ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №1, 2014 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫЙ МЕТОД ГИПОТЕЗ ПОСТРОЕНИЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян С.О.

Ключевые слова: Асимптотический метод, гипотезы, построение, теория, микрополярная, классическая, упругая, тонкая, оболочка
Key words: asympthotic method, hypotheses, construction, theory, micropolar, classical, elastic, thin, shell.

Սարգսյան Ս.Հ.
Առաձգական բարակ թաղանթների միկրոպոլյար և դասական տեսությունների կառուցման ասիմպտոտիկ հիմնավորվածությամբ վարկածների մեթոդ

Աշխատանքում, միկրոպոլյար առաձգականության եռաչափ տեսության հավասարումների համակարգը գրված բարակ թաղանթի համար, որպես երկրաչափական փոքր պարամետրով սինգուլյար գրգռված հավասարումների համակարգ, ենթարկվում է ասիմպտոտիկ անալիզի. Կառուցվում է ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծությունը ու սահմանային շերտը, ուսումնասիրվում նրանց փոխազդեցության խնդիրը, կառուցվում նրանցից յուրաքանչյուրին վերաբերվող եզրային պայմանները: Այնուհետև ասիմպտոտիկ լուծման վարքի դրսևորման կարևոր յուրահատկությունները ընդունվել են որպես վարկածներ և կառուցվում է միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր կիրառական տեսությունը և ցույց տրվում, որ այդ կիրառական տեսությունը ասիմպտոտիկ ճիշտ է:

Բարակ թաղանթի միկրոպոլյար տեսությունից անցում կատարելով դեպի դասական տեսություն, ցույց է տրվում, որ բարակ թաղանթների դասական կիրառական այս տեսությունը, որում հաշվի են առնված ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաները, համեմատած բարակ թաղանթի ճշգրտված այլ տեսությունների հետ, ասիմպտոտիկ ճիշտ է:

Sargsyan S.H.
Asymptoticaly Confirmed Hypoteses Metod for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells

In the present paper, the system of equations of three-dimensional micropolar theory of elasticity, written down for thin shell as singularly perturbed with small geometric parameter system, is analyzed asymptotically: the internal iteration process and boundary layers are constructed, their interaction is studied, boundary conditions are obtained for each of them. Then, the main specific properties of the asymptotic solution accepting as hypotheses, general applied theory of micropolar elastic thin shells is constructed and it is shown that the constructed theory is asymptotically correct. Passing from the micropolar theory of thin shells to the classical theory, it is shown, that this applied classical theory of thin shells, when transverse shifts are taken into account, is asymptotically correct theory in relation to the other corrected theories of thin shells.

В работе система уравнений трёхмерной микрополярной теории упругости для тонкой оболочки как сингулярно-возмушённая с малым геометрическим параметром система уравнений подвергается асимптотическому анализу: построен внутренний итерационный процесс и погранслой, изучается их взаимодействие, построены для каждой из них граничные условия. Далее, принимая за гипотезы важные специфические свойства асимптотического решения, построена общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек и показывается, что эта прикладная теория – асимптотически точная теория. Переходя от микрополярной теории тонких оболочек к классической теории, показывается, что эта прикладная классическая теория тонких оболочек, при которой учитываются поперечные сдвиговые деформации, по сравнению с другими уточнёнными теориями тонких оболочек, – асимптотически точная теория.

Введение. Существующие методы сведения трёхмерной задачи теории упругости к двумерной задаче теории пластин и оболочек принято разделить на три основные группы: а) метод гипотез, б) метод разложений по толщине и в) асимптотические методы [1-9]. Подробный обзор исследований в построении теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек выполнены в работах [10,11] .

Основная проблема общей теории микрополярных или классических упругих тонких пластин и оболочек заключается в приближённом, но адекватном сведении трёхмерной задачи микрополярной или классической теории упругости к двумерной краевой задаче. На наш взгляд, для этой цели уместен [12-14] при построении прикладной теории тонких пластин и оболочек использование в качестве гипотез основные особенности поведения асимптотического решения краевой или начально-краевой задачи трёхмерной микрополярной или классической теории упругости в соответствующих тонких областях [15-18]. Построенные на таком подходе, как микрополярная, так и классическая теории упругих тонких пластин и оболочек будут асимптотически точными теориями. С этой позиции вопрос также существенен в классической теории упругости при построении математических моделей тонких пластин и оболочек с учётом деформаций поперечного сдвига. Имеем в виду работу [19], в которой показано, что одна из основных теорий пластин и оболочек, в которой учитываются поперечные сдвиговые деформации, а именно, теория типа Тимошенко, не совсем асимптотически последовательна.

1. Постановка задачи.

Будем рассматривать оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое тело. Уравнения статической задачи несимметричной (микрополярной, моментной) теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид [20, 21]:

уравнения равновесия

$$\nabla_m \sigma^{mn} = 0, \qquad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk}\sigma_{mk} = 0; \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} &= (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}, \\ \mu_{mn} &= (\gamma+\varepsilon)\chi_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{nm} + \beta\chi_{kk}\delta_{nm} \end{aligned} ; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn}\omega^k, \qquad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n . \tag{1.3}$$

Здесь σ^{nm}, μ^{nm} – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn}, κ_{mn} – компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручений; V^n – компоненты вектора перемещения, ω^n – компоненты вектора независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические константы микрополярного материала оболочки; индексы m, n, k принимают значения 1,2,3.

Отметим, что при $\alpha = 0$ из уравнений (1.1)-(1.3) будут отделяться основные уравнения классической теории упругости.

Отнесём оболочку к триортогональной системе координат α_n ($H_i = A_i(1+\alpha_3/R_i)$, $H_3 = 1$, $i = 1,2$), принятой в теории оболочек [4].

Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи, которые можем записать в виде:

$$\sigma_{3n} = p_n^{\pm}, \quad \mu_{3n} = m_n^{\pm} \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h . \tag{1.4}$$

Граничные условия на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, в общем случае, представляют граничные условия смешанной граничной задачи:

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*, \ \mu_{mn} n_m = m_n^* \quad \text{на } \Sigma_1, \quad V_n = V_n^*, \quad \omega_n = \omega_n^* \quad \text{на } \Sigma_2, \qquad (1.5)$$

где p_n^*, m_n^* – компоненты заданных внешних усилий и моментов на Σ_1; V_n^*, ω_n^* – заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на Σ_2.

2. Асимптотическое решение (построение решения внутренней задачи) граничной задачи (1.1)-(1.5) трёхмерной микрополярной теории упругости в тонкой области оболочки.

Предположим, что толщина оболочки $2h$ весьма мала по сравнению с характерным радиусом кривизны срединной поверхности $(2h << R)$. Будем исходить из той основной концепции [4], что в статическом случае общее напряжённо-деформированное состояние (НДС) тонкой оболочки состоит из внутреннего НДС (охватывающего всю область трёхмерной оболочки) и пограничных слоёв (локализирующихся вблизи боковой поверхности Σ и затухающие вдали от боковой поверхности). При таком подходе, на результатах исходного приближения внутренней задачи будет возможно построение общей двумерной (асимптотической) модели микрополярных тонких оболочек (а при $\alpha = 0$ – и модель упругой оболочки по классической теории упругости).

Рассмотрим задачу сведения трёхмерной статической задачи несимметричной теории упругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем [14], включая вопрос об удовлетворении граничным условиям на поверхности края оболочки Σ.

