

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА  
НЕКЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
ДЛЯ ПАКЕТА ИЗ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ  
ТОЛЩИНЫ**

**Агаловян М.Л., Геворкян Р.С.**

**Ключевые слова:** Асимптотический метод, литосферная плита, землетрясение.

**Key words:** Asymptotic method, lithospheric plate, earthquake.

Աղալովյան Մ.Լ., Գևորգյան Ռ.Ս.

**Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի փաթեթի համար ջերմաառաձգականության ոչ-  
դասական եզրային խնդիրների մի դասի ասիմպտոտիկական լուծումը**

Լուծված է ոչ-դասական եզրային խնդիր օրթոտրոպ սալերի փաթեթի համար, երբ նրա մի դիմային մակերևույթի վրա լարումների թենզորի համապատասխան բաղադրիչները հավասար են զերոյի և տրված են տեղափոխման վեկտորի արժեքները: Խնդիրը, մասնավորապես, մոդելավորում է սեյսմակայանների, GPS և ուրիշ չափման միջոցների կողմից գրանցած Երկրի լիտոսֆերային սալերի, կամ երկրակեղևի տեկտոնիկ շարժման ենթակա ռեգիոնի վարքը:

Ելնելով ջերմաառաձգականության եռաչափ խնդրի հավասարումներից փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի փաթեթի համար ասիմպտոտիկ եղանակով արտածված են վճռորոշ ռեկուրենտ հավասարումներ: Արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր լարումների թենզորի և տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար:

Aghalovyan M.L., Gevorgyan R.S.

**Asymptotic solution of a class thermoelasticity nonclassical boundary value problems for the package of an orthotropic plate of variable thickness**

We solve the non-classical boundary value problem for an orthotropic packet when on one of its front surface the corresponding components of the stress tensor are equal to zero and sets the value of the displacement vector. The task, in particular, is modeling the behavior of the lithospheric plates of the Earth, or a specific region of the earth's crust subject to tectonic movements of the fixed seismic stations, GPS and other measuring instruments.

On the basis of three-dimensional equations of thermo-elasticity asymptotic method derived recurrence equations allow for a package of orthotropic layers of varying thickness. We derive recursive formulas for determining the components of the stress tensor and the displacement vector.

Решена неклассическая краевая задача для ортотропного пакета, когда на одной его лицевой поверхности соответствующие компоненты тензора напряжений равны нулю и заданы значения вектора перемещения. Задача, в частности, моделирует поведение литосферных плит Земли или определённого региона земной коры, подверженных тектоническим движениям, зафиксированными сейсмостанциями, GPS и другими средствами измерений.

На основе трёхмерных уравнений термоупругости асимптотическим методом выведены рекуррентные разрешающие уравнения для пакета из ортотропных слоёв переменной толщины. Выведены рекуррентные формулы для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения.

**Введение.** Современная наука истинную причину возникновения сильных землетрясений связывает с тектоникой литосферных плит Земли ( $\approx 95\%$  землетрясений) [1,2], что обуславливает важность определения напряжённо-деформированных состояний литосферных плит Земли достаточно широких регионов земной коры и осуществления мониторинга его изменения во времени.

Наличие густой сети сейсмостанций, спутниковых GPS систем, наклономеров, которые, в частности, имеют возможность для измерения значений перемещений точек поверхности соответствующего слоистого пакета и проследить за их изменением во времени, создают возможность для успешного решения этой проблемы. Однако соответствующая трёхмерная задача теории упругости оказалась неклассической, ибо условия (их шесть) заданы только на лицевой поверхности пластины или слоистого пакета из пластин – соответствующие три компонента тензора напряжений равны нулю (поверхность свободна), но известны значения перемещений точек этой поверхности как данные сейсмостанций, GPS систем, наклономеров и других измерительных приборов.

