ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №1, 2014 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВЫХ ПРОСЛОЕК

(Посвящается светлой памяти академика НАН РА В.С. Саркисяна)

Керопян А. В.

Ключевые слова: упругая полоса, бесконечная пластина, контакт, накладка (стрингер), сдвиг, система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, система бесконечных систем линейных уравнений

Keywords: elastic layer, infinite plate, contact, overlay (stringer), shear, system of singular integro–differential equations, infinite systems of linear equations

Քերոբյան Ա.Վ.

Երկու վերջավոր առաձգական վերադիրներով կոնտակտային խնդիրներ առաձգական շերտի և անվերջ սալի համար, սահքի միջնաշերտերի առկայությամբ

Դիտարկված է խնդիրներ առաձգական շերտի և անվերջ սալի համար, որոնք xOy հարթության մեջ $y = 0$ գծի երկարությամբ վերջավոր տեղամասերում (սալի համար xOy –ը նրա միջին հարթությունն է) ուժեղացված են տարբեր առաձգական բնութագրեր և հաստատուն հաստություն ունեցող երկու վերջավոր վերադիրներով: Կոնտակտային փոխազդեցությունը վերադիրների և դեֆորմացվող հիմքերի միջև իրագործվում է այլ ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական բնութագրեր ունեցող սահքի միջնաշերտերի (սոսնձի բարակ շերտերի) միջոցով:Վերադիրները դեֆորմացիայի են ենթարկվում նրանց ծայրերում կիրառված հորիզոնական ուժերի ազդեցության տակ: Անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը հանգեցված է տարբեր միջակայքերում Կոշու կորիզով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծմանը որոշակի եզրային պայմաններով : Այդ համակարգերի լուծումը հանգեցված է քվազիլիովին ռեգուլյար գծային անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծմանը, որոնց ստացման համար օգտագործվել է Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատը: Դիտարկված են հնարավոր մասնավոր դեպքեր և պարզաբանված է կոնտակտային լարումների վարքը կոնտակտի տարբեր տեղամասերում:

Kerobyan A.V.

Contact Problems for an Elastic Layer and the Infinite Plate with Two Finite Elastic Overlays in the Presence of Shear Interlayers

The problems of contact interaction is observed for an elastic layer and the infinite plate which at $y = 0$ in the plane xOy (for the plate xOy - its average plane) are strengthened by two finite overlays (stringers) with different elastic characteristics and constant thickness. The contact interaction between deformable foundations and overlays is realized through a thin layer of glue with other phisico-mechanical properties and geometric configuration. The overlays are deformed under the action of horizontal forces. The determinational problem of unknown contact stresses are reduced to the system of singular integro-differential equations with Cauchy's kernel of second kind with two unknown functions within the different intervals with certain boundary conditions. Its solutions are constructed using apparatus Chebishev's orthogonal polynomials and unknown coefficients are received from the quasiperfectly regular infinite systems of the linear algebraic equations. Possible particular cases are observed and the behaviors of contact stresses are illustrated in different constant parts.

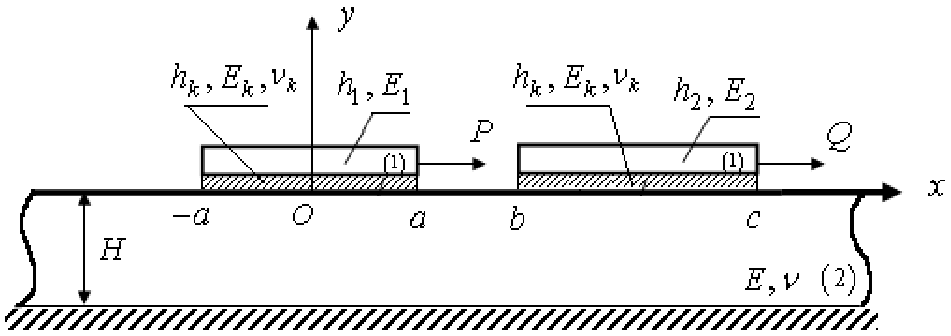
В работе рассматриваются задачи для упругой полосы и бесконечной пластины, которые на конечных отрезках вдоль линии $y=0$ в плоскости xOy (для пластины xOy – её средняя плоскость) усилены двумя конечными накладками (стрингерами) с различными модулями упругости и постоянной толщины. Контакт между накладками и деформируемыми основаниями осуществляется посредством сдвиговых прослоек (в виде слоёв клея, каждый дифференциальный элемент которой находится в условии чистого сдвига) с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. Контактирующая тройка (накладка, прослойка, деформируемые основания) деформируются под действием горизонтальных сил, приложенных к накладкам. Задача определения неизвестных касательных контактных напряжений сведена к решению систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений второго рода с ядрами Коши на различных интервалах при определённых граничных условиях. Решение этих систем сведено к системам квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, при получении которой был применён аппарат ортогональных многочленов Чебышева. Рассмотрены некоторые возможные частные случаи и выяснено поведение контактных напряжений, действующих в различных контактных участках.

