль оси Ox в пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии (класса 6mm), которая занимает в прямоугольной системе координат $(x; y; z)$ область $-\infty < x < \infty;\ 0 \le y \le 2h;\ -\infty < z < \infty$ и имеющей неоднородность по толщине. Координатная ось Oz параллельна оси симметрии пьезокристалла, плоскость xOy есть плоскость изотропии, а поверхности слоя $y = 0; y = 2h$ свободны от нагрузок и заземлены.

$$\sigma_{yz} = 0;\ \ \varphi = 0\,. \tag{1.1}$$

Другие варианты граничных условий для рассматриваемого слоя представлены в статье [5].

В данной работе исследуется антиплоская задача распространения упругой волны с учётом потенциального квазистатического электрического поля.

Запишем систему уравнений, описывающую вышеупомянутую задачу:

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}=\rho_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}=0 \tag{1.3}$$

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi.$$

Неоднородность характеристик пьезоэлектрика по толщине характеризуется единой безразмерной функцией $a(y)$, удовлетворящей условию $a(0)=1,\ a(0)>0$ [6]. Физико-механические характеристики материала (а именно: C_{44} –модуль сдвига, e_{15} –пьезоэлектрический модуль, ε_{11} – диэлектрическая проницаемость и ρ – плотность материала) будут зависеть от толщины следующим образом:

$$e_{15}(y)=e_{15}^0 a(y),\qquad \varepsilon_{11}(y)=\varepsilon_{11}^0 a(y)$$
$$C_{44}(y)=C_{44}^0 a(y),\qquad \rho(y)=\rho_0 a(y) \tag{1.4}$$

Здесь $C_{44}^0,\ e_{15}^0,\ \varepsilon_{11}^0,\ \rho_0$ являются постоянными. Поверхность $y=0$ с характеристиками $C_{44}^0,\ e_{15}^0,\ \varepsilon_{11}^0,\ \rho_0$ назовём калибровочной поверхностью.

Для пьезоэлектрического слоя класса 6mm с неоднородностью (1.4) касательные напряжения σ_{xz},σ_{yz} и нормальные компоненты электрического поля D_x,D_y принимают вид:

$$\sigma_{xz}=C_{44}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial x}+e_{15}^0 a(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \sigma_{yz}=C_{44}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial y}+e_{15}^0 a(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1.5}$$

$$D_x=e_{15}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial x}-\varepsilon_{11}^0 a(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad D_y=e_{15}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial y}-\varepsilon_{11}^0 a(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1.6}$$

Подставив (1.5), (1.6) в уравнения (1.2),(1.3), с помощью элементарных преобразований получим систему уравнений, описывающую поведение среды с принятым типом неоднородности.

$$\nabla^2 W+\frac{a'}{a}\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\rho_0}{C_{44}^0(1+\chi_0)}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{a'}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0}\left[\nabla^2 W+\frac{a'}{a}\frac{\partial W}{\partial y}\right] \tag{1.8}$$

Здесь $\chi_0=\dfrac{e_{15}^{0\,2}}{C_{44}^0\varepsilon_{11}^0}$ – коэффициент электромеханической связи для калибровочной поверхности.

В дальнейшем величина коэффициента электромеханической связи будет нужна при выявлении существования волн и расчёте их скоростей. В табл.1 приведены физико-механические характеристики и величины коэффициентов электромеханической связи некоторых пьезокерамических материалов класса 6mm.

Таблица 1

	CdS(χ_1) [3]	ZnO (χ_2) [1]	PZT-7 (χ_3) [9]	PZT-5H (χ_4) [10]	PZT-4 (χ_5) [1]
$C_{44}\cdot 10^{10}\ Н/м^2$	1.49	4.25	2.5	2.3	2.56
$\rho\cdot 10^3\ кг/м^3$	4.82	5.68	7.8	7.5	7.5
$e_{15}\cdot Кл/м^2$	-0.21	-0.59	13.5	-17.0	12.7
$\varepsilon_{11}\cdot 10^{-11}\ Ф/м$	7.99	7.38	1710	22.71	6.45
χ_0	0.03	0.11	0.42	0.55	0.97
$C_t\cdot м/с$	1784	2881	2133	2180	2593