Различают два типа тектонических движений: медленные (могут длиться десятки лет) и быстрые (скачкообразные). Медленные движения являются квазистатическими (время  $t$  входит как параметр), быстрые же движения являются динамическими (форшок, землетрясение, автершок). Квазистатическая неклассическая задача для ортотропной пластинки асимптотическим методом решена в [3]. Там же показано, что всегда существует классическая краевая задача, т.е. на обеих лицевых поверхностях пластины поставлены по три условия краевых задач теории упругости, решения которых совпадают с решением неклассической задачи. В [4] найдено общее асимптотическое решение квазистатической неклассической задачи для пакета, состоящего из двух ортотропных пластин постоянной толщины, а в [5] – для пакета из " $n$ " постоянной толщины слоёв. Асимптотическое решение динамической неклассической задачи для " $n$ "-слоистого пакета найдено в [6].

Учитывая, что слоистая структура литосферных плит или сейсмоопасной местности, как правило, такова, что слои имеют переменные толщины, определение напряжённо-деформированных состояний таких структур становится необходимостью. В работе получено общее асимптотическое решение внутренней задачи, позволяющее удовлетворять неклассическим условиям на лицевой поверхности пакета и условиям полного контакта между слоями переменной толщины. В качестве приложения получено решение для двухслойного пакета.

**1. Постановка краевых задач.** Рассмотрим пакет слоёв (фиг.1), в котором слои ограничены гладкими непересекающимися поверхностями и относительно выбранной прямоугольной системы координат Охуз удовлетворяют условиям

$$\varphi^+(x, y) = \varphi_0(x, y) > \varphi_1(x, y) > \dots > \varphi_{n-1}(x, y) > \varphi_n(x, y) = \varphi^-(x, y) \quad (1.1)$$

$$h = \text{Sup}|\varphi_{i-1} - \varphi_i| \ll l, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где  $l$  – продольный характерный размер тонкого тела.

Пусть на лицевой поверхности  $z = \varphi_0(x, y)$  слоистого пакета заданы неклассические граничные условия:

$$\Phi_{\vartheta_j}^{*+} = \sigma_{jx}(x, y, \varphi_0, t) \cos(\vartheta_0, x) + \sigma_{jy}(x, y, \varphi_0, t) \cos(\vartheta_0, y) + \sigma_{jz}(x, y, \varphi_0, t) \cos(\vartheta_0, z) = 0, \quad u_j(x, y, \varphi_0, t) = u_j^+(x, y, t), \quad j = x, y, z \quad (1.2)$$

Такая задача считается неклассической, поскольку шесть граничных условий поставлены лишь на одной лицевой поверхности.

На слои действуют также объёмные силы  $P_x^{(i)}, P_y^{(i)}, P_z^{(i)}$  и, определяемое по закону Дюгамеля – Неймана, температурное поле с заданной температурной функцией  $\theta^{(i)} = T^{(i)} - T_0^{(i)}$ .

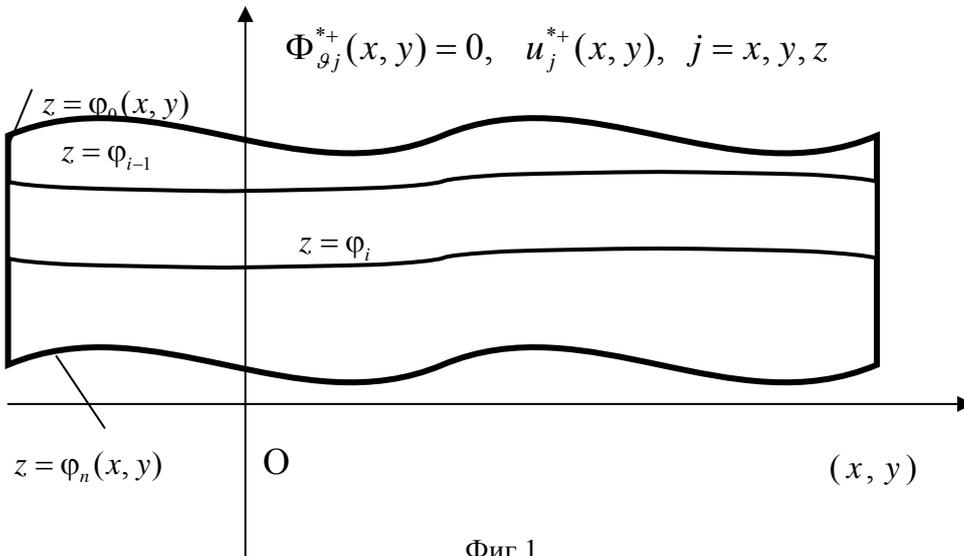
Пусть между слоями выполняются условия полного контакта теории упругости