В качестве основной из поставленных задач выбрана задача для упругого основания в виде полосы. Результаты для бесконечной пластины приведены по ходу решения и по возможности с одинаковыми обозначениями.

1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих уравнений. Пусть упругая бесконечная полоса (плоская деформация, модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν и толщина H) жёстко соединена с недеформируемым основанием гранью $y=-H$ и на конечных участках $[-a,a]$ и $[b,c]$ ($b>a$) своей границы $y=0$ (в плоскости xOy) усилена двумя конечными накладками малых постоянных толщин h_1 и h_2, модуль упругости которых при $x\in[-a,a]$ равен E_1, а при $x\in[b,c]$ равен E_2 (фиг.1). Контактное взаимодействие между накладками и деформируемым основанием осуществляется посредством сдвиговых прослоек (в виде слоёв клея, каждый дифференциальный элемент которой находится в условии чистого сдвига) с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками (E_k, ν_k, h_k). Задача заключается в определении неизвестных контактных напряжений, когда на концевых точках накладок $x=a$ и $x=c$ приложены горизонтальные силы P и Q соответственно, которые направлены вдоль оси Ox в одну сторону.

Контактная задача для упругой полуплоскости с двумя конечными накладками при наличии сдвиговых прослоек рассмотрена в [1]. Контактные задачи с двумя конечными стрингерами посредством сдвиговой прослойки с одним стрингером рассмотрены в [2,3]. В работе [4] на основе комплексного преобразования Фурье и метода Винера-Хопфа приводится новый подход для решения сингулярного интегрального уравнения на конечном интервале.

Для накладок (стрингеров) принимается модель одномерного упругого континуума в сочетании с моделью контакта по линии, а для прослоек – условия чистого сдвига, благодаря чему под накладками действуют только касательные контактные напряжения [1-3,5].



Фиг. 1

Имея в виду вышесказанное, из условия равновесия элементов накладок, (стрингеров) и закона Гука, получим дифференциальные уравнения равновесия накладок. Для одной из них, находящейся на отрезке $[-a,a]$, уравнение имеет вид:

$$\frac{du^{(1)}}{dx}=\frac{1}{E_1h_1}\int\limits_{-a}^{x}\tau_1(s)\,ds, \qquad -a\le x\le a \tag{1.1}$$

при условии

$$\int\limits_{-a}^{a}\tau_1(s)\,ds=P \tag{1.2}$$

а для накладки, находящейся на участке $[b,c]$, будем иметь:

$$\frac{du_1^{(1)}}{dx}=\frac{1}{E_2h_2}\int\limits_{b}^{x}\tau_2(s)\,ds, \qquad b\le x\le c \tag{1.3}$$

при условии

$$\int\limits_{b}^{c}\tau_2(s)\,ds=Q\,. \tag{1.4}$$

Здесь $u^{(1)}(x)$ и $u_1^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек накладок, а $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ – касательные контактные напряжения, действующие под накладками на участках $[-a,a]$ и $[b,c]$ соответственно.

