

УДК 532.529.5: 532.591

**СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ НЕВЯЗКОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ
СМЕСЬЮ**

Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Ключевые слова: несимметричные колебания, оболочка, жидкость, газ, пузырек.

Keywords: nonsymmetrical vibrations, shell, liquid, gas, bubble.

Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.

**Հոսող ոչ մածուցիկ զազաղեղուկ խառնուրդ պարունակող շրջանաձև զլանային
թաղանթի սեփական տատանումները**

Դիտարկված է Կիրիսֆ-Լյավի տեսությամբ համապատասխանող անվերջ զլանային թաղանթի ոչ սիմետրիկ տատանումների որոշման խնդիրը: Թաղանթը լցված է հոսող խոշոր և մանր չափի պղպջակներ պարունակող հեղուկի խառնուրդով: Թվային վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ տատանումների բոլոր նույն ձևերի համար մանր պղպջակներով խառնուրդ-թաղանթ համակարգի հաճախականությունները իրենց մեծությամբ գերազանցում են խոշոր պղպջակներ ունեցող համակարգի հաճախականություններին: Թաղանթի հաստությունը մեծացնելով և դիտարկվող ձևերի ու խառնուրդի հոսանքի արագությունը փոքրացնելով համակարգի տատանումների հաճախությունները մեծանում են, ինչպես մաքուր հեղուկ-թաղանթ համակարգի դեպքում:

Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.

The self-vibrations of cylindrical shell, filled by the flowing non viscous Gas-Liquid mixture

The problem of nonsymmetrical self-vibrations of the infinite long shell, filled by the flowing non viscous Liquid with large or small sizes of bubbles is considered. The subsonic regime of the shell-mixture system with small bubbles which vibration frequencies exceed the frequencies values of those with the large bubbles is considered. The frequency values of the system is increased, when shell thickness and flow speed are increased as when vibration modes are decreased analogous to the case of shell with the pure liquids.

Исследована задача определения несимметричных собственных колебаний бесконечно длинной упругой оболочки, наполненной протекающей односкоростной смесью жидкости с крупными и мелкими пузырьками газа. Рассмотрен дозвуковой режим протекания смеси, при котором частоты колебаний системы оболочка-смесь с мелкими пузырьками превышают значения частот оболочки с крупными пузырьками. С увеличением толщины оболочки и с уменьшением значения моды колебаний, а также скорости протекания значения частот возрастают, как в случае оболочки с чистой жидкостью.

Взаимодействия оболочек с газожидкостной смесью при вибрационных воздействиях изучены в [1], где двухфазная среда моделируется как двускоростная смесь, состоящая из слоёв несущей жидкости с включениями в виде газовых пузырьков. Поведение замкнутой цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при динамическом воздействии равномерно распределённого давления исследовано в [2]. Методика расчёта нестационарных колебаний оболочек с протекающей жидкостью, где нестационарность обусловлена действием внешних квазипериодических сил, частоты которых являются медленно меняющимися во времени, изложена в [3]. Исследования [1-4] динамического взаимодействия оболочки с жидкостью выявили, что гидроупругая система оболочка-жидкость обладает свойствами, не присущими отдельным её компонентам.

1.Уравнения гидродинамики. Пусть бесконечно длинная деформируемая цилиндрическая оболочка наполнена смесью несжимаемой жидкости с одинаковыми по размеру пузырьками калорически совершенного газа. Полагается, что относительного перемещения фаз нет, т.е. движения фаз происходят с одинаковыми по величине и направлению скоростями (односкоростная модель). Эффектами дробления, слипания и образования новых пузырьков, а также межфазного теплообмена и поверхностного натяжения пренебрегаются. Уравнения движения монодисперсной смеси пузырьковой структуры имеют вид [5]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$P = (1-\beta)P_1 + \beta P_2, \quad \rho = (1-\beta)\rho_1 + \beta\rho_2, \quad \rho_2 a^3 = \text{const}, \quad \rho_1 = \text{const} \quad (1.1)$$

$$P_2 - P_1 = \rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{da}{dt} \right)^2, \quad \frac{\beta \rho_2}{(1-\beta)\rho_1} = \text{const}, \quad \frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma$$

Здесь начало цилиндрической системы координат r, θ, x с ортами $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x$ размещено в сечении $x=0$, t – время, \vec{v} – вектор скорости смеси, P и ρ – давление и плотность, β – объёмное газосодержание, a – радиус пузырька, γ – показатель адиабаты газа, ∇ – оператор Гамильтона. Индексы 1 и 2 отнесены к параметрам жидкой и газовой фаз соответственно, а индекс 0 – к состоянию равновесия (покоя). Параметры, характеризующие смесь в целом, индексов не имеют.