$$z = \varphi_i : \left( \sigma_{jx}^{(i)} - \sigma_{jx}^{(i+1)} \right) \cos(\vartheta_i, x) + \left( \sigma_{jy}^{(i)} - \sigma_{jy}^{(i+1)} \right) \cos(\vartheta_i, y) +$$

$$\left( \sigma_{jz}^{(i)} - \sigma_{jz}^{(i+1)} \right) \cos(\vartheta_i, z) = 0, \quad u_j^{(i)} = u_j^{(i+1)}, \quad j = x, y, z; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.3)$$

$$\cos(\vartheta_{i-1}, x) = -\frac{1}{\Lambda_{i-1}} \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x} \quad (x, y), \quad \cos(\vartheta_{i-1}, z) = \frac{1}{\Lambda_{i-1}}$$

$$\Lambda_{i-1} = \sqrt{1 + (\partial \varphi_{i-1} / \partial x)^2 + (\partial \varphi_{i-1} / \partial y)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$



Фиг.1

Требуется определить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения в слоях и на поверхности  $z = \varphi^-(x, y)$ . Считается, что заданные в (1.2) перемещения по времени  $t$  меняются медленно (для литосферных плит, в среднем, 1–3 см в год), потому и решается квазистатическая задача (считается, что время  $t$  входит в граничные условия как параметр).

Решение поставленной задачи подразумевает нахождение решения уравнений равновесия и соотношений упругости

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + P_x = 0 \quad (x, y, z)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = e_1 + \alpha_{11} \theta \quad (x, y, z; 1, 2, 3), \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = a_{44} \sigma_{yz} \quad (y, z, x; 4, 5, 6) \quad (1.4)$$

$$e_m = a_{1m} \sigma_{xx} + a_{2m} \sigma_{yy} + a_{3m} \sigma_{zz}, \quad m = 1, 2, 3$$

для каждого слоя, удовлетворяющего классическим условиям полного контакта слоёв (1.3) и неклассическим условиям краевой задачи теории упругости (1.2).

В (1.4) и в дальнейшем в уравнениях и соотношениях время  $t$  не будет фигурировать, поскольку оно входит лишь в граничные условия как параметр.

В уравнениях и соотношениях (1.4) перейдём к безразмерным [7,8] координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{l}, \quad u = \frac{u_x}{l}, \quad v = \frac{u_y}{l}, \quad w = \frac{u_z}{l}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l} \quad (1.5)$$

где  $l$  – характерный тангенциальный размер слоёв (пластин).

Подставив (1.5) в (1.4), получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \zeta} + P_x &= 0 \quad (x, y; \xi, \eta) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \zeta} + P_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = e_1 + \alpha_{11} \theta, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = e_2 + \alpha_{22} \theta, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = e_3 + \alpha_{33} \theta$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = a_{44} \sigma_{yz} \quad (y, x; 4, 5), \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = a_{66} \sigma_{xy}$$

Система уравнений и соотношений (1.6) сингулярно возмущена геометрическим малым параметром  $\varepsilon$ . Её асимптотическое решение складывается из двух решений [7-9]. Первое из них, называемое внутренним решением, удовлетворяет граничным условиям, заданным на лицевых поверхностях (пластины) слоя. Второе решение, называемое решением задачи пограничного слоя, на лицевых поверхностях пластины удовлетворяет соответствующим нулевым условиям и в сумме с внутренним решением должно удовлетворять граничным условиям, заданным на торцах слоистого пакета.

Поскольку ортотропные слоистые пакеты рассматриваются с большой продольной протяжённостью, решается только внутренняя задача.