После интегрирования (1.1) и (1.3), для перемещения точек накладки $u^{(1)}(x)$ будем иметь

$$u^{(1)}(x)=\frac{1}{E_1h_1}\int\limits_{-a}^{x}(x-s)\tau_1(s)\,ds+u^{(1)}(-a), \quad -a\le x\le a\,, \tag{1.5}$$

а для перемещения $u_1^{(1)}(x)$ будем иметь

$$u_1^{(1)}(x)=\frac{1}{E_2h_2}\int\limits_{b}^{x}(x-s)\tau_2(s)\,ds+u_1^{(1)}(b), \quad b\le x\le c\,. \tag{1.6}$$

Далее, для горизонтальных перемещений $u^{(2)}(x,0)$ граничных точек упругой полосы согласно вышеизложенному, будем иметь [3]:

$$u^{(2)}(x,0)=\int_{-a}^{a}K_n(|x-s|)\tau_1(s)ds+\int_{b}^{c}K_n(|x-s|)\tau_2(s)ds. \tag{1.7}$$

Здесь

$$K_n(|x|)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \tag{1.8}$$

$$K_n(\sigma)=\frac{(2\chi+1)\left[(\chi+1)\mathrm{sh}2H|\sigma|+2\chi H|\sigma|\right]}{2\mu|\sigma|\left[2\chi(\chi+1)\mathrm{ch}2H|\sigma|+\chi^2\left(4H^2\sigma^2+1\right)+(\chi+1)^2\right]},\ \ \chi=\frac{\lambda+\mu}{2\mu},$$

$\lambda,\mu-$ упругие постоянные Ламе материала полосы.

При решении задачи для упругой бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния, в предположении, что накладки (стрингеры) находятся на поверхности пластины по линии $y=0$ (xOy – средняя плоскость пластины), вместо (1.7) будем иметь:

$$u^{(2)}(x,0)=\frac{b_1^*}{\pi A}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau_1(s)ds+\frac{b_1^*}{\pi A}\int_{b}^{c}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau_2(s)ds+c, \tag{1.9}$$

где $A=8Gd/(3-\nu)$, $d-$ толщина пластины, $G-$ модуль сдвига материала пластины, b_1^*- ширина стрингеров в контактных участках, $c-$ некоторое постоянное.

Теперь полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условии чистого сдвига, для накладки, находящейся на участке $-a\le x\le a$, будем иметь условие [1-3,5]:

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=k\tau_1(x),\qquad -a\le x\le a, \tag{1.10}$$

а на участке $b\le x\le c$ будем иметь

$$u_1^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=k\tau_2(x),\qquad b\le x\le c, \tag{1.11}$$

где $k=h_k/G_k$,$G_k=E_k/2(1+\nu_k)$, G_k- модуль сдвига материала клея.

Для бесконечной пластины в $(1.1)-(1.6)$, а также $(1.10)-(1.11)$, следует $\tau_j(x)$ $(j=1,2)$ заменить на $b_1^*\tau_j(x)$ $(j=1,2)$, h_j $(j=1,2)$ следует заменить площадями поперечных сечений накладок $F_j=b_1^*h_j$ $(j=1,2)$, а $k-$ на $k^*=k/b_1^*$.

Далее, в силу (1.5), (1.7) и (1.10), а также на основании (1.6) и (1.11), после замены переменных x на ax, s на as, получим следующую систему интегральных уравнений:

$$
\begin{aligned}
t_1(x) &= \lambda_1^* \int_{-1}^{x} (x-s)\, t_1(s)\, ds - \alpha^* \int_{-1}^{1} \tilde{K}_n(|x-s|)\, t_1(s)\, ds - \\
&\quad - \alpha^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tilde{K}_n(|x-s|)\, t_2(s)\, ds + c_1, \qquad -1 \le x \le 1,
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

$$
\begin{aligned}
t_2(x) &= \lambda_2^* \int_{\delta_1}^{x} (x-s)\, t_2(s)\, ds - \alpha^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tilde{K}_n(|x-s|)\, t_2(s)\, ds - \\
&\quad - \alpha^* \int_{-1}^{1} \tilde{K}_n(|x-s|)\, t_1(s)\, ds + c_2, \qquad \delta_1 \le x \le \delta_2.
\end{aligned}
$$