Сначала рассмотрим построение внутреннего итерационного процесса. Для этой цели в трёхмерных уравнениях несимметричной теории упругости (1.1)-(1.3) перейдём к безразмерным координатам

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i, \qquad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta. \qquad (2.1)$$

Здесь величина p/l характеризует изменяемость НДС по координатам; p, l –целые числа, $l > p \geq 0$; R – характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки; λ – большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$. Введём также безразмерные величины:

$$\frac{V_i}{R} = \overline{V}_i, \quad \frac{\sigma_{ij}}{\mu} = \overline{\sigma}_{ij}, \quad \frac{\mu_{ij}}{R\mu} = \overline{\mu}_{ij}, \quad \frac{p_n^{\pm}}{\mu} = \overline{p}_n^{\pm}, \quad \frac{m_n^{\pm}}{R\mu} = \overline{m}_n^{\pm}, \quad \frac{R_i}{R} = \overline{R}_i \qquad (2.2)$$

и следующие безразмерные физические параметры:

$$\overline{\mu} = \frac{\mu}{\mu}, \ \ \overline{E} = \frac{E}{\mu}, \ \ \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\mu}, \ \ \overline{\beta} = \frac{\beta}{R^2\mu}, \ \ \overline{\gamma} = \frac{\gamma}{R^2\mu}, \ \ \overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{R^2\mu}. \qquad (2.3)$$

В результате преобразований (2.1)-(2.3), вместо системы уравнений (1.1)-(1.3) будем иметь следующую систему безразмерных уравнений:

уравнения равновесия

$$\lambda^{p-l}\overline{L}_i + \lambda^{-l}\frac{\overline{\sigma}_{3i} + \overline{\sigma}_{i3}}{\overline{R}_i} + a_i\frac{\partial\overline{\sigma}_{3i}}{\partial\zeta} = 0, \quad -\lambda^{-l}\overline{L} + \lambda^{p-l}\overline{F} + \frac{\partial\overline{\sigma}_{33}}{\partial\zeta} = 0,$$

$$\lambda^{p-l}\overline{K}_i+\lambda^{-l}\frac{\overline{v}_{3i}+\overline{v}_{i3}}{\overline{R}_i}+a_i\frac{\partial\overline{v}_{3i}}{\partial\zeta}+(-1)^j\lambda^{-l}a_j(\overline{\sigma}_{j3}-\overline{\sigma}_{3j})=0, \tag{2.4}$$

$$-\lambda^{-l}\overline{K}+\lambda^{p-l}\overline{\Phi}+\frac{\partial\overline{v}_{33}}{\partial\zeta}+\lambda^{-l}(a_1\overline{\sigma}_{12}-a_2\overline{\sigma}_{21})=0;$$

физико-геометрические соотношения

$$a_j\left[\lambda^p\frac{1}{A_i}\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial\xi_i}+\frac{R}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overline{V}_j+\frac{\overline{V}_3}{\overline{R}_i}\right]=\frac{1}{\overline{E}}[a_i\overline{\sigma}_{ii}-va_j\overline{\sigma}_{jj}-v\overline{\sigma}_{33}],$$

$$a_1a_2\lambda^l\frac{\partial\overline{V}_3}{\partial\zeta}=\frac{1}{\overline{E}}[\overline{\sigma}_{33}-va_1\overline{\sigma}_{11}-va_2\overline{\sigma}_{22}],$$

$$a_j\lambda^l\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial\zeta}-(-1)^ja_j\omega_j=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}\overline{\sigma}_{3i}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}\overline{\sigma}_{i3},$$

$$a_j\left(\lambda^p\frac{1}{A_i}\frac{\partial\overline{V}_j}{\partial\xi_i}-\frac{R}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overline{V}_i\right)-(-1)^ja_ia_j\omega_3=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}a_i\overline{\sigma}_{ij}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}a_j\overline{\sigma}_{ji},$$

$$a_j\left(\lambda^p\frac{1}{A_i}\frac{\partial\overline{V}_3}{\partial\xi_i}-\frac{\overline{V}_i}{\overline{R}_i}\right)+(-1)^ja_ia_j\omega_j=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}a_i\overline{\sigma}_{i3}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu\alpha}}a_i\overline{\sigma}_{3i}, \tag{2.5}$$

$$a_j\left[\lambda^p\frac{1}{A_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial\xi_i}+\frac{R}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\omega_j+\frac{\omega_3}{\overline{R}_i}\right]=\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma})}\left[a_i\overline{\nu}_{ii}-\frac{\overline{\beta}}{2(\overline{\beta}+\overline{\gamma})}(a_j\overline{\nu}_{jj}+\overline{\nu}_{33})\right],$$

$$\lambda^la_1a_2\frac{\partial\omega_3}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma})}\left[\overline{\nu}_{33}-\frac{\overline{\beta}}{2(\overline{\beta}+\overline{\gamma})}(a_1\overline{\nu}_{11}+a_2\overline{\nu}_{22})\right],$$

$$a_j\left(\lambda^p\frac{1}{A_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial\xi_i}-\frac{R}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\omega_i\right)=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma\varepsilon}}a_i\overline{\nu}_{ij}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma\varepsilon}}a_j\overline{\nu}_{ji},$$

$$a_j\left(\lambda^p\frac{1}{A_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial\xi_i}-\frac{\omega_i}{\overline{R}_i}\right)=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma\varepsilon}}a_i\overline{\nu}_{i3}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma\varepsilon}}a_i\overline{\nu}_{3i},$$

$$a_j\lambda^l\frac{\partial\omega_i}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma\varepsilon}}\overline{\nu}_{3i}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma\varepsilon}}\overline{\nu}_{i3},$$

здесь

$$\overline{L}_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\overline{\tau}_{ii}}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(\overline{\sigma}_{ii}-\overline{\sigma}_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial\overline{\tau}_{ji}}{\partial\xi_j}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(\overline{\sigma}_{ji}+\overline{\sigma}_{ij}),$$

$$\overline{L}=\frac{\overline{\sigma}_{11}}{\overline{R}_1}+\frac{\overline{\sigma}_{22}}{\overline{R}_2},\quad \overline{F}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overline{\sigma}_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overline{\sigma}_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overline{\sigma}_{23}}{\partial\xi_2}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overline{\sigma}_{23}, \tag{2.6}$$

$$\overline{K}_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\overline{v}_{ii}}{\partial\xi_i}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(\overline{v}_{ii}-\overline{v}_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial\overline{v}_{ji}}{\partial\xi_j}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(\overline{v}_{ji}+\overline{v}_{ij}),$$

$$\overline{K}=\frac{\overline{v}_{11}}{\overline{R}_1}+\frac{\overline{v}_{22}}{\overline{R}_2},\ \overline{\Phi}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overline{v}_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overline{v}_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overline{v}_{23}}{\partial\xi_2}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overline{v}_{23},$$

$$a_i=1+\frac{\lambda^{-l}\zeta}{\overline{R}_i}.$$

Предположим, что безразмерные физические параметры (2.3) имеют порядки:

$$\frac{\alpha}{\mu}\sim 1,\quad \frac{\beta}{R^2\mu}\sim 1,\quad \frac{\gamma}{R^2\mu}\sim 1,\quad \frac{\varepsilon}{R^2\mu}\sim 1. \tag{2.7}$$

Сделаем следующие замены искомых величин:

$$\begin{gathered}\overline{\tau}_{ii}=\lambda^l\tau_{ii}^*,\ \ \overline{\tau}_{ij}=\lambda^l\tau_{ij}^*,\ \ \overline{\tau}_{3i}=\lambda^{l+p-c}\tau_{3i}^*,\ \ \overline{\tau}_{i3}=\lambda^{l+p-c}\tau_{i3}^*,\ \ \overline{\tau}_{33}=\lambda^{2p-c}\tau_{33}^*,\\ \overline{v}_{ii}=\lambda^{l-c}v_{ii}^*,\ \ \overline{v}_{ij}=\lambda^{l-c}\nu_{ij}^*,\ \ \overline{v}_{3i}=\lambda^{l-p}\nu_{3i}^*,\ \ \overline{v}_{i3}=\lambda^{l-p}v_{i3}^*,\ \ \overline{v}_{33}=\lambda^{2p-2c}\nu_{33}^*,\\ \overline{V}_i=\lambda^{l-p}V_i^*,\ \ \overline{V}_3=\lambda^{l-c}V_3^*,\ \ \omega_i=\lambda^{l-p-c}\omega_i^*,\ \ \omega_3=\lambda^{l-2p}\omega_3^*,\end{gathered} \tag{2.8}$$