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического разложения

$$Q(x, y, z) = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{\chi_Q} Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.7)$$

где  $Q$  – любая из неизвестных компонент вектора перемещения  $u_x, u_y, u_z$ , тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  каждого слоя,  $\chi_Q$  – асимптотический порядок соответствующей величины, который для всех перемещений  $\chi_u = 0$ , а для всех напряжений  $\chi_\sigma = -1$  [7-9].

Такие асимптотические порядки впервые установлены в [9] в смешанных краевых задачах для полос. Они оказались справедливыми и для пластин и оболочек [7,8].

Считаем, что объёмные силы и температурное поле с самого начала должны присутствовать в итерационном процессе, т.е. их вклады соизмеримы с вкладом поверхностных воздействий, если они допускают следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} P_j(x, y, z) &= \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-2+s} l^{-1} P_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z \\ \theta(x, y, z) &= \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-1+s} \theta^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad Q^{(0)} = Q, \quad Q^{(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad Q = \{P_j, \theta\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставив (1.7), (1.8) в систему сингулярных уравнений и соотношений (1.6) и приравняв коэффициенты при  $\varepsilon^s$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, S$ ) в левых и правых частях

равенств, получим непротиворечивую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.7), что свидетельствует о правильности выбранной асимптотики. Новая система допускает интегрирование по поперечной координате  $\zeta$ . В результате, для компонент тензора напряжений и вектора перемещения получаются следующие рекуррентные формулы, которые для произвольного  $i$ -го слоя пакета имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{jz}^{(i,s)} &= \sigma_{jz0}^{(i,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z \\ \sigma_{xx}^{(i,s)} &= A_{13}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \sigma_{xx*}^{(i,s)} &= A_{13}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) + B_{11}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \gamma_{11}^{(i)} \theta^{(i,s)}\end{aligned}\quad (1.9)$$

$(x, y; \xi, \eta; u, v; 1, 2)$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(i,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(i)}} \left( \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \Delta^{(i)} = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)2} \\ u_0^{(i,s)} &= u_0^{(i,s)}(\xi, \eta) + \zeta A_{55}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + u_*^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (x, y, z; u, v, w; 5, 4, 3)\end{aligned}$$

Здесь обозначены:

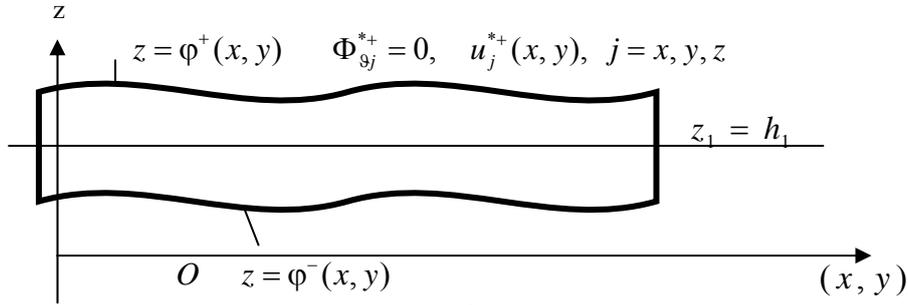
$$\begin{aligned}\sigma_{jz*}^{(i,s)} &= - \int_0^\zeta \left( \frac{\partial \sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + P_j^{(i,s)} \right) d\zeta, \quad j = x, y, z \\ \sigma_{xx*}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) &= A_{13}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} + B_{11}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \gamma_{11}^{(i)} \theta^{(i,s)} \\ &\quad (x, y; \xi, \eta; u, v; 1, 2) \\ u_*^{(i,s)} &= \int_0^\zeta \left( a_{55}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)} - \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \quad (\xi, \eta; u, v; 5, 4) \\ w_*^{(i,s)} &= \int_0^\zeta \left( A_{33}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} - A_{13}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} - A_{23}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \gamma_{33}^{(i)} \theta^{(i,s)} \right) d\zeta \\ A_{33}^{(i)} &= a_{13}^{(i)} A_{13}^{(i)} + a_{23}^{(i)} A_{23}^{(i)} + a_{33}^{(i)}, \quad A_{kk}^{(i)} = a_{kk}^{(i)}, \quad k = 4, 5, 6 \\ A_{j3}^{(i)} &= -a_{13}^{(i)} B_{j1}^{(i)} - a_{23}^{(i)} B_{j2}^{(i)}, \quad j = 1, 2; \quad B_{11}^{(i)} = \frac{a_{22}^{(i)}}{\Delta^{(i)}}, \quad B_{12}^{(i)} = -\frac{a_{12}^{(i)}}{\Delta^{(i)}} \quad (1, 2)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Полученный общий интеграл (1.7), (1.9), (1.10) системы уравнений (1.4) содержит  $6n$  функций интегрирования  $\sigma_{xz0}^{(i,s)}, \sigma_{yz0}^{(i,s)}, \sigma_{zz0}^{(i,s)}, u_0^{(i,s)}, v_0^{(i,s)}, w_0^{(i,s)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , которые однозначно определяются из шести неклассических граничных условий (1.2) и  $6(n-1)$  условий (1.3) полного контакта слоёв.