Монохроматические решения для системы уравнений (1.7)-(1.8) будем искать в следующем виде:

$$W = W_0(y)a^{-1/2}(y)\exp i(kx-\omega t) \tag{1.9}$$

$$\varphi = \varphi_0(y)a^{-1/2}(y)\exp i(kx-\omega t) \tag{1.10}$$

Подставляя (1.9) в (1.7), получим:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2\left[1-\frac{\ell}{k^2}-\eta\right]W_0 = 0 \tag{1.11}$$

$$\eta = V^2 C_t^{-2}, \tag{1.12}$$

где $C_t^2 = \dfrac{C_{44}^0(1+\chi_0)}{\rho_0}$ – квадрат скорости сдвиговой волны в среде, $V^2 = \left(\dfrac{\omega}{k}\right)^2$ – квадрат фазовой скорости и $\ell = -\dfrac{1}{2}\dfrac{a''}{a}+\dfrac{1}{4}\dfrac{(a')^2}{a^2}$.

Выберем функцию $a(y)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\ell = -\frac{1}{2}\frac{a''}{a}+\frac{1}{4}\frac{(a')^2}{a^2} > 0, \tag{1.13}$$

Введём обозначение $\gamma^2 = \dfrac{\ell}{k^2}$, где γ – безразмерная величина, отвечающая за численное присутствие неоднородности при расчёте скорости волны, значение $\gamma = 0$ соответствует классическому случаю, рассмотренному в работе [4].

Тогда дифференциальное уравнение (1.11) примет вид:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2\alpha^2 W_0 = 0 \tag{1.14}$$

и общее решение будет

$$W_0 = A_1 \sinh\left[k\alpha y\right] + A_2 \cosh\left[k\alpha y\right],$$

где A_1, A_2 – постоянные и $\alpha = \left(1-\eta-\gamma^2\right)^{1/2}$.

Из условия $0<\alpha<1$, которое является условием затухания или условием существования поверхностной волны, найдём:

$$0<\eta<1-\gamma^2 \quad 0\le\gamma^2<1. \tag{1.15}$$

Имея аналитический вид решения (1.9), запишем также вид решения для (1.8):

$$\varphi_0 = \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0}\left[A_1 \sinh\left[k\alpha y\right] + A_2 \cosh\left[k\alpha y\right]\right] + A_3 \sinh\left[k\beta y\right] + A_4 \cosh\left[k\beta y\right]$$

Здесь $\beta = \sqrt{1-\gamma^2}$.

2. Функция неоднородности $a\left(y\right)$, удовлетворяющая условию (1.13), имеет следующий вид:

$$a(y) = C_2 \cos^2\left[\sqrt{\ell}\left(y-2C_1\right)\right],$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Из условий $a(0)=1,\ a'(0)=0$ найдём $C_1=0,\ C_2=1,$ тогда $a(y)=\cos^2(\sqrt{\ell}y)$.

Учитывая, что $\gamma=\sqrt{\ell}/k$ будет вещественным, функцию, характеризующую неоднородность слоя по толщине, запишем в виде

$$a(y)=\cos^2(k\gamma y) \tag{2.1}$$

и, следовательно, функции $W(x,y,t)$ и $\varphi\left(x,y,t\right)$ – в виде:

$$W = \frac{(A_1 \sinh\left[k\alpha y\right] + A_2 \cosh\left[k\alpha y\right])}{\cos(k\gamma y)} \exp i(kx-\omega t) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0} \frac{\left(A_1 \sinh\left[k\alpha y\right] + A_2 \cosh\left[k\alpha y\right]\right)}{\cos(k\gamma y)} \exp i(kx-\omega t) + \\ + \frac{\left(A_3 \sinh\left[k\beta y\right] + A_4 \cosh\left[k\beta y\right]\right)}{\cos(k\gamma y)} \exp i(kx-\omega t).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1), (2.2) и (2.3) в (1.5), получим:

$$\begin{gathered}\sigma_{yz} = C_{44}^0 a(y)\frac{\partial W}{\partial y} + e_{15}^0 a(y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \sigma_{yz} = A_1 C_{44}^0 (1+\chi_0)\Omega_1 + A_2 C_{44}^0 (1+\chi_0)\Omega_2 + A_3 e_{15}^0 \Omega_3 + A_4 e_{15}^0 \Omega_4,\end{gathered} \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= k\left(\alpha \cosh[k\alpha y]\cos(k\gamma y) + \gamma \sin(k\gamma y)\sinh[k\alpha y]\right) \\ \Omega_2 &= k\left(\alpha \sinh[k\alpha y]\cos(k\gamma y) + \gamma \sin(k\gamma y)\cosh[k\alpha y]\right) \\ \Omega_3 &= k\left(\beta \cosh[k\beta y]\cos(k\gamma y) + \gamma \sin(k\gamma y)\sinh[k\beta y]\right) \\ \Omega_4 &= k\left(\beta \sinh[k\beta y]\cos(k\gamma y) + \gamma \sin(k\gamma y)\cosh[k\beta y]\right)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Учитывая граничные условия (1.1) и вводя обозначения $\tilde{k} = kh,$ из условия существования ненулевых решений $\det\left|A_i\right| = 0, \quad i = 1,...,4$ получим следующее трансцендентное дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} T(\alpha,\chi_0,\tilde{k},\gamma) = 2\alpha\sqrt{1-\gamma^2}\chi_0(1+\chi_0)(\cosh[2\alpha\tilde{k}]\cosh[2\sqrt{1-\gamma^2}\tilde{k}]-1) - \\ -((1-\gamma^2)\chi_0{}^2+\alpha^2(1+\chi_0)^2)\sinh[2\alpha\tilde{k}]\sinh[2\sqrt{1-\gamma^2}\tilde{k}] - \\ -\gamma\tan[2\gamma\tilde{k}]\alpha(\chi_0+1)\sinh[2\sqrt{1-\gamma^2}\tilde{k}]\cosh[2\alpha\tilde{k}] + \\ +\gamma\tan[2\gamma\tilde{k}]\chi_0\sqrt{1-\gamma^2}\cosh[2\sqrt{1-\gamma^2}\tilde{k}]\sinh[2\alpha\tilde{k}] = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подстановка $\gamma = 0$ приведёт к дисперсионному уравнению для классического случая [4]. Задача сводится к определению безразмерного параметра η, который характеризует фазовую скорость.

В предельном случае длинных волн ($\tilde{k} \to 0$), когда толщина слоя намного меньше длины волны, решение уравнения (2.6) примет вид:

$$\eta = (1-\gamma^2)(1-\chi_0/(1+\chi_0)) < 1-\gamma^2. \quad (2.7)$$

В коротковолновом приближении ($\tilde{k} \to \infty$), когда толщина слоя намного больше длины волны,

$$\eta = (1-\gamma^2)(1-\chi_0{}^2/(1+\chi_0)^2) < 1-\gamma^2. \quad (2.8)$$

Полученное дисперсионное уравнение (2.6) имеет громоздкий вид, что затрудняет его дальнейшее исследование аналитическими методами. При определённых значениях χ_0, γ и $\tilde{k}$ численно находим нетривиальные решения уравнения (2.6).

Во избежание обращения в ноль знаменателей в (2.2) и (2.3), примем, что $0 < k\gamma y < \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$. Подставляя максимальное значение $y = 2h$ для параметров γ и $\tilde{k} = kh$, получим условие:

$0 \le \tilde{k}\gamma < \dfrac{\pi}{4} - \varepsilon$ (ε – достаточно малое положительное число). (2.9)

В табл.2 приведены численные примеры условия (2.9) для некоторых фиксированных γ.

Таблица 2

$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.7$
$\tilde{k} < 5.23$	$\tilde{k} < 2.67$	$\tilde{k} < 1.57$	$\tilde{k} < 1.21$

К примеру, для поиска возможных решений при $\gamma = 0.3$ параметр $\tilde{k}$ следует варьировать в спектре (0,2.67).

В табл.3 приведены численные расчёты для безразмерной скорости η при некоторых χ_0 (табл.1) и γ (с соответствующей вариацией параметра $\tilde{k}$ (табл. 2). Там же символом “-“ обозначим отсутствие распространения волны с интересующими нас характеристиками. Они также отсутствуют при $\gamma \ge 0,7$.