$c=0$ при $2p\le l,\ c=2p-l$ при $2p\ge l.$

В результате указанных преобразований приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial\tau_{3i}^*}{\partial\zeta}=-\lambda^{-l+c}\frac{1}{a_i}L_i^*-\lambda^{-l}\frac{1}{a_i}\frac{\tau_{i3}^*+\tau_{3i}^*}{\overline{R}_i},$$

$$\frac{\partial\nu_{3i}^*}{\partial\zeta}=-\lambda^{-l+2p-c}\frac{1}{a_i}K_i^*-\lambda^{-l}\frac{1}{a_i}\frac{\nu_{i3}^*+\nu_{3i}^*}{\overline{R}_i}+(-1)^j\lambda^{-l+2p-c}\frac{a_j}{a_i}(\tau_{3j}^*-\tau_{j3}^*),$$

$$\frac{\partial\tau_{33}^*}{\partial\zeta}=\lambda^{-2p+c}L^*-F^*,\frac{\partial\nu_{33}^*}{\partial\zeta}=\lambda^{-2p+c}K^*-\lambda^{-2p+2c}\Phi^*-\lambda^{-2p+2c}a_1\tau_{12}^*+\lambda^{-2p+2c}a_2\tau_{21}^*,$$

$$\tau_{ii}^*=\frac{a_j}{a_i}\frac{4\overline{\mu}(\overline{\lambda}+\overline{\mu})}{\lambda+2\overline{\mu}}e_i^*+\frac{2\overline{\mu}\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}e_j^*+\lambda^{-l+2p-c}\frac{1}{a_i}\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}\tau_{33}^*,$$

$$\tau_{ij}^*=\frac{a_j}{a_i}(\overline{\mu}+\overline{\alpha})t_j^*+(\overline{\mu}-\overline{\alpha})t_i^*-2(-1)^j\lambda^{-2p}a_j\overline{\alpha}\omega_3^*,$$

$$\frac{\partial V_3^*}{\partial\zeta}=\lambda^{-2l+2p}\frac{1}{a_1a_2}\frac{\overline{\lambda}+\overline{\mu}}{\overline{\mu}(3\overline{\lambda}+2\overline{\mu})}\tau_{33}^*-\lambda^{-l+c}\frac{\overline{\lambda}}{2\overline{\mu}(3\overline{\lambda}+2\overline{\mu})}\left(\frac{1}{a_2}\tau_{11}^*+\frac{1}{a_1}\tau_{22}^*\right),$$

$$\frac{\partial V_i^*}{\partial\zeta}=(-1)^j\lambda^{-l-c}\omega_j^*+\lambda^{-l+2p-c}\frac{1}{a_j}\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}\tau_{3i}^*-\lambda^{-l+2p-c}\frac{1}{a_j}\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}\tau_{i3}^*=$$

$$=-\frac{1}{a_i}\lambda^{-l+2p-c}g_i^*+\lambda^{-l+2p-c}\frac{1}{2a_j}\left(\tau_{3i}^*+\tau_{i3}^*\right),$$

$$\tau_{i3}^*=\frac{a_j}{a_i}\frac{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}g_i^*+(-1)^j\lambda^{-2p}a_j\frac{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}\omega_j^*+\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}\tau_{3i}^*, \tag{2.9}$$

$$v_{ii}^*=\frac{a_j}{a_i}\frac{4\overline{\gamma}(\overline{\beta}+\overline{\gamma})}{\overline{\beta}+2\overline{\gamma}}\kappa_i^*+\frac{2\overline{\gamma}\overline{\beta}}{\overline{\beta}+2\overline{\gamma}}\kappa_j^*+\lambda^{-l+2p-c}\frac{1}{a_i}\frac{\overline{\beta}}{\overline{\beta}+2\overline{\gamma}}v_{33}^*,$$

$$v_{ij}^* = \frac{a_j}{a_i}(\overline{\gamma} + \overline{\varepsilon})n_j^* + (\overline{\gamma} - \overline{\varepsilon})n_i^*,$$

$$\frac{\partial\omega_3^*}{\partial\zeta} = \lambda^{-2l+4p-2c}\frac{1}{a_1a_2}\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma})}\nu_{33}^* - \lambda^{-l+2p-c}\frac{\overline{\beta}}{2\overline{\gamma}(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma})}\left(\frac{1}{a_2}\nu_{11}^* + \frac{1}{a_1}\nu_{22}^*\right),$$

$$\frac{\partial\omega_i^*}{\partial\zeta} = \lambda^{-l+c}\frac{1}{a_j}\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}v_{3i}^* - \lambda^{-l+c}\frac{1}{a_j}\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}v_{i3}^*, \quad v_{i3}^* = \frac{a_j}{a_i}\frac{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}\theta_i^* + \frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}v_{3i}^*,$$

где

$$L_i^* = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\tau_{ii}^*}{\partial\xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(\tau_{ii}^* - \tau_{jj}^*) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial\tau_{ji}^*}{\partial\xi_j} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(\tau_{ji}^* + \tau_{ij}^*),$$

$$L^* = \frac{\tau_{11}^*}{\overline{R}_1} + \frac{\tau_{22}^*}{\overline{R}_2},\ F^* = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13}^*}{\partial\xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tau_{13}^* + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{23}^*}{\partial\xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tau_{23}^*,$$

$$K_i^* = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{ii}^*}{\partial\xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(v_{ii}^* - v_{jj}^*) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial v_{ji}^*}{\partial\xi_j} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(v_{ji}^* + v_{ij}^*), \tag{2.10}$$

$$K^* = \frac{v_{11}^*}{\overline{R}_1} + \frac{v_{22}^*}{\overline{R}_2},\ \Phi^* = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_{13}^*}{\partial\xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}v_{13}^* + \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_{23}^*}{\partial\xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}v_{23}^*,$$

$$e_i^* = \frac{1}{A_i}\frac{\partial V_i^*}{\partial\xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}V_j^* + \lambda^{-c}\frac{V_3^*}{\overline{R}_i}, \qquad t_i^* = \frac{1}{A_j}\frac{\partial V_i^*}{\partial\xi_j} - \frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}V_j^*,$$

$$g_i^* = \frac{1}{A_i}\frac{\partial V_3^*}{\partial\xi_i} - \lambda^{-2p+c}\frac{V_i^*}{\overline{R}_i},$$

$$\kappa_i^* = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\omega_i^*}{\partial\xi_i} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\omega_j^* + \lambda^{-2p+c}\frac{\omega_3^*}{\overline{R}_i}, \qquad n_i^* = \frac{1}{A_j}\frac{\partial\omega_i^*}{\partial\xi_j} - \frac{R\lambda^{-p}}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\omega_j^*,$$

$$\theta_i^* = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\omega_3^*}{\partial\xi_i} - \lambda^{-c}\frac{\omega_i^*}{\overline{R}_i}.$$

Следуя асимптотическому методу, при построении внутренней задачи трёхмерные уравнения (2.9) с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ приближённо сведём к двумерным с независимыми переменными ξ_1, ξ_2.