Для дальнейшего анализа удобно несколько видоизменить уравнение Рэлея–Лэмба, описывающего динамику совместного деформирования фаз. Используя определение давления всей смеси, заменим перепад давлений в фазах на перепад давлений в пузырьке и самой смеси в целом. В результате придём к уравнению

$$P_2 - P = (1-\beta) \left[\rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right] \quad (1.2)$$

Исследуем возмущённое течение смеси при малых отклонениях её параметров от значений в состоянии покоя. Малость возмущений позволяет линеаризовать систему (1.1), (1.2) и записать уравнения в форме

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P', \quad \operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad P'_2 - P' = (1-\beta_0) \rho_1 a_0 \frac{\partial^2 a'}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

$$\rho' = (\rho_{20} - \rho_1) \beta' + \beta_0 \rho'_2, \quad \frac{\rho'_2}{\rho_{20}} = -\frac{1}{1-\beta_0} \frac{\beta'}{\beta_0}, \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{\rho'_2}{\rho_{20}}, \quad P'_2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_{20}} \rho'_2, \quad (1.4)$$

где штрихи отнесены к возмущённым характеристикам смеси. Исключив в (1.4) функции ρ'_2 и β' , приходим к формулам

$$\rho' = \frac{\beta_0 \rho_0}{\rho_{20}} \rho'_2, \quad P'_2 = c_0^2 \rho'_2, \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{1}{\beta_0 \rho_0} \rho'_2, \quad c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_0 \rho_0}.$$

Здесь c_0 – невозмущённая скорость звука в смеси. Комбинирование полученных формул с уравнением Рэлея–Лэмба из (1.3) позволяет получить связь

$$P' = c_0^2 \rho' + (1-\beta_0) \frac{c_0^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1 a_0^2} \quad (1.5)$$

которую можно рассматривать как неголономное уравнение состояния среды, где давление зависит не только от плотности смеси, но и от её второй производной по времени вследствие радиальной инерции жидкости. Здесь ω_{ar} – адиабатическая частота Миннаерта. Рассмотрим потенциальное течение смеси, когда $\vec{v} = \nabla \phi$, где ϕ – скалярный потенциал. Тогда из уравнений движения и неразрывности смеси (1.3) следуют уравнения

$$P' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial P'}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \varphi, \quad \operatorname{div}(\nabla \varphi) = \Delta \varphi. \quad (1.6)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. Комбинируя выражения (1.5) и (1.6), получим уравнение для определения потенциала $\varphi(r, \theta, x, t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \left[1 + \frac{1 - \beta_0}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Delta \varphi = 0 \quad (1.7)$$

Пусть внутри оболочки однородный поток рассматриваемой смеси перемещается вдоль положительного направления оси x с постоянной скоростью U . Вводя в рассмотрение систему координат (r', θ', x') , жёстко связанную с оболочкой, будем иметь

$$x = x' - Ut, \quad r = r', \quad \theta = \theta', \quad t = t' \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + U \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta'}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'}$$

При малых значениях газосодержания $\beta_0 \ll 1$ уравнение (1.7) в системе координат (1.8) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi - c_0^2 \left[1 + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi = 0 \quad (1.9)$$

Здесь штрихи над координатами опущены, что будет выполняться и впредь. Решение уравнения (1.9) будем искать в форме

$$\varphi(r, \theta, x, t) = f(r) e^{i(\omega t + \alpha x)} \cos n\theta,$$

где ω – циклическая частота, $\alpha = \pi/L$ – волновое число, L – длина полуволн вдоль образующей цилиндра, n – число окружных волн. Искомая функция $f(r)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \left(\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0, \quad \lambda^2 = \alpha^2 - \frac{(\omega + \alpha U)^2}{c_0^2} \left[1 - \frac{(\omega + \alpha U)^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1}, \quad (1.10)$$

общим решением которого является линейная комбинация модифицированных функций Бесселя первого I_n и второго K_n родов порядка n

$$f(r) = b_0 I_n(\lambda r) + b_1 K_n(\lambda r), \quad b_0, b_1 = \text{const.}$$