Для бесконечной пластины будем иметь систему уравнений в виде

$$
\begin{aligned}
t_1(x) &= \lambda_1^* \int_{-1}^{x} (x-s)\, t_1(s)\, ds - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{a|x-s|}\, t_1(s)\, ds - \\
&\quad - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln \frac{1}{a|x-s|}\, t_2(s)\, ds + c_1^*, \quad -1 \le x \le 1,
\end{aligned}
\tag{1.12*}
$$

$$
\begin{aligned}
t_2(x) &= \lambda_2^* \int_{\delta_1}^{x} (x-s)\, t_2(s)\, ds - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln \frac{1}{a|x-s|}\, t_2(s)\, ds - \\
&\quad - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{a|x-s|}\, t_1(s)\, ds + c_2^*, \quad \delta_1 \le x \le \delta_2.
\end{aligned}
$$

Здесь введены обозначения

$$
\begin{aligned}
& t_j(x) = a\tau_j(ax) \quad (j=1,2), \ \ \tilde{K}_n(x) = K_n(ax),\ \lambda_j^* = a^2 / kE_j h_j \ (j=1,2), \\
& \alpha^* = a/k,\ \alpha_1^* = a/kA,\ \delta_1 = b/a,\ \ \delta_2 = c/a,\ \ c_1 = au^{(1)}(-a)/k, \\
& c_2 = au_1^{(1)}(b)/k,\ \ c_1^* = a\left[u^{(1)}(-a) - c\right]/k,\ \ c_2^* = a\left[u_1^{(1)}(b) - c\right]/k,
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

а постоянные величины c_1 и c_2 или c_1^* и c_2^* $-$соответственно будут определяться из условий

$$
\int_{-1}^{1} t_1(s)\, ds = P, \qquad \int_{\delta_1}^{\delta_2} t_2(s)\, ds = Q. \tag{1.14}
$$

В дополнение отметим также, что для пластины в (1.12*), (1.13) и (1.14) следует иметь в виду, что $t_j(x) = ab_1^*\tau_j(ax)$ и $\lambda_j^* = a^2 / kE_j F_j$, $j = 1,2$.

Далее, из (1.12) и (1.13) следует, что функции $t_1(x)$, $x \in [-1,1]$ и $t_2(x)$, $x \in [\delta_1, \delta_2]$ в концевых точках $x = \pm 1$ и $x = \delta_1$, $x = \delta_2$ имеют конечные значения. Отметим также, что при $\lambda_j^* = 0$ (при $E_j \to \infty$ $(j=1,2)$ имеем случай жёстких накладок) вместо системы (1.12) будем иметь:

$$t_1(x) = -\alpha^* \int_{-1}^{1} \tilde{K}_n(|x-s|) t_1(s)\,ds - \alpha^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tilde{K}_n(|x-s|) t_2(s)\,ds, \quad -1 \le x \le 1, \tag{1.15}$$

$$t_2(x) = -\alpha^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} \tilde{K}_n(|x-s|) t_2(s)\,ds - \alpha^* \int_{-1}^{1} \tilde{K}_n(|x-s|) t_1(s)\,ds, \quad \delta_1 \le x \le \delta_2,$$

а для бесконечной пластины будем иметь:

$$t_1(x) = -\frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{a|x-s|} t_1(s)\,ds - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln\frac{1}{a|x-s|}\, t_2(s)\,ds + c_1^*, \quad 1 \le x \le 1,$$

$$(1.15^*)$$

$$t_2(x) = -\frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln\frac{1}{a|x-s|}\, t_2(s)\,ds - \frac{\alpha_1^*}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{a|x-s|} t_1(s)\,ds + c_2^*, \quad \delta_1 \le x \le \delta_2,$$

где $c_j^* = -ac/k, \quad j = 1,2$.

Теперь после дифференцирования (1.12) по x и в силу представления [3]

$$\tilde{K}_n'(x) = \frac{d}{dx}\tilde{K}_n(x) = -\frac{A_1}{\pi}\left[\frac{1}{x} - K_*(x)\right], \tag{1.16}$$