Для перемещений и поворотов, силовых и моментных напряжений на основе системы (2.9) с асимптотической точностью $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ получим:

$$\begin{aligned}
&\omega_i^* = \omega_i^0, && \omega_3^* = \omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^1,\\
&V_i^* = V_i^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_i^1, && V_3^* = V_3^0,\\
&\tau_{ii}^* = \tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ii}^1, && \tau_{ij}^* = \tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ij}^1,\\
&\tau_{3i}^* = \tau_{3i}^0, && \tau_{i3}^* = \tau_{i3}^0,\\
&v_{ii}^* = v_{ii}^0, && v_{ij}^* = v_{ij}^0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$v_{3i}^{*}=v_{3i}^{0}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{3i}^{1}, \qquad v_{i3}^{*}=v_{i3}^{0}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{i3}^{1},$$
$$\tau_{33}^{*}=\tau_{33}^{0}+\zeta\tau_{33}^{1}, \qquad v_{33}^{*}=v_{33}^{0}+\lambda^{-2p+2c}\zeta v_{33}^{1},$$
где
$$\omega_{3}^{1}=\lambda^{-l+2p-c}\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}\left(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma}\right)}\nu_{33}^{0}-\frac{\overline{\beta}}{2\overline{\gamma}(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma})}(v_{11}^{0}+v_{22}^{0}),$$
$$V_{i}^{1}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}\tau_{3i}^{0}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}\tau_{i3}^{0}+(-1)^{j}\lambda^{-2p}\omega_{j}^{0}=-g_{i}^{0}+\frac{1}{2}\left(\tau_{3i}^{0}+\tau_{i3}^{0}\right),$$
$$\tau_{ii}^{0}=\frac{4\overline{\mu}(\overline{\lambda}+\overline{\mu})}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}e_{i}^{0}+\frac{2\overline{\mu}\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}e_{j}^{0}+\lambda^{-l+2p-c}\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}\tau_{33}^{0},$$
$$\tau_{ij}^{0}=(\overline{\mu}+\overline{\alpha})t_{j}^{0}+(\overline{\mu}-\overline{\alpha})t_{i}^{0}-2(-1)^{j}\lambda^{-2p}\overline{\alpha}\omega_{3}^{0},$$
$$\tau_{ii}^{1}=\frac{4\overline{\mu}(\overline{\lambda}+\overline{\mu})}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}e_{i}^{1}+\frac{2\overline{\mu}\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}e_{j}^{1}+\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}\tau_{33}^{1},$$
$$\tau_{ij}^{1}=(\overline{\mu}+\overline{\alpha})t_{j}^{1}+(\overline{\mu}-\overline{\alpha})t_{i}^{1}-2(-1)^{j}\lambda^{-2c}\omega_{3}^{1},$$
$$\nu_{ii}^{0}=\frac{4\overline{\gamma}\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)}{\overline{\beta}+2\overline{\gamma}}k_{i}^{0}+\frac{2\overline{\gamma}\overline{\beta}}{\overline{\beta}+2\overline{\gamma}}k_{j}^{0}+\frac{\lambda^{-l+2p-c}}{\overline{\beta}+2\overline{\gamma}}\frac{m_{3}^{+}+m_{3}^{-}}{2},$$
$$v_{ij}^{0}=(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon})n_{j}^{0}+(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon})n_{i}^{0},$$
$$e_{i}^{k}=\frac{1}{A_{i}}\frac{\partial V_{i}^{k}}{\partial\xi_{i}}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_{i}A_{j}}\frac{\partial A_{i}}{\partial\alpha_{j}}V_{j}^{k}+\delta_{k0}\lambda^{-c}\frac{V_{3}^{k}}{\overline{R}_{i}},$$
$$\kappa_{i}^{k}=\frac{1}{A_{i}}\frac{\partial\omega_{i}^{k}}{\partial\xi_{i}}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_{i}A_{j}}\frac{\partial A_{i}}{\partial\alpha_{j}}\omega_{j}^{k}+\delta_{k0}\lambda^{-2p+c}\frac{\omega_{3}^{k}}{\overline{R}_{i}},$$
$$t_{i}^{k}=\frac{1}{A_{j}}\frac{\partial V_{i}^{k}}{\partial\xi_{j}}-\frac{R\lambda^{-p}}{A_{i}A_{j}}\frac{\partial A_{j}}{\partial\alpha_{i}}V_{j}^{k}, \quad n_{i}^{k}=\frac{1}{A_{j}}\frac{\partial\omega_{i}^{k}}{\partial\xi_{j}}-\frac{R\lambda^{-p}}{A_{i}A_{j}}\frac{\partial A_{j}}{\partial\alpha_{i}}\omega_{j}^{k}, \tag{2.12}$$
$$g_{i}^{k}=\frac{1}{A_{i}}\frac{\partial V_{3}^{k}}{\partial\xi_{i}}-\delta_{k0}\lambda^{-2p+c}\frac{V_{i}^{k}}{\overline{R}_{i}}, \qquad \theta_{i}^{k}=\frac{1}{A_{i}}\frac{\partial\omega_{3}^{k}}{\partial\xi_{i}}-\delta_{k0}\lambda^{-c}\frac{\omega_{i}^{k}}{\overline{R}_{i}},$$
$$L_{i}^{k}=\frac{1}{A_{i}}\frac{\partial\tau_{ii}^{k}}{\partial\xi_{i}}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_{i}A_{j}}\frac{\partial A_{j}}{\partial\alpha_{i}}(\tau_{ii}^{k}-\tau_{jj}^{k})+\frac{1}{A_{j}}\frac{\partial\tau_{ji}^{k}}{\partial\xi_{j}}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_{i}A_{j}}\frac{\partial A_{i}}{\partial\alpha_{j}}(\tau_{ji}^{k}+\tau_{ij}^{k}),$$
$$\tau_{i3}^{0}=\frac{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}(g_{i}^{0}+(-1)^{j}\lambda^{-2p}\omega_{j}^{0})+\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}\tau_{3i}^{0},$$
$$v_{3i}^{1}=-K_{i}^{0}+(-1)^{j}(\tau_{3j}^{0}-\tau_{j3}^{0})+\overline{J}\frac{\partial^{2}\omega_{i}^{0}}{\partial\tau^{2}},$$
$$K_{i}^{k}=\frac{1}{A_{i}}\frac{\partial v_{ii}^{k}}{\partial\xi_{i}}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_{i}A_{j}}\frac{\partial A_{j}}{\partial\alpha_{i}}(\nu_{ii}^{k}-\nu_{jj}^{k})+\frac{1}{A_{j}}\frac{\partial\nu_{ji}^{k}}{\partial\xi_{j}}+\frac{R\lambda^{-p}}{A_{i}A_{j}}\frac{\partial A_{i}}{\partial\alpha_{j}}(\nu_{ji}^{k}+\nu_{ij}^{k}),$$

$$v_{i3}^0 = \frac{4\overline{\gamma\varepsilon}}{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}\theta_i^0 + \frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}v_{3i}^0, \qquad v_{i3}^1 = \frac{4\overline{\gamma\varepsilon}}{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}\theta_i^1 + \frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}v_{3i}^1$$

$$\tau_{33}^1 = \lambda^{-2p+c}L^0 - F^0 + \frac{\partial^2 V_3^0}{\partial\tau^2}, \quad \nu_{33}^1 = \lambda^{-c}K^0 - \Phi^0 - \tau_{12}^0 + \tau_{21}^0,$$

$$L^k = \frac{\tau_{11}^k}{\overline{R}_1} + \frac{\tau_{22}^k}{\overline{R}_2}, \; F^k = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13}^k}{\partial\xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tau_{13}^k + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{23}^k}{\partial\xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tau_{23}^k,$$

$$K^k = \frac{v_{11}^k}{\overline{R}_1} + \frac{v_{22}^k}{\overline{R}_2}, \quad \Phi^k = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_{13}^k}{\partial\xi_1} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}v_{13}^k + \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_{23}^k}{\partial\xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}v_{23}^k, \; k = 1{,}2.$$