Формулы (1.7), (1.9), (1.10) позволяют определить и проследить изменение напряжённо-деформированных состояний литосферных плит определённого региона земной коры, вызванное тектоническими перемещениями за определённый промежуток времени.

2. **Моделирование напряжённно-деформированного состояния пакета, состоящего из двух ортотропных слоёв.** Пусть пакет состоит из двух ортотропных слоёв:  $z = \varphi^+(x, y)$ ,  $z = \varphi^-(x, y)$ , разделённых плоскостью  $z = h_1$  (фиг.2) и пусть за определённое время (напр., за год) свободные от нагрузки точки земной поверхности с координатами  $(x, y, \varphi^+(x, y))$  получили перемещения  $u_x^+, u_y^+, u_z^+$ . Используя формулы (1.7), (1.9), (1.10), удовлетворив граничным условиям (1.2) и условиям полного контакта слоёв (1.3), вычислим значения всех двенадцати функций интегрирования первого и второго слоёв пакета.

Они для произвольного приближения "S" имеют вид:



Фиг. 2

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz0}^{(1,s)}(\xi, \eta) &= F_x^{(s)} + \frac{A_{13}}{\Delta^+} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} \left( F_x^{(s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} + F_y^{(s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} + F_z^{(s)} \right) (x, y; \xi, \eta) \\
 \sigma_{zz0}^{(1,s)}(\xi, \eta) &= \left( F_x^{(s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} + F_y^{(s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} + F_z^{(s)} \right) / \Delta^+ \\
 F_x^{(s)} &= \sigma_{xx^*}^{(1,s)} \left( \zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} + \sigma_{xy}^{(1,s)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} - \sigma_{xz^*}^{(1,s)} \left( \zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) (x, y; \xi, \eta) \\
 F_z^{(s)} &= \sigma_{xz^*}^{(1,s)} \left( \zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} + \sigma_{yz^*}^{(1,s)} \left( \zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} - \sigma_{zz^*}^{(1,s)} \left( \zeta = \frac{\varphi^+}{l} \right) \quad (2.1) \\
 \Delta^+ &= 1 - A_{13}^{(1)} \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} \right)^2 - A_{23}^{(1)} \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial \eta} \right)^2 \\
 u_0^{(1,s)}(\xi, \eta) &= u^{+(1,s)} - \varphi^+ / h A_{55}^{(1)} \sigma_{xz0}^{(1,s)} + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta = \varphi^+ / h) \quad (x, y; u, v; 5, 4) \\
 w_0^{(1,s)}(\xi, \eta) &= w^{+(1,s)} - \varphi^+ / h A_{55}^{(1)} \sigma_{zz0}^{(1,s)} + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta = \varphi^+ / h) \\
 u^{+(1,0)} &= u_x^+ / l, \quad u^{+(1,s)} = 0, \quad s = 0 \quad (x, y, z; u, v, w) \\
 \sigma_{jz0}^{(2,s)} &= \sigma_{jz0}^{(1,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz^*}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta = h_1 / h) - \sigma_{jz^*}^{(2,s)}(\xi, \eta, \zeta = h_1 / h), \quad j = x, y, z \\
 u_0^{(2,s)} &= u_0^{(1,s)} + h_1 / h \left( A_{55}^{(1)} \sigma_{xz0}^{(1,s)} - A_{55}^{(2)} \sigma_{xz0}^{(2,s)} \right) + u_*^{(1,s)}(\zeta = h_1 / h) - u_*^{(2,s)}(\zeta = h_1 / h) \\
 &\quad (x, y, z; u, v, w; 5, 4, 3)
 \end{aligned}$$