где

$$K_*(x) = \int_0^\infty \left[1 - K(\sigma)\right]\sin\sigma x\,d\sigma, \quad K(\sigma) = \frac{\sigma}{A_1}K_n(\sigma), \quad \int_0^\infty \sin\sigma x\,d\sigma = \frac{1}{x},$$

$$A_1 = \frac{2\chi+1}{4\chi\mu}, \tag{1.17}$$

получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений второго рода с ядрами Коши:

$$\alpha\psi''(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(s)\,ds}{s-x} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_*(x-s)\psi'(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}K_*(x-s)\varphi'(s)\,ds = \lambda_1\psi(x), \quad -1 \le x \le 1,$$

$$(1.18)$$

$$\alpha\varphi''(x) + \frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(s)\,ds}{s-x} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}K_*(x-s)\varphi'(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_*(x-s)\psi'(s)\,ds = \lambda_2\varphi(x), \quad \delta_1 \le x \le \delta_2$$

при граничных условиях

$$\psi(-1) = 0, \qquad \psi(1) = P,$$

$$\varphi(\delta_1) = 0, \qquad \varphi(\delta_2) = Q, \tag{1.19}$$

где введены обозначения

$$\psi(x)=\int_{-1}^{x} t_1(s)\,ds,\ \varphi(x)=\int_{\delta_1}^{x} t_2(s)\,ds,\ \left(\psi'(x)=t_1(x),\varphi'(x)=t_2(x)\right)$$
$$\lambda_j=\frac{\lambda^*{}_j}{A_1\alpha^*}\quad \alpha=\frac{1}{\alpha^* A_1}\ . \tag{1.20}$$

Функция $K_*(x)$ имеет суммируемую с квадратом производную на отрезках $[-1,1]$ и $[\delta_1,\delta_2]$.

Для бесконечной пластины соответствующая система (1.18) будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\bar{\alpha}\psi''(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x}=\bar{\lambda}_1\psi(x),\quad -1\le x\le 1,\\ \bar{\alpha}\varphi''(x)+\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(s)\,ds}{s-x}=\bar{\lambda}_2\varphi(x),\ \delta_1\le x\le\delta_2\end{gathered} \tag{1.18*}$$

при граничных условиях (1.19), где

$$\bar{\lambda}_j=\frac{\lambda^*{}_j}{\alpha^*}=\frac{aA}{E_jF_j},\quad j=1,2,\quad \bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha_1^*}=\frac{kA}{a}\ .$$

Теперь рассмотрим некоторые возможные частные случаи, которые непосредственно можно получить из систем уравнений (1.18) и (1.18*). В случае $\alpha=0$ или $\bar{\alpha}=0$ (т.е. при $k=h_k/G_k=0$), системы сингулярных уравнений (1.18) или (1.18*) будут разрешающими системами уравнений аналогичной задачи без учёта прослоек. В случае $\lambda_j=0$ или $\bar{\lambda}_j=0$ (т.е. при $E_j\to\infty,\ j=1,2$), будем иметь случай жёстких накладок, а при $\lambda_2=0$ и $\lambda_1\ne 0$ (или $\bar{\lambda}_2=0$, $\bar{\lambda}_1\ne 0$) или наоборот, будем иметь случай одной жёсткой накладки. В случае 2a→0 получим случай одной накладки, заданной на отрезке [b,c] (в случае $\delta_2\to\delta_1$ будем иметь случай одной накладки, заданной на отрезке [-1, 1]) и вместо систем (1.18) или (1.18*) будем иметь одно разрешающее уравнение в виде:

$$\alpha\varphi''(x)+\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}K_*(x-s)\varphi'(s)\,ds=\lambda_2\varphi(x),\ \delta_1\le x\le\delta_2, \tag{1.21}$$

а для бесконечной пластины

$$\bar{\alpha}\varphi''(x)+\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x}=\bar{\lambda}_2\varphi(x),\ \delta_1\le x\le\delta_2 \tag{1.21*}$$

при граничных условиях

$$\varphi(\delta_1)=0,\qquad \varphi(\delta_2)=Q. \tag{1.19*}$$

2. Решение системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.18) при граничных условиях (1.19). Как уже было выяснено выше из системы