Наша основная цель – построить асимптотически строго итерационный процесс для усреднённых по толщине оболочки определяющих величин поставленной задачи (т.е. зависящих только от величин ξ_1, ξ_2). С этой точки зрения есть возможность уточнять значения для силовых напряжений τ_{3i}^* и моментного напряжения μ_{33}^* (оставаясь в рамках величин, участвующих в выражениях (2.11), т.е. в кругу величин исходного приближения). Сущность подхода заключается в следующем. На уровне исходного приближения асимптотического метода для величин τ_{3i}^* и ν_{33}^* имеем:

$$\tau_{3i}^* = \tau_{3i}^0(\xi_1, \xi_2), \quad \nu_{33}^* = \nu_{33}^0(\xi_1, \xi_2) + \lambda^{-2p+2c}\nu_{33}^1(\xi_1, \xi_2). \tag{2.13}$$

Теперь в указанных уравнениях равновесия будем удерживать величины до порядка λ^{2p-2l}, после чего, интегрируя эти уравнения по ζ, получим

$$\hat{\tau}_{3i}^* = \tilde{\tau}_{3i}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p}\frac{1}{2}\zeta^2 L_i^1, \tag{2.14}$$

$$\hat{\nu}_{33}^* = \tilde{\nu}_{33}^0 + \lambda^{-2p+2c}\zeta\nu_{33}^1 - \lambda^{-l+c}\frac{1}{2}\zeta^2\left[\Phi^1 - \left(\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1\right)\right], \tag{2.15}$$

где $\tilde{\tau}_{3i}^0$ и $\tilde{\nu}_{33}^0$ – функции интегрирования;

$$\tau_{3i}^1 = -L_i^0 - \lambda^{-c}\frac{\tau_{i3}^0}{\overline{R}_i}, \quad \nu_{33}^1 = \lambda^{-c}K^0 - \Phi^0 - \tau_{12}^0 + \tau_{21}^0. \tag{2.16}$$

Потребуем от величин $\hat{\tau}_{3i}^*$ и $\hat{\nu}_{33}^*$, чтобы их значения, усреднённые по толщине оболочки $(-1 \le \zeta \le 1)$, были равны нулю:

$$\int_{-1}^{1}\hat{\tau}_{3i}^* d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1}\hat{\nu}_{33}^* d\zeta = 0. \tag{2.17}$$

Подчиняя (2.14) и (2.15) условиям (2.17), для $\tilde{\tau}_{3i}^0$ и $\tilde{\nu}_{33}^0$ получим:

$$\tilde{\tau}_{3i}^0 = \frac{1}{6}\lambda^{-2l+2p}\cdot L_i^1, \quad \tilde{\nu}_{33}^0 = \lambda^{-l+c}\cdot\frac{1}{6}\cdot[\Phi^1 + (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)].$$

Таким образом, для $\hat{\tau}_{3i}^*$ и $\hat{\nu}_{33}^*$ будем иметь:

$$\hat{\tau}_{3i}^* = \lambda^{-l+c}\cdot\zeta\cdot\tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p}\cdot\left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2}\right)L_i^1, \tag{2.18}$$

$$\tilde{\nu}_{33}^{*} = \lambda^{-2p+2c} \cdot \zeta \cdot \nu_{33}^{1} + \lambda^{-l+c}\left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2}\right)[\Phi^1 + (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)]. \qquad (2.19)$$

Окончательно, для значений τ_{3i}^{*} и ν_{33}^{*} примем соответственно суммы (2.13), (2.18), (2.19) и получим

$$\tau_{3i}^{*} = \tau_{3i}^{0} + \lambda^{-l+c} \cdot \zeta \cdot \tau_{3i}^{1} + \lambda^{-2l+2p} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2}\right) L_i^1, \qquad (2.20)$$

$$\nu_{33}^{*} = \nu_{33}^{0} + \lambda^{-2p+2c} \cdot \zeta \cdot \nu_{33}^{1} + \lambda^{-l+c}\left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2}\right)[\Phi^1 + (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)]. \qquad (2.21)$$

Легко убедиться, что усреднённые значения τ_{3i}^{*} и ν_{33}^{*} по толщине оболочки $(-1 \le \zeta \le 1)$ как на уровне (2.13), так и на уровне (2.20), (2.21), равны между собой. Итак, заменяя в выражениях (2.11) значения τ_{3i}^{*} и ν_{33}^{*} через значения (2.20), (2.21), для перемещений, поворотов, силовых и моментных напряжений вместо (2.11) будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\omega_i^{*} = \omega_i^{0}, && \omega_3^{*} = \omega_3^{0} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^{1},\\
&V_i^{*} = V_i^{0} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_i^{1}, && V_3^{*} = V_3^{0},\\
&\tau_{ii}^{*} = \tau_{ii}^{0} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ii}^{1}, && \tau_{ij}^{*} = \tau_{ij}^{0} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ij}^{1},\\
&\tau_{i3}^{*} = \tau_{i3}^{0}, && v_{ii}^{*} = v_{ii}^{0},\\
&v_{ij}^{*} = v_{ij}^{0}, && v_{i3}^{*} = v_{i3}^{0} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{i3}^{1},\\
&\tau_{33}^{*} = \tau_{33}^{0} + \zeta\tau_{33}^{1}, && \tau_{3i}^{*} = \tau_{3i}^{0} + \lambda^{-l+c} \cdot \zeta \cdot \tau_{3i}^{1} + \lambda^{-2l+2p} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2}\right) L_i^1,\\
&\nu_{3i}^{*} = v_{3i}^{0} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{3i}^{1}, &&\\
&\nu_{33}^{*} = \nu_{33}^{0} + \lambda^{-2p+2c} \cdot \zeta \cdot \nu_{33}^{1} + \lambda^{-l+c}\left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2}\right)[\Phi^1 + (\tau_{12}^1 - \tau_{21}^1)] &&
\end{aligned} \qquad (2.22)$$

Построенная асимптотика (2.22) для внутреннего итерационного процесса поставленной задачи даёт возможность от трёхмерной проблемы перейти к двумерным (что уже выполнено для перемещений, поворотов, силовых и моментных напряжений). Для этого, как в классическом случае, в теории микрополярных оболочек вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$, моменты $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3}, которые с принятой точностью выражаются так:

$$T_{ii} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ii}dz, \quad S_{ij} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ij}dz, \quad N_{i3} = \int_{-h}^{h} \sigma_{i3}dz, \quad N_{i3} = \int_{-h}^{h} \sigma_{i3}dz,$$

$$N_{3i} = \int_{-h}^{h} \sigma_{3i}dz, \quad M_{ii} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{ii}dz, \quad H_{ij} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{ij}dz, \quad L_{ii} = \int_{-h}^{h} \mu_{ii}dz, \qquad (2.23)$$

$$L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dz,\quad L_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}dz,\quad L_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}dz,\quad \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}z\mu_{i3}dz,$$

Вводим перемещения и повороты точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i=V_i\big|_{\zeta=0},\quad w=V_3\big|_{\zeta=0},\quad \Omega_i=\omega_i\big|_{\zeta=0},\quad \Omega_3=\omega_3\big|_{\zeta=0},\quad \iota=\left.\frac{\partial\omega_3}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.4) на лицевых поверхностях оболочки $z=\pm h$, и имея в виду также выражения (2.22), (2.12), приходим к следующей системе определяющих уравнений двумерной задачи микрополярной теории оболочек с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+$$
$$+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(p_i^++p_i^-\right),$$
$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(M_{ii}-M_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j}+$$
$$+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)-N_{3i}=-h\left(p_i^+-p_i^-\right),$$
$$-\frac{T_{11}}{R_1}-\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]=-\left(p_3^++p_3^-\right),\qquad(2.24)$$
$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+\frac{L_{i3}}{R_i}+$$
$$+\left(-1\right)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\left(m_i^++m_i^-\right),$$
$$-\frac{L_{11}}{R_1}-\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=-\left(m_3^++m_3^-\right),$$
$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(H_{12}-H_{21}\right)=h\left(m_3^+-m_3^-\right);$$