Поскольку при $r \rightarrow 0$ функция K_n неограниченно возрастает, постольку, в силу ограниченности функции f , следует полагать $b_1 \equiv 0$. Тогда скалярный потенциал предстанет в виде

$$\varphi(r, \theta, x, t) = b_0 I_n(\lambda r) e^{i(\omega t + \alpha x)} \cos n\theta. \quad (1.11)$$

В принятой модели газожидкостной смеси пренебрегается поверхностным натяжением в пузырьках и пульсационным напряжением в жидкости. Компоненты

тензора напряжений всей смеси определяются через компоненты тензоров несжимаемой жидкости и газовой фазы посредством формул [5]

$$\sigma_{rr} = (1 - \beta_0) \sigma_{rr}^{(1)} + \beta_0 \sigma_{rr}^{(2)} = -[(1 - \beta_0) P_1' + \beta_0 P_2'] = -P', \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rx}^{(1)} = 0 \quad (1.12)$$

Здесь верхние индексы указывают на принадлежность тензоров к соответствующим фазам, при этом $\sigma^{(2)} = -P_2 \delta_{mn}$ является шаровым (δ_{mn} – символ Кронекера). Подставляя первое уравнение из (1.6) в (1.12), в координатах (1.8) получим формулы

$$\sigma_{rr} = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rx} = 0. \quad (1.13)$$

С получением последних соотношений гидродинамическая часть исследования поставленной задачи гидроупругости завершается. Перейдём к рассмотрению её упругой составляющей.

2. Уравнения движения цилиндрической оболочки кругового сечения.

Модель Кирхгофа–Лява. Полагая оболочку тонкостенной и считая прогибы малыми в сравнении с толщиной, воспользуемся линейной теорией оболочек, для которых уравнения движения имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1 - \nu^2}{Eh} q_x + \rho_* \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1 + \nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= -\frac{1 - \nu^2}{Eh} q_\theta + \rho_* \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R^2} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} q_r + \rho_* \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u, v, w – смещения точек срединной поверхности соответственно в осевом направлении, вдоль дуги кругового сечения и по нормали к поверхности оболочки (радиальном направлении). Прогиб w считается положительным вдоль направления к центру кривизны; q_x, q_θ, q_r – составляющие внешней нагрузки по соответствующим координатным осям, ρ_* и h – плотность материала и толщина оболочки, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга. В силу тонкостенности, условия на поверхности оболочки будут в дальнейшем удовлетворяться на её срединной поверхности.

В точках примыкания смеси к стенкам трубы скорость частиц смеси в радиальном направлении r по величине должна совпадать со скоростью смещения w примыкающих к смеси точек. Такое требование приводит к формулировке граничного кинематического условия непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки

$$v_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (2.2)$$

В рассматриваемой смеси касательные напряжения, согласно (1.13), отсутствуют. Воздействие нормального напряжения смеси σ_{rr} на внутреннюю поверхность оболочки должно уравниваться радиальной компонентой q_r внешней силы, что позволяет сформулировать динамическое граничное условие

$$q_r = -\sigma_{rr}|_{r=R} = -\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(R, \theta, x, t). \quad (2.3)$$

Преобразуем условие (2.2). Вычисляя производную согласно решению (1.11), имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\lambda I'_n(\lambda R)}{I_n(\lambda R)} \varphi = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varphi = - \frac{I_n(\lambda r)}{\lambda I'_n(\lambda R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (2.4)$$

Тогда представление (2.3) компоненты q_r , согласно (2.4), переписывается в форме

$$q_r = \rho_0 \frac{I_n(\lambda r)}{\lambda I'_n(\lambda R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w. \quad (2.5)$$

В выражениях (2.4) и (2.5) штрих над функцией Бесселя означает дифференцирование по аргументу. Решение системы уравнений (2.1) в соответствии с представлением (1.11) будем искать в виде

$$(u, w) = (u_*, w_*) e^{i(\omega t + \alpha x)} \cos n\theta, \quad v = v_* e^{i(\omega t + \alpha x)} \sin n\theta, \quad (2.6)$$

где u_* , v_* , w_* – амплитуды волн в соответствующих направлениях. Учитывая (2.5) и полагая, в соответствии с (1.13), $q_x = 0$, $q_\theta = 0$, из (2.1) получим однородную систему алгебраических уравнений относительно функций u_* , v_* , w_* , в которой совершим переход к безразмерным параметрам

$$\omega_* = \frac{\omega R}{c_*}, \quad U_* = \frac{U}{c_*}, \quad \alpha_* = \alpha R, \quad \delta = \frac{a_0}{R}, \quad l = \frac{h}{R}, \quad c_*^2 = \frac{E}{\rho_*(1-v^2)}, \quad \lambda_* = \lambda R$$