(1.12) или (1.12*), следует, что касательные контактные напряжения в концевых точках накладок $x=\pm 1,\ x=\delta_1$ и $x=\delta_2$ имеют конечные значения. Следовательно, представим решения системы (1.18) в виде рядов

$$\psi'(x)=A^*+B^*x+\sqrt{1-x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}U_{n-1}(x),\quad -1\le x\le 1, \tag{2.1}$$

$$\varphi'(x)=A_1^*+B_1^*h(x)+\sqrt{1-h^2(x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{n}U_{n-1}\left[h(x)\right],\ \delta_1\le x\le\delta_2,\ \left|h(x)\right|\le 1, \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered}A^*=\frac{\psi'(1)+\psi'(-1)}{2},\ B^*=\frac{\psi'(1)-\psi'(-1)}{2},\quad h(x)=\frac{2x-\delta_1-\delta_2}{\delta_2-\delta_1,},\\ A_1^*=\frac{\varphi'(\delta_1)+\varphi'(\delta_2)}{2},\ B_1^*=\frac{\varphi'(\delta_2)-\varphi'(\delta_1)}{2},\end{gathered} \tag{2.3}$$

а $\psi'(1),\ \psi'(-1)$ и $\varphi'(\delta_1),\varphi'(\delta_2)$ – значениия контактных напряжений в концевых точках накладок $x=\pm 1$ и $x=\delta_1,\ x=\delta_2$ соответственно, $U_{n-1}(x)\ (n=1,2,...)$ – многочлены Чебышева второго рода, в дальнейшем $T_n(x)\ (n=0,1,2,...)$ – многочлены Чебышева первого рода [6,7], а $\{X_n\}_{n=1}^{\infty},\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Теперь, вычисляя $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ при условиях (1.19):

$$\psi(x)=A^*(x+1)+B^*(x^2-1)/2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}Q_n(x),\quad -1\le x\le 1,$$

$$\varphi(x)=A_1^*(x-\delta_1)+\frac{B_1^*(x-\delta_1)(x-\delta_2)}{\delta_2-\delta_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{n}P_n\left[h(x)\right],\ \delta_1\le x\le\delta_2,\ \left|h(x)\right|\le 1,$$

$$Q_n(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-s^2}\,U_{n-1}(s)\,ds,\quad n=1,2,...,\qquad X_1=\frac{2}{\pi}\left(P-2A^*\right),$$

$$P_n\left[h(x)\right]=\int_{\delta_1}^{x}\sqrt{1-h^2(s)}\,U_{n-1}\left[h(s)\right]ds,\quad n=1,2,...\ ,\quad Y_1=\frac{4\left[Q-A_1^*(\delta_2-\delta_1)\right]}{\pi(\delta_2-\delta_1)},$$

а также $\psi''(x)$ и $\varphi''(x)$, подставляя вместе с (2.1), (2.2) в систему (1.18), и пользуясь соотношениями [2,6,7]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-s^2}U_{n-1}(s)\,ds}{s-x}=\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n},\quad n=1,2...,\ x>1,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\sqrt{1-h^2(s)}U_{n-1}\left[h(s)\right]ds}{s-x}=-T_n\left[h(x)\right], n=1,2...,\left|h(x)\right|<1, \tag{2.4}$$

$$\frac{2}{\delta_2-\delta_1}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{T_n\left[h(x)\right]T_m\left[h(x)\right]dx}{\sqrt{1-h^2(x)}}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n=1,2,...\\ \pi, & m=n=0\end{cases}$$

известным способом [8-11], после некоторых несложных вычислений, получим следующую систему бесконечных систем линейных уравнений:

$$\begin{aligned}&X_m+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}R_{m,n}^{(1)}X_n+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}L_{m,n}^{(1)}Y_n=f_m,\quad m=1,2,3...,\\ &Y_m+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}R_{m,n}^{(2)}Y_n+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}L_{m,n}^{(2)}X_n=g_m,\quad m=1,2,3...,\end{aligned} \tag{2.5}$$