соотношения упругости

$$N_{i3}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{i3}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{3i},\quad N_{3i}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3},$$
$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right]+\underline{\frac{\nu}{1-\nu}h\left(p_3^++p_3^-\right)},\ S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}],$$
$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right]+\underline{\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^+-p_3^-\right)},$$
$$H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right],\ L_{ii}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)k_{ii}+\beta\left(k_{jj}+\iota\right)\right],\ (2.25)$$

$$L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],\quad L_{33}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)\iota+\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\right],$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\underline{\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}}\right],\quad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\underline{\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^++m_i^-}{2h}}\right];$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-\left(-1\right)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\qquad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-\left(-1\right)^j\iota,$$

$$\Gamma_{i3}=-\vartheta_i+\left(-1\right)^j\Omega_j,\ \Gamma_{3i}=\psi_i-\left(-1\right)^j\Omega_j,\ \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\tag{2.26}$$

$$l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},\quad \kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},$$

$$\kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\quad \kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}.$$

При $\alpha=0$ из системы уравнений (2.24)-(2.26) отделится система уравнений тонких оболочек на основе классической теории упругости (т.е. система уравнений упругих тонких оболочек типа Тимошенко [22-25], разумеется, с некоторым отличием).

3. Построение и изучение погранслойной задачи.

Обратимся к изучению краевых микрополярных упругих явлений. Будем снова исходить из уравнений трёхмерной микрополярной теории упругости (1.1)-(1.3), а также считать, что поверхность края оболочки Σ, вблизи которого необходимо исследовать напряжённое состояние, задаётся уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$. Введём замену независимых переменных по формулам:

$$\alpha_1-\alpha_{10}=R\lambda^{-l}\xi_1,\quad \alpha_2=R\lambda^{-p}\xi_2,\quad \alpha_3=R\lambda^{-l}\zeta,\tag{3.1}$$

где величины R,λ,l,p имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи.

Решение таким образом полученной из системы уравнений (1.1)-(1.3) пограничной задачи должно удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3=\pm h$:

$$\sigma_{3n}=0,\ \ \mu_{3n}=0.\tag{3.2}$$

Перейдём к безразмерным величинам (2.2),(2.3) и введём новые обозначения:

$$\bar{\sigma}_{mn}=P_{mn},\quad \bar{\mu}_{mn}=Q_{mn},\quad \bar{V}_n=\lambda^{-l}U_n,\quad \omega_n=\lambda^{-l}\varpi_n.\tag{3.3}$$

В результате, из уравнений (1.1)-(1.3) (с учётом (2.2), (2.3)) получим трёхмерные уравнения микрополярной теории упругости в безразмерном виде.

На уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ погранслойная задача расщепляется на четыре независимые системы уравнений:

силовая плоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{31}}{\partial\zeta}=0,\ \ \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{33}}{\partial\zeta}=0,\ \ \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial U_1}{\partial\xi_1}=\frac{1}{\overline{E}}\left[P_{11}-\nu P_{22}-\nu P_{33}\right],$$

$$P_{22}-\nu\left(P_{11}+P_{33}\right)=0,\quad \frac{\partial U_3}{\partial\zeta}=\frac{1}{\overline{E}}\left[P_{33}-\nu P_{11}-\nu P_{22}\right],\tag{3.4}$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial U_3}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{13}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{31}=0,\quad \frac{\partial U_1}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{31}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{13};$$

силовая антиплоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{32}}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial U_2}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{12}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{21},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{32}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{23}=0,$$

$$\left(\overline{\mu}+\overline{\alpha}\right)P_{21}-\left(\overline{\mu}-\overline{\alpha}\right)P_{12}=0,\quad \left(\overline{\mu}+\overline{\alpha}\right)P_{23}-\left(\overline{\mu}-\overline{\alpha}\right)P_{32}=0.7;\tag{3.5}$$

Моментная плоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{32}}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_2}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{12}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{21},$$

$$\frac{\partial\varpi_2}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{32}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{23},$$

$$\left(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}\right)Q_{21}-\left(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}\right)Q_{12}=0,\quad \left(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}\right)Q_{23}-\left(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}\right)Q_{32}=0;\tag{3.6}$$

моментная антиплоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{31}}{\partial\zeta}=0,\ \ \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{33}}{\partial\zeta}=0,\ \ 2\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)Q_{22}-\overline{\beta}\left(Q_{11}+Q_{33}\right)=0,$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_1}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}\left(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma}\right)}\left[Q_{11}-\frac{\overline{\beta}}{2\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)}\left(Q_{22}+Q_{33}\right)\right],$$

$$\frac{\partial\varpi_1}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{31}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{13},\tag{3.7}$$

$$\frac{\partial\varpi_3}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}\left(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma}\right)}\left[Q_{33}-\frac{\overline{\beta}}{2\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)}\left(Q_{11}+Q_{22}\right)\right],$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_3}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{13}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{31},$$

здесь $A_{10}=A_1\big|_{\xi_1=0}$.

Полученные уравнения погранслоя в декартовых координатах $\xi_1',\zeta\ \left(\xi_1'=A_{10}\xi_1\right)$ с асимптотической точностью $0\left(\lambda^{p-l}\right)$ описывают НДС плоской и антиплоской силовой и моментной не взаимосвязанных задач микрополярной теории упругости, имеющих место в полуполосе: $\left\{0\le\xi_1'<\infty,\ \ -1\le\zeta\le1\right\}$.

Потребовав, чтобы решения погранслойных задач (3.4)-(3.7) имели затухающий характер при $\xi_1 \to +\infty$, получим решения, обладающие следующими важными свойствами:

$$
\begin{gathered}
\int_{-1}^{1} P_{1n}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} Q_{1n}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} U_2\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} \varpi_2\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
\int_{-1}^{1} U_1\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar{\lambda}}{4\bar{\mu}\left(\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)} \int_{-1}^{1} \zeta P_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta, \\
\int_{-1}^{1} \varpi_1\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = \frac{\bar{\beta}}{4\bar{\gamma}\left(\bar{\beta}+\bar{\gamma}\right)} \int_{-1}^{1} \zeta Q_{13}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta, \\
\int_{-1}^{1} U_3\Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar{\mu}-\bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int_{-1}^{1} \zeta P_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
\int_{-1}^{1} \varpi_3\Big|_{\xi_1=0} d\zeta + \frac{\bar{\gamma}-\bar{\varepsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}} \int_{-1}^{1} \zeta Q_{11}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
\int_{-1}^{1} \frac{\partial U_1}{\partial \zeta}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\mu}+\bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int_{-1}^{1} P_{31}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
\int_{-1}^{1} \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{1}{\bar{\mu}+\bar{\alpha}} \int_{-1}^{1} P_{32}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0, \\
\int_{-1}^{1} \frac{\partial \varpi_3}{\partial \zeta}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta - \frac{\bar{\beta}+2\bar{\gamma}}{4\bar{\gamma}\left(\bar{\beta}+\bar{\gamma}\right)} \int_{-1}^{1} Q_{33}\Big|_{\xi_1=0} d\zeta = 0.
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Из приведённых соотношений (специально для микрополярной теории упругости) можем сделать следующий важный вывод: когда силовые и моментные напряжения в пограничной зоне самоуравновешены, этим свойством будут обладать также перемещения и независимые повороты.