Здесь c_* – скорость звука (распространения продольных волн) в материале оболочки, δ и l – приведённые радиус пузырька и толщина оболочки. В результате выкладок приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} & \left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-v}{2} n^2 \right) u_* + i \frac{1+v}{2} \alpha_* n v_* - i v \alpha_* w_* = 0 \\ & -i \frac{1+v}{2} \alpha_* n u_* + \left(\omega_*^2 - \frac{1-v}{2} \alpha_*^2 - n^2 \right) v_* + n w_* = 0 \\ & i v \alpha_* u_* + n v_* + \left[\omega_*^2 - 1 - \frac{l^2}{12} (\alpha_*^2 + n^2)^2 + \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{I_n(\lambda_*)}{\lambda_* I'_n(\lambda_*)} \frac{(\omega_* + \alpha_* U_*)^2}{l} \right] w_* = 0 \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений полученной линейной однородной системы является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при u_* , v_* и w_* . Отсюда следует дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
& \left[\omega_*^2 - 1 - \frac{l^2}{12} (\alpha_*^2 + n^2)^2 + \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{I_n(\lambda_*)}{\lambda_* I_n'(\lambda_*)} \frac{(\omega_* + \alpha_* U_*)^2}{l} \right] \times \\
& \times \left[\left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \left(\omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2} \alpha_*^2 - n^2 \right) - \left(\frac{1+\nu}{2} \alpha_* n \right)^2 \right] - \\
& - n^2 \left[\omega_*^2 - (1-\nu) \alpha_*^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right] - \nu^2 \alpha_*^2 \left(\omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2} \alpha_*^2 \right) = 0 \\
& \lambda_*^2 = \alpha_*^2 - \frac{c_*^2}{c_0^2} (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \left[1 - \frac{\rho_0 c_*^2}{3\gamma P_0} \delta^2 (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \right]^{-1}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Если ввести в рассмотрение число Маха

$$M_1 = \frac{c_*}{c_0} \frac{\omega_* + \alpha_* U_*}{\alpha_*}, \quad \lambda_*^2 = \alpha_*^2 \left[1 - M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} \delta^2 \alpha_*^2 M_1^2 \right)^{-1} \right],$$

то из требования $\lambda_*^2 > 0$ следует условие

$$\frac{1}{M_1^2} > 1 + \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} \delta^2 \alpha_*^2,$$

соответствующее дозвуковому ($M_1 < 1$) режиму течения смеси.

Вернёмся к (1.10), которое можно переписать в виде уравнения Бесселя

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \left(\lambda_2^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0, \quad \lambda_2^2 = -\alpha^2 + \frac{(\omega_* + \alpha_* U)^2}{c_0^2} \left[1 - \frac{(\omega_* + \alpha U)^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1} \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что в данном случае приемлемым решением для потенциала $\varphi(r, \theta, x, t)$ будет функция

$$\varphi(r, \theta, x, t) = b_2 I_n(\lambda_2 r) e^{i(\omega t + \alpha x)}, \quad b_2 = \text{const},$$

где $I_n(\lambda_2 r)$ – функция Бесселя первого рода порядка n . Для компоненты q_r внешней силы получим формулу

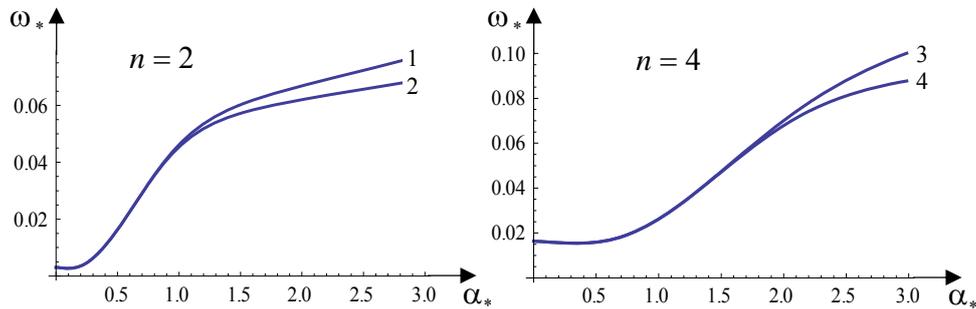
$$q_r = \rho_0 \frac{I_n(\lambda_{2*})}{\lambda_{2*} I_n'(\lambda_{2*})} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w, \quad \lambda_{2*} = \lambda_2 R$$