По рекуррентным формулам (1.9), (1.10), (2.1) вычислим значения компонент тензоров напряжений и векторов перемещений первого и второго слоёв пакета, ограничившись первыми тремя шагами итерации ( $S = 2$ ), достаточных для практических приложений:

для первого слоя  $h_1 \leq z \leq \varphi^+(x, y)$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(1)} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - z)T_z^{(1)}, & \sigma_{xz}^{(1)} &= \tau_x^{(1)} + \tau_x^{(2)} + (\varphi^+ - z)T_x^{(1)} \\
\sigma_{xx}^{(1)} &= A_{13}^{(1)} \left( \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - z)T_z^{(1)} \right) + B_{11}^{(1)} \frac{\partial u_x^+}{\partial x} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial u_y^+}{\partial y} + \\
&+ B_{11}^{(1)} \left( (z - \varphi^+) \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) + B_{12}^{(1)} \left( (z - \varphi^+) \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial x} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) \\
\sigma_{xy}^{(1)} &= \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left( \frac{\partial u_x^+}{\partial y} + \frac{\partial u_y^+}{\partial x} \right) + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left[ (z - \varphi^+) \left( \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial x} \right) - \right. \\
&\quad \left. - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right] \\
\sigma_{xy}^{(1)} &= \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left( \frac{\partial u_x^+}{\partial y} + \frac{\partial u_y^+}{\partial x} \right) + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left[ (z - \varphi^+) \left( \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial x} \right) - \right. \\
&\quad \left. - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right] \\
u_x^{(1)} &= u_x^+ + (z - \varphi^+) \left( a_{55}^{(1)} \tau_x^{(2)} + U_{55}^{(1)} + W^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) - \frac{(z - \varphi^+)^2}{2} \left( a_{55}^{(1)} T_x^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right) \\
u_z^{(1)} &= u_z^+ + (z - \varphi^+) \left( A_{33}^{(1)} \sigma^{(2)} + W^{(1)} \right) + (z - \varphi^+) \left( A_{13}^{(1)} U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + A_{23}^{(1)} U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) \\
&- \frac{(z - \varphi^+)^2}{2} \left( A_{33}^{(1)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(1)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + A_{23}^{(1)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) (x, y; A_{13}, A_{23}; B_{11}, B_{22}; a_{55}, a_{44})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Для второго слоя  $\varphi^-(x, y) \leq z \leq h_1$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(2)} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - h_1)T_z^{(1)} + (h_1 - z)T_z^{(2)} \\
\sigma_{xz}^{(2)} &= \tau_x^{(1)} + \tau_x^{(2)} + (\varphi^+ - h_1)T_x^{(1)} + (h_1 - z)T_x^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(2)} &= A_{13}^{(2)} \left[ \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - h_1) T_z^{(1)} + (h_1 - z) T_z^{(2)} \right] + \\
&+ B_{11}^{(2)} \left( \frac{\partial u_x^+}{\partial x} - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) + B_{12}^{(2)} \left( \frac{\partial u_y^+}{\partial y} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) + \\
&+ (h_1 - \varphi^+) \left( B_{11}^{(2)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) + (z - h_1) \left( B_{11}^{(2)} \frac{\partial U_{55}^{(2)}}{\partial x} + B_{12}^{(2)} \frac{\partial U_{44}^{(2)}}{\partial y} \right) \\
\sigma_{xy}^{(2)} &= \frac{1}{a_{66}^{(2)}} \left[ \frac{\partial u_x^+}{\partial y} + \frac{\partial u_y^+}{\partial x} - U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} - U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + \right. \\
&\left. + (h_1 - \varphi^+) \left( \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial x} \right) + (z - h_1) \left( \frac{\partial U_{55}^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial U_{44}^{(2)}}{\partial x} \right) \right] \\
u_x^{(2)} &= u_x^+ + (h_1 - \varphi^+) \left( a_{55}^{(1)} \tau_x^{(2)} + U_{55}^{(1)} + W^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right) - \\
&- \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left( a_{55}^{(1)} T_x^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right) - \frac{(z - h_1)^2}{2} \left( a_{55}^{(2)} T_x^{(2)} + \frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} \right) + \\
&+ (z - h_1) \left[ a_{55}^{(2)} \tau_x^{(2)} + U_{55}^{(2)} + W^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + (\varphi^+ - h_1) \left( a_{55}^{(2)} T_x^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right) \right] \\
u_z^{(2)} &= u_z^+ + (h_1 - \varphi^+) \left( A_{33}^{(1)} \sigma^{(2)} + W^{(1)} + A_{13}^{(1)} U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + A_{23}^{(1)} U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) - \\
&- \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left( A_{33}^{(1)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(1)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + A_{23}^{(1)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) - \\
&- \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left( A_{33}^{(1)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(1)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + A_{23}^{(1)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) + \\
&+ (z - h_1) \left[ A_{33}^{(2)} \sigma^{(2)} + W^{(2)} + A_{13}^{(2)} U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + A_{23}^{(2)} U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} + \right. \\
&\left. + (\varphi^+ - h_1) \left( A_{33}^{(2)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(2)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + A_{23}^{(2)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) \right] - \\
&- \frac{(z - h_1)^2}{2} \left( A_{33}^{(2)} T_z^{(2)} + A_{13}^{(2)} \frac{\partial U_{55}^{(2)}}{\partial x} + A_{23}^{(2)} \frac{\partial U_{44}^{(2)}}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(x, y; A<sub>13</sub>, A<sub>23</sub>; B<sub>11</sub>, B<sub>22</sub>; a<sub>55</sub>, a<sub>44</sub>)