Таблица 3

$\gamma = 0.15$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\tilde{k} = 0.1$	0.9709	0.9011	0.7049	0.6459	0.5084
$\tilde{k} = 0.5$	0.9730	0.9077	0.7203	0.6629	0.5271
$\tilde{k} = 1$	-	0.9227	0.7572	0.7041	0.6353
$\tilde{k} = 2$	-	0.9502	0.8291	0.7858	0.6699
$\tilde{k} = 5$	-	0.9765	0.8925	0.8546	0.7124
$\gamma = 0.3$					
$\tilde{k} = 0.1$	-	0.9011	0.7049	0.6459	0.5084
$\tilde{k} = 0.5$	-	0.9077	0.7204	0.6630	0.5273
$\tilde{k} = 1$	-	-	0.7588	0.7058	0.5757
$\tilde{k} = 2$	-	-	0.8338	0.7910	0.6753
$\gamma = 0.5$					
$\tilde{k} = 0.1$	-	-	0.7049	0.6459	0.5084
$\tilde{k} = 0.5$	-	-	0.7207	0.6634	0.5277
$\tilde{k} = 1$	-	-	-	0.7092	0.5797
$\tilde{k} = 1.5$	-	-	-	-	0.6314

Заключение.

В данной работе получено дисперсионное уравнение для одного случая неоднородности пьезоактивного слоя. Исследованы возможные решения в разных диапазонах и величинах параметра неоднородности. Величины фазовых скоростей волн для интересующего материала при интересующих значениях параметров можно рассчитать, если умножить скорость C_t^2 для данного материала из табл.1 на безразмерную величину скоростей, приведённых в табл.3.

Сравнивая полученные в данной работе результаты с результатами работы [4], можно утверждать, что исследуемая здесь тригонометрическая неоднородность, отличается неким эффектом рассеивания волновой энергии в слое, которая может помешать волне локализоваться вдоль поверхностей слоя. Этот эффект также заметен и при исследовании амплитуд физико-механических характеристик волны ((2.2) и (2.3)).

Амплитуды $W_0 a^{-1/2}$ и $\varphi_0 a^{-1/2}$ не проявляют явных признаков локализации волн, т.е. не стремятся к нулю по мере роста аргумента $[k\gamma y]$. Кроме того, при данном типе неоднородности и условиях (1.15) и (2.8) отсутствуют вторые решения дисперсионного уравнения, которые возникали в слое при изученных в [4] обстоятельствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике.// Изв. АН Армянской ССР. Механика. 1988. Т.41. №5. С.34-40.
2. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств.//Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3-4. С.31-36.
3. Аветисян А.С. Поверхностные электроупругие волны Лява в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя.//Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1987. Т.40. №1. С.24-29.
4. Камалян А.А. О распространении и поведении электроупругой волны в пьезоэлектрике в зависимости от неоднородности.// Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №4. С.38-48.
5. Belubekyan M.V., Belubekyan V.M. Surface waves in piezoactive elastic system of a layer on a semi-space. Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 2013, Mechanics, № 3, p. 45–48.
6. Collet Bernard, Destrade Michel, Maugin Gerard A. Bleustein-Gulyaev waves in some functionally graded materials.// European Journal of Mechanics A/Solids 25 (2006) 695-706.
7. Hasanyan D.J., Piliposian G.T., Kamalyan A.H., Karakhanyan M.I. Some dynamic problems for elastic materials with functional inhomogeneties: anti-plane deformations. Continuum Mech. Thermodyn. (2003) 15: 519-527.
8. Мухсихачоян А.Р. К задаче сдвиговой поверхностной волны в неоднородной среде. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №1. С.12-16.
9. Li Peng, Feng Jin. Bleustein-Gulyaev waves in a transversely isotropic piezoelectric layered structure with an imperfectly bonded interface//Smart Mater. Struct 21 (2012) 045009 (9pp).
10. CAO Xiaoshan, Jin Feng, WANG ZiKun & Lu TianJian Bleustein-Gulyaev waves in a functionally graded piezoelectric material layered structure//Sci China Ser G-Phys Mech Astron, Apr. 2009, vol.52, no. 4,613-625.
11. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, Физматлит, 1991. 416с.
12. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.
13. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. Editorial УРСС, 2003. 336с.

Сведения об авторе:

Камалян Андраник Арменович – Аспирант факультета математики и механики, ЕГУ

Тел.: (094)90-96-92, (060)44-71-70

E-mail: kamalyan.andranik@yahoo.com

Поступила в редакцию 20.01.2014