Выкладки, аналогичные вышеприведённым, приводят к модификации дисперсионного уравнения (2.7), в котором вместо функций $I_n(\lambda_*)$ и $I_n'(\lambda_*)$ будут фигурировать функция $I_n(\lambda_{2*})$ и её производная $I_n'(\lambda_{2*})$, а вместо λ_* – параметр λ_{2*} .

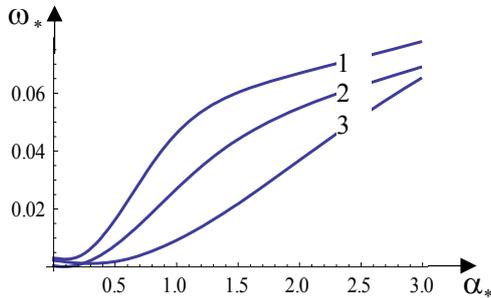
Если выразить λ_{2*} из (2.8) через число Маха, то из требования $\lambda_{2*}^2 > 0$ получим условие, определяющее сверхзвуковой ($M_1 > 1$) режим течения смеси в трубе

$$\left[1 + \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} \delta^2 \alpha_*^2 \right] < M_1^2 < \frac{3\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\alpha_*^2}.$$

Для иллюстрации приведённой теории в качестве примера рассмотрена стальная оболочка с физическими параметрами $\nu = 0.3$, $\rho_* = 7800 \text{ кг/м}^3$, $c_* = 5308.2 \text{ м/с}$, наполненная протекающей газожидкостной смесью пузырьковой структуры, несущей фазой которой является вода, а дисперсной – монодисперсные пузырьки воздуха. Параметры смеси таковы: $P_0 = 0.1 \text{ МПа}$, $\rho_0 = 988 \text{ кг/м}^3$, $\beta_0 = 0.01$, $\gamma = 1.4$, $c_0 = 119 \text{ м/с}$. Вычисления проведены в случае дозвукового течения смеси по уравнению (2.7).



Фиг.1. Частоты собственных колебаний оболочки в зависимости от размера пузырьков при параметрах системы: $l = 0.008$, $U_* = 0.005$.



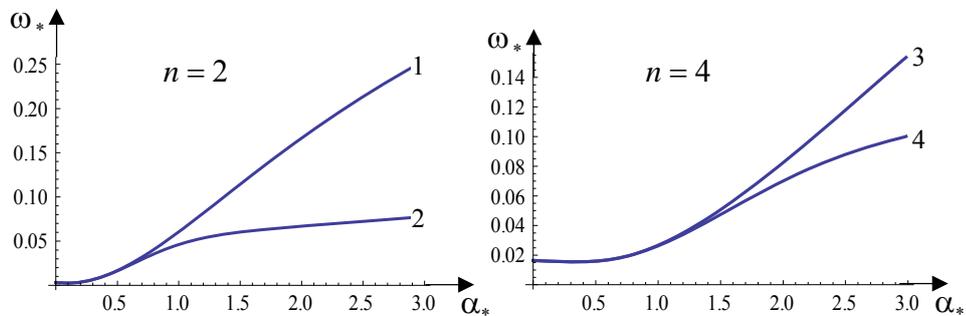
Фиг.2. Графики $\omega_*(\alpha_*)$ в случае разных толщин оболочки l и мод колебаний n : $U_* = 0.005$, $\delta = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

Кривая 1 – $l = 0.008$, $n = 2$; 2 – $l = 0.002$, $n = 2$; 3 – $l = 0.002$, $n = 4$.