4. Сращивание асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя. Рассматривая вопрос о сращивании внутреннего НДС с пограничным, приведём символическую запись для полного НДС оболочки:

$$
\left(\text{НДС}\right)_{\text{полн}} = \left(\text{НДС}\right)_{\text{вн}} + \lambda^{r} \cdot \left(\text{НДС}\right)_{\text{кр}}^{a} + \lambda^{\theta} \cdot \left(\text{НДС}\right)_{\text{кр}}^{в} \tag{4.1}
$$

Величины r, θ назовём показателями интенсивностей плоской и антиплоской погранслоёв. Они должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трёхмерным граничным условиям на поверхности края оболочки Σ.

Сначала рассмотрим первый вариант трёхмерных граничных условий микрополярной теории упругости, когда поверхность края оболочки загружена усилиями и моментами ($\Sigma_1 \equiv \Sigma,\ \Sigma_2 \equiv 0$). Удовлетворяя граничным условиям, выберем в (4.1) для величин r и θ следующие значения: $r = \theta = l - p - c$.

В рамках точности $0\left(\lambda^{p-l}\right)$, граничные условия при $\xi_1 = 0$ примут вид:

$$
\begin{gathered}
\tau_{11}^{0} + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{11}^{1} + \lambda^{-p-c} P_{11}^{n(0)} = \lambda^{-p-c} \tilde{p}_1^{*}, \quad \nu_{11}^{0} + \lambda^{-p} Q_{11}^{a(0)} = \lambda^{-p} \tilde{m}_1^{*}, \\
\tau_{12}^{0} + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{12}^{1} + \lambda^{-p-c} P_{12}^{a(0)} = \lambda^{-p-c} \tilde{p}_2^{*}, \quad \nu_{12}^{0} + \lambda^{-p} Q_{12}^{n(0)} = \lambda^{-p} \tilde{m}_2^{*},
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

$$\tau_{13}^{0}+\lambda^{-2p}P_{13}^{n(0)}=\lambda^{-2p}\tilde{p}_{3}^{*},\qquad \nu_{13}^{0}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\nu_{13}^{1}+\lambda^{-c}Q_{13}^{a(0)}=\lambda^{-c}\tilde{m}_{3}^{*},$$

где $p_n^* = \mu\lambda^{l-p-c}\tilde{p}_n^*, \quad m_n^* = R\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{m}_n^*$.

Используя соответствующие условия затухания из (3.8), на основе (4.2) получим граничные условия для систем двумерных уравнений (2.24)-(2.26):

$$T_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3,\ S_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3,\ N_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3,\ M_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*\alpha_3 d\alpha_3,$$

$$H_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*\alpha_3 d\alpha_3,\ L_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_1^*d\alpha_3,\ L_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_2^*d\alpha_3, \tag{4.3}$$

$$L_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3,\qquad \Lambda_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_3^*\alpha_3 d\alpha_3.$$

Рассмотрим второй вариант трёхмерных граничных условий микрополярной теории упругости, когда на поверхности края оболочки заданы перемещения и повороты $(\Sigma_2\equiv\Sigma, \Sigma_1\equiv 0)$. Удовлетворяя граничным условиям, выберем в (4.1) для величин r и θ следующие значения: $r=\theta=2l-2p-c$.

В рамках точности $0\left(\lambda^{p-l}\right)$, граничные условия при $\xi_1=0$ примут вид:

$$\begin{aligned}
&V_1^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta V_1^1+\lambda^{-p-c}U_1^{n(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{V}_1^{\bullet}, \qquad \omega_1^0+\lambda^{-p}\varpi_1^{a(0)}=\lambda^{-p}\tilde{\omega}_1^{\bullet},\\
&V_2^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta V_2^1+\lambda^{-p-c}U_2^{a(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{V}_2^{\bullet}, \qquad \omega_2^0+\lambda^{-p}\varpi_2^{n(0)}=\lambda^{-p}\tilde{\omega}_2^{\bullet},\\
&V_3^0+\lambda^{-2p}U_3^{n(0)}=\lambda^{-2p}\tilde{V}_3^{\bullet}, \qquad \omega_3^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^1+\lambda^{-c}\varpi_3^{a(0)}=\lambda^{-c}\tilde{\omega}_3^{\bullet},
\end{aligned}\tag{4.4}$$

где $V_n^{\bullet}=R\lambda^{l-2p-c}\tilde{V}_n^{\bullet}, \quad \omega_n^{\bullet}=\lambda^{l-2p-c}\tilde{\omega}_n^{\bullet}$.

С помощью условий затухания из (3.8), получим граничные условия для двумерной модели:

$$\begin{aligned}
&u_i\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u_i^*d\alpha_3,\ w\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u_3^*d\alpha_3,\ \Omega_n\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\omega_n^*d\alpha_3\\
&\psi_i\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\Big[V_i^{\bullet}\Big|_{\alpha_3=h}-V_i^{\bullet}\Big|_{\alpha_3=-h}\Big],\ \ \iota\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\Big[\omega_i^{\bullet}\Big|_{\alpha_3=h}-\omega_i^{\bullet}\Big|_{\alpha_3=-h}\Big].
\end{aligned}\tag{4.5}$$

Рассмотрим смешанные трёхмерные граничные условия, когда будет иметь место шарнирное опирание. В (4.1) для величин r и θ примем следующие значения: $r=l-p-c, \quad \theta=2l-2p+c$.

В рамках точности $0\left(\lambda^{p-l}\right)$, граничные условия при $\xi_1=0$ примут вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-l+2p-c}\tau_{11}^0+\lambda^{-2l+4p-2c}\zeta\tau_{11}^1+P_{11}^{n(0)}=\lambda^{-l+2p-c}\tilde{p}_1^*, \qquad \nu_{11}^0+\lambda^{-p}Q_{11}^{a(0)}=\lambda^{-p}\tilde{m}_1^*,\\
&\tau_{12}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{12}^1+\lambda^{-p-c}P_{12}^{a(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{p}_2^*, \qquad \lambda^{-c}\nu_{12}^0+Q_{12}^{n(0)}=\tilde{m}_2^*,\\
&\lambda^{-2p+c}V_3^0+\lambda^{-p-c}U_3^{n(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{V}_3^{\bullet},\ \nu_{13}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\nu_{13}^1+\lambda^{-c}Q_{13}^{a(0)}=\lambda^{-c}\tilde{m}_3^*,
\end{aligned}\tag{4.6}$$

где $V_3^{\bullet}=R\lambda^{l}\tilde{V}_3^{\bullet}, \quad p_1^*=\mu\lambda^{l}\tilde{p}_1^*,\ p_2^*=\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{p}_2^*, \quad m_1^*=R\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{m}_1^*,\ m_2^*=R\mu\lambda^{l}\tilde{m}_2^*,$ $m_3^*=R\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{m}_3^*$.

В этом случае, используя условия затухания из (3.8), получим следующие граничные условия шарнирного опирания для двумерной модели:

$$w\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u_3^*d\alpha_3\,,\ T_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3\,,\ S_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3\,,$$

$$M_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*\alpha_3 d\alpha_3\,,\ H_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*\alpha_3 d\alpha_3\,,\quad L_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_1^*d\alpha_3\,,\quad(4.7)$$

$$L_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_2^*d\alpha_3\,,\ L_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3\,,\ \ \Lambda_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_3^*\alpha_3 d\alpha_3\,.$$

5. Асимптотическая модель микрополярных упругих тонких оболочек. Таким образом, на уровне исходного приближения асимптотического метода из трёхмерной теории построена двумерная теория микрополярных оболочек. Система уравнений (2.24)-(2.26) вместе с одной из групп граничных условий – (4.3), (4.5) или (4.7) – представляют собой асимптотическую модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

6. Прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек и её обоснование. Метод гипотез построения классической теории упругих тонких оболочек (имеем в виду гипотезы Кирхгофа-Лява или уточнённые гипотезы) с точки зрения инженерной практики имеет преимущество перед асимптотическим методом потому, что в основу теории были положены упрощения, имеющие вполне определённый физический смысл, с учётом также большой их наглядности и ясности. Основная проблема построения прикладной теории микрополярных упругих тонких оболочек заключается в разработке таких гипотез, которые позволили сведение трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к вполне адекватной двумерной краевой задаче.