В формулах (2.2), (2.3) обозначены:

$$\sigma^{(i)} = \left( F_x^{(i)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + F_y^{(i)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right) / \Delta^+, \quad \tau_x^{(i)} = F_x^{(i)} + A_{13}^{(1)} \sigma^{(i)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x}, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned}
\Delta^+ &= 1 - A_{13}^{(1)} \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right)^2 - A_{23}^{(1)} \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right)^2, \quad T_z^{(i)} = \frac{\partial \tau_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^{(i)}}{\partial y}, \quad i = 1, 2 \\
T_x^{(i)} &= A_{13}^{(i)} \frac{\partial \sigma^{(i)}}{\partial x} + B_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 u_x^+}{\partial x^2} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial^2 u_y^+}{\partial x \partial y} + \frac{1}{a_{66}^{(i)}} \left( \frac{\partial^2 u_x^+}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y^+}{\partial x \partial y} \right), \quad i = 1, 2 \\
F_x^{(1)} &= \left( B_{11}^{(1)} \frac{\partial u_x^+}{\partial x} + B_{12}^{(1)} \frac{\partial u_y^+}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left( \frac{\partial u_y^+}{\partial x} + \frac{\partial u_x^+}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \\
F_x^{(2)} &= -\frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \left( B_{12}^{(1)} + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \right) U_{44}^{(1)} - \left[ B_{11}^{(1)} \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a_{66}^{(1)}} \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right)^2 \right] U_{55}^{(1)} \\
W^{(i)} &= A_{33}^{(i)} \sigma^{(1)} - A_{13}^{(i)} \frac{\partial u_x^+}{\partial x} - A_{23}^{(i)} \frac{\partial u_y^+}{\partial y}, \quad U_{55}^{(i)} = a_{55}^{(i)} \tau_x^{(1)} - \frac{\partial u_z^+}{\partial x}, \quad i = 1, 2 \\
&\quad (x, y; A_{13}, A_{23}; B_{11}, B_{22}; a_{55}, a_{44})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