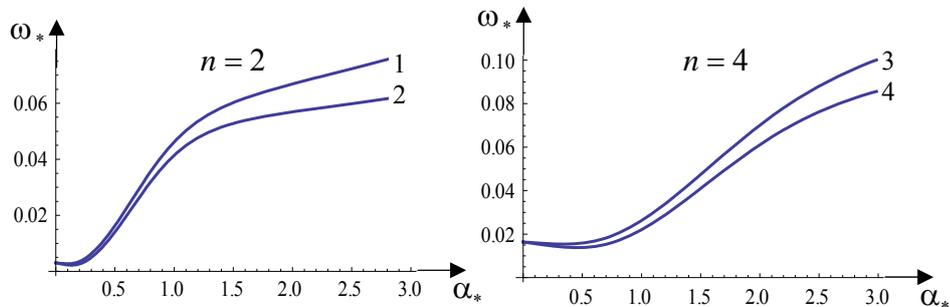
На фиг.1 приведены частоты колебаний оболочки в зависимости от размера пузырьков. Кривые 1 и 2 отнесены к моде $n = 2$ при наличии в смеси соответственно мелких ($\delta_* = 0.5 \cdot 10^{-3}$) и крупных ($\delta_* = 0.2 \cdot 10^{-1}$) пузырьков в случае значений толщины трубы $l = 0.008$ и скорости протекания $U_* = 0.005$. Кривые 3 и 4 отнесены к моде $n = 4$ с теми же параметрами системы. Видно, что для всех значений безразмерного волнового числа α_* при одинаковых модах n частоты колебаний оболочки со смесью с мелкими пузырьками превосходят по

величине частоты той же оболочки, наполненной, однако, смесью с крупными пузырьками. С увеличением α_* это различие усиливается.

На фиг. 2 для смеси с мелкими ($\delta_* = 0.5 \cdot 10^{-3}$) пузырьками и при значении $U_* = 0.005$ представлены зависимости частот от толщины l и моды колебаний n . С увеличением l от 0.002 (кривая 2) до 0.008 (кривая 1) частота возрастает, а с увеличением n от 2 (кривая 2) до 4 (кривая 3) значения частот уменьшаются. Аналогичная картина поведения кривых имеет место и в случае смеси с крупными пузырьками. Обобщая расчёты при других параметрах системы, можно утверждать, что при конечных значениях α_* (сравнительно короткие волны) для заданных одинаковых параметров гидроупругой системы с увеличением l частота колебаний возрастает, а с увеличением моды n – убывает. При значительных длинах волн ($\lambda_* \ll 1$) с повышением моды колебаний n частота, наоборот, возрастает.



Фиг.3. Кривые $\omega_*(\alpha_*)$ для разных наполнителей при $U_* = 0.005$, $l = 0.008$.



Фиг.4. Зависимость $\omega_*(\alpha_*)$ от скорости протекания водовоздушной смеси:
 $l = 0.008$, $\delta = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

На фиг. 3 показаны кривые $\omega_*(\alpha_*)$ при разных наполнителях. Кривые 1 и 3 отнесены к случаю воды с модами $n = 2$ и $n = 4$ соответственно, а 2 ($n = 2$) и 4 ($n = 4$) – к случаю газожидкостной смеси с мелкими пузырьками ($\delta_* = 0.5 \cdot 10^{-3}$). Для обоих случаев $l = 0.008$, $U_* = 0.005$. Видно, что кривая 1 расположена выше кривой 2, а кривая 3 – выше кривой 4, т.е. в случае воды частоты

колебаний оболочки по величине превосходят частоты при наличии смеси с пузырьками воздуха.

Фиг.4 иллюстрирует влияние скорости протекания U_* на параметр частоты $\omega_*(\alpha_*)$. Здесь $l = 0.008$, $\delta_* = 5 \cdot 10^{-4}$, кривые 1,3 отнесены к случаю $U_* = 0.005$, а кривые 2 и 4 – к $U_* = 0.01$. Как видим, кривые 2 ($n = 2$) и 4 ($n = 4$) расположены ниже кривых 1 $n = 2$ и 3 $n = 4$, т.е. для одинаковых мод и фиксированных прочих параметров системы с увеличением скорости протекания частоты собственных колебаний бесконечно длинной оболочки уменьшаются. Такая же картина наблюдается в случае смеси с крупными ($\delta_* = 2 \cdot 10^{-2}$) пузырьками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В.Д., Лакиза В.Д. и др. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. Киев: Наукова Думка, 1988. 256с.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью при внешнем динамическом давлении. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №1. С.25-32.
3. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов А.Н. Анализ нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при взаимодействии с протекающей жидкостью. // Прикладная механика. 2010. Т.46. №10. С.36-52.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

Сведения об авторах:

Оганян Гагик Гришаевич – ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24^б, тел. (+37493) 946-947, E-mail: oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Левонович – ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.

Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел.: (+37410) 575-140, (+37477) 002-408 (моб.) E-mail: ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 23.10.2013