Для достижения этой цели, при формулировании гипотез, на наш взгляд, уместно использование качественных сторон асимптотического решения трёхмерной краевой задачи (1.1)-(1.5) микрополярной теории упругости в тонкой области оболочки.

В работах [12-14] осуществлена эта идея, сформулированы адекватные (соответствующие качественным сторонам асимптотического решения) гипотезы и построены как статические, так и динамические прикладные теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин. Принятые гипотезы формулируются так:

1. В процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярными к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически можем записать так: тангенциальные перемещения и нормальный поворот распределены по толщине оболочки по линейному закону:

$$V_i=u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \omega_3=\Omega_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\qquad(6.1)$$

а нормальное перемещение и тангенциальные повороты не зависят от поперечной координаты α_3, т.е.

$$V_3=w\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \omega_i=\Omega_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right).\qquad(6.2)$$

Отметим, что с точки зрения перемещений принятая гипотеза, по сути дела, совпадает с кинематической гипотезой Тимошенко в классической теории упругих оболочек [22-25]. Гипотеза (6.1),(6.2), в целом, как в работах [12-14], назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

2. Силовым напряжением σ_{33} в обобщённом законе Гука (1.2) для γ_{ii} можно пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii}, аналогично, моментным напряжением μ_{3i} в обобщённом законе Гука для χ_{i3} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3}.

3. При определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1, \alpha_2\right), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}\left(\alpha_1, \alpha_2\right). \tag{6.3}$$

После вычисления указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к соответствующим значениям (6.3) слагаемые, получаемые интегрированием первых двух и шестого уравнений равновесия из (1.1), для которых потребуем условия, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

4. Величинами $\dfrac{\alpha_3}{R_i}$, по сравнению с единицей, можно пренебрегать.

Отметим, что принятая статическая гипотеза 3) в случае классической теории есть основное отличие от работ [22-25].

Сравним основные уравнения прикладной статической теории микрополярных упругих тонких оболочек работы [12], построенные на основе перечисленных выше гипотез, с аналогичными уравнениями (2.24)-(2.26) асимптотической модели. Легко заметить, что уравнения равновесия (2.24) и геометрические соотношения (2.26) полностью совпадают. Физические соотношения работы [12] отличаются от физических соотношений (2.25) лишь подчёркнутыми членами в выражениях $T_{ii}, M_{ii}, L_{i3}, \Lambda_{i3}$.

Отметим, что подчёркнутые члены в выражениях T_{ii} и M_{ii}, это результат того, что по асимптотической теории в выражениях для γ_{ii}, по указанной точности, не пренебрегается σ_{33} относительно σ_{ii}. Но, как известно, в теориях тонких оболочек это пренебрежение оправдано и принята как гипотеза в работе [12]. Аналогичное содержание имеет также пренебрежение (которое и принято в работе [12], как гипотеза) подчёркнутыми членами в выражениях L_{i3} и Λ_{i3}.

Таким образом, можно заключить, что построенная в работе [12] общая прикладная статическая теория микрополярных упругих тонких оболочек – асимптотически последовательная теория.

Что касается динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек, то следует сказать, что её асимптотическая модель построена в работе [26], а прикладная модель на основе перечисленных выше гипотез – в работе [13]. При сравнении этих моделей легко убедиться, что уравнения движения (это уравнения равновесия (2.24) с учётом инерционных сил и моментов) и геометрические соотношения (которые и в динамической теории имеют вид (2.26)) полностью совпадают. Что касается физических соотношений, то разность – опять в подчёркнутых слагаемых в выражениях (2.25) для $T_{ii}, M_{ii}, L_{i3}, \Lambda_{i3}$.

Так как при $\alpha = 0$, как от асимптотической модели (основные уравнения (2.24)-(2.26)), так и от прикладной модели работы [12], будет отделяться классическая модель упругих тонких оболочек типа Тимошенко (т.е. уточнённая теория с учётом поперечных сдвиговых деформаций), то можем констатировать, что именно эта полученная классическая прикладная уточнённая модель тонких оболочек будет асимптотически последовательной моделью (аналогичное высказывание имеет место и для динамического случая).

Отметим, что в работах [17,18] аналогичным образом (асимптотическим методом) обосновываются прикладные теории микрополярных упругих тонких пластин и балок, построенные в работах [14,27] на основе сформированных выше аналогичных гипотез.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2C154.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A. Boundary Layer Theory for Elastic Plates // Comm. Pure and Apll. Math. 1961. №1. P. 1–33.
2. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266. №1325.
3. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек //Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Вып.3. Москва: Наука, 1966. С.116-136. (на русском языке).
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с. (на русском языке).
5. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
6. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с. (на русском языке).
7. Rogacheva N.N. The Theory of Piezoelectric Plates and Shells. London: Boca Ration. SRS Press. 1994. 260p.
8. Устинов Ю.А., Шленев М.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода плит и оболочек// Межвузовский сборник «Расчёт оболочек и пластин». Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского Инженерно-строительного ин-та, 1978. С.3-27.
9. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении, 1992. 232с. (на русском языке).
10. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates// Z Angew. Math. Mech (ZAMM). 2009. V.89. № 4. P.242-256.
11. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2009. «On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography». // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
12. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells// Journal of Physical Mesomechanics. 2012. V.15. №1-2. P.69-79.
13. Sargsyan S.H. The General Dynamic Theory of Micropolar Elastic Thin Shells. //Doklady Physics. 2011. Vol. 56. №1. P.39-42.
14. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Elastic Thin Plates and their Strength and Stiffness Characteristics// Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol.53. №2. P.275-282.
15. Sargsyan S.H. Boundary-Value Problems of Asymmetric Theory of Elasticity for Thin Plates //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. Vol.72. №1. P.77-86.

16. Sargsyan S.H. The Theory of Micropolar Thin Elastic Shells //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. №2. P.235–249.
17. Саркисян С.О. Построение математической модели микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом //Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. Т.5. С.31-37. (на русском языке).
18. Саркисян С.О. Асимптотический метод построения математических моделей микрополярных упругих тонких пластин //Учёные записки. Гюмрийский государственный педагогический институт. 2013. Серия А. №1. С.7-37. (на русском языке).
19. Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V. On Timoshenko-Reissner Type Theories of Plates and Shells//Int. J. Solids Structures. 1993. Vol. 30. №5. P.675-694.
20. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости //Прикладная математика и механика. 1964. Т.28. Вып.6. С.1117-1120. (на русском языке).
21. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. P.383.
22. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсальных изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с. (на русском языке).
23. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчёт пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288с. (на русском языке).
24. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544с. (на русском языке).
25. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение. 1987. 316с. (на русском языке).
26. Саркисян А.А. Асимптотический анализ начально-граничной динамической задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением в тонкой области оболочки //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №2. С.39-50. (на русском языке).
27. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidy of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol. 2. №1. Pp.98-108.

<u>Сведения об авторе</u>:
Саркисян Самвел Оганесович – Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. Высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.
Тел.: (093) 15 16 98
E-mail: s_sargsyan@yahoo.com; slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 27.11.2013