На поверхности контакта слоёв для первого и второго слоёв  $z = h_1$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(1)}(z = h_1) &= \sigma_{zz}^{(2)}(z = h_1) = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + (\varphi^+ - h_1) T_z^{(1)} \\
\sigma_{xz}^{(1)}(z = h_1) &= \sigma_{xz}^{(2)}(z = h_1) = \tau_x^{(1)} + \tau_x^{(2)} + (\varphi^+ - h_1) T_x^{(1)} \\
u_x^{(1)}(z = h_1) &= u_x^{(2)}(z = h_1) = u_x^+ + (h_1 - \varphi^+) \left( a_{55}^{(1)} \tau_x^{(2)} + U_{55}^{(1)} + \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} W^{(1)} \right) - \\
&\quad - \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left( a_{55}^{(1)} T_x^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right) \quad (x, y; A_{13}, A_{23}; B_{11}, B_{22}; a_{55}, a_{44}) \\
u_z^{(1)}(z = h_1) &= u_z^{(2)}(z = h_1) = u_z^+ - \frac{(h_1 - \varphi^+)^2}{2} \left( A_{33}^{(1)} T_z^{(1)} + A_{13}^{(1)} \frac{\partial U_{55}^{(1)}}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. + A_{23}^{(1)} \frac{\partial U_{44}^{(1)}}{\partial y} \right) + (h_1 - \varphi^+) \left( A_{33}^{(1)} \sigma^{(2)} + W^{(1)} + A_{13}^{(1)} U_{55}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} + A_{23}^{(1)} U_{44}^{(1)} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Формулы (2.2)-(2.5) моделируют изменение напряжённно-деформированного состояния в литосферной плите или в заданном участке земной коры для заданного времени "t" проведённого измерения сейсмостанциями, GPS и другими системами измерения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13–2C009SCS.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pichon X. Le., Francheteau J. Vonnin J. Plate tectonics. Elsevier. 1973. (К.Л. Пишон, Ж. Франшто, Ж. Боннин. Тектоника плит. М.: Мир, 1977. 288с.)
2. Kasahara K. Eartquake Mechanics. Cambridge University Press, 1981. Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264 с.

3. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity theory for plates //Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. Vol.155, pp 3-10.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Гулгазарян Л.Г. К определению напряжённо-деформированных состояний литосферных плит Земли на основе данных GPS систем //Докл. НАН Армении. 2012. Т.112. №3. С.264-270.
5. Aghalovyan L.A. The Research of Lithospheric Plates Tectonics of the Earth on the Base of Data of Seismostations, GPS Systems, the Solutions of problems of Elasticity Theory and the Earthquakes Prediction. //Proceedings of the 15 th World Conference on Earthquake Engineering (Lisbon, Portugal. 24-28 September, 2012). 15 WCEE – title index.WCEE 2012-3008.pdf.
6. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. О динамическом поведении литосферных плит Земли на основе данных сейсмостанций и GPS систем.// Тр. Международной конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (08-12 сентября 2012. Цахкадзор, Армения). Ереван: 2012. Т.1. С.42-46.
7. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука-физматлит., 1997. 414с.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.
9. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Межвуз. сборник научн. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1982. С.7-12.

**Сведения об авторах:**

**Агаловян Мгер Ленсерович** – доктор физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

**Адрес:** пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>, 0019, Ереван, Армения.

**E-mail:** [mheraghalovyan@rambler.ru](mailto:mheraghalovyan@rambler.ru)

**Дом. адрес:** ул. Давида Маляна 4, кв. 63. 0096, Ереван, Армения.

**Геворкян Рубен Степанович** – профессор, доктор физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

**Тел.:** (+37410) 270828, (+37493) 536883

**E-mail:** [gevorgyanrs@mail.ru](mailto:gevorgyanrs@mail.ru)

**Дом. адрес:** ул. Киевяна, 12, кв. 6. 0028, Ереван, Армения.

Поступила в редакцию 26. 11. 2013