или

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}R_{1,n}^{(1)}X_n+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}L_{1,n}^{(1)}Y_n=a_1,\quad m=1,\\ &X_m+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}R_{m,n}^{(1)}X_n+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}L_{m,n}^{(1)}Y_n=a_m,\quad m=2,3...,\\ &\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}R_{1,n}^{(2)}Y_n+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}L_{1,n}^{(2)}X_n=b_1,\quad m=1,\\ &Y_m+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}R_{m,n}^{(2)}Y_n+\frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}L_{m,n}^{(2)}X_n=b_m,\quad m=2,3...,\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$R_{m,n}^{(1)}=K_{m,n}^{(1)}+\lambda_1K_{m,n}^{(2)}+K_{m,n}^{(3)}\ ,\ \ L_{m,n}^{(1)}=K_{m,n}^{(4)}+K_{m,n}^{(5)}\ ,\ \ a_1=f_1-\left(1+\frac{1}{\alpha}R_{1,1}^{(1)}\right)X_1-\frac{1}{\alpha}L_{1,1}^{(1)}Y_1,$$

$$R_{m,n}^{(2)}=K_{m,n}^{(6)}+\lambda_2K_{m,n}^{(7)}+K_{m,n}^{(8)}\ ,\ \ L_{m,n}^{(2)}=K_{m,n}^{(9)}+K_{m,n}^{(10)}\ ,\ \ b_1=g_1-\left(1+\frac{1}{\alpha}R_{1,1}^{(2)}\right)Y_1-\frac{1}{\alpha}L_{1,1}^{(2)}X_1,$$

$$R_{m,1}^{(1)} = K_{m,1}^{(1)} + \lambda_1 K_{m,1}^{(2)} + K_{m,1}^{(3)} \ , \ \ L_{m,1}^{(1)} = K_{m,1}^{(4)} + K_{m,1}^{(5)} \ , \ a_m = f_m - \frac{1}{\alpha}\left(R_{m,1}^{(1)} X_1 + L_{m,1}^{(1)} Y_1\right),$$

$$R_{m,1}^{(2)} = K_{m,1}^{(6)} + \lambda_2 K_{m,1}^{(7)} + K_{m,1}^{(8)} \ , \ \ L_{m,1}^{(2)} = K_{m,1}^{(9)} + K_{m,1}^{(10)} \ , b_m = g_m - \frac{1}{\alpha}\left(R_{m,1}^{(2)} Y_1 + L_{m,1}^{(2)} X_1\right),$$

$$K_{m,n}^{(1)} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n}\left[\dfrac{1}{(m-n)^2 - 1} + \dfrac{1}{(m+n)^2 - 1}\right], \ |m-n| \neq 1 \\ 0, \ \ |m-n| = 1, \end{cases}$$

$$K_{m,n}^{(1)} = \frac{4\left(2n^2 - 1\right)}{\pi n\left(4n^2 - 1\right)}, \ m = n, \qquad K_{1,1}^{(1)} = \frac{4}{3\pi}, \tag{2.7}$$

$$K_{m,1}^{(1)} = -\frac{4m^2}{\pi\left[(m-1)^2 - 1\right]\left[(m+1)^2 - 1\right]}, \quad m \neq 2,$$

$$K_{m,n}^{(2)} = \frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{1} Q_n(x) T_m(x)\, dx = 0 \ \text{при} \ n \geq 2, \quad m \neq n, \ |n-m| \neq 2,$$

$$K_{1,1}^{(2)} = 3/8, \qquad K_{m,1}^{(2)} = -\left(m^2 - 1\right)^{-1}, \ m \geq 2 \ ,$$

$$K_{m,n}^{(2)} = \left[2\left(n^2 - 1\right)\right]^{-1} \ \text{при} \ n \geq 2, \ m = n, \ K_{2,2}^{(2)} = 1/6,$$

$$K_{m,n}^{(2)} = -\left[4n(n+1)\right]^{-1} \text{при} \ n \geq 2, m = n+2, K_{4,2}^{(2)} = -1/24,$$

$$K_{m,n}^{(2)} = -\left[4n(n-1)\right]^{-1} \ \text{при} \ n > 2, \ m = n-2, \ K_{1,3}^{(2)} = -1/24,$$

$$K_{m,n}^{(3)} = -\frac{2}{\pi^2 n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K_*(x-s)\sqrt{1-s^2}\, U_{n-1}(s)\, ds T_m(x)\, dx,$$

$$K_{m,n}^{(4)} = -\frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x) dx}{\left[h(x) + \sqrt{h^2(x) - 1}\right]^n},$$

$$K_{m,n}^{(5)} = -\frac{2}{\pi^2 n}\int_{-1}^{1}\int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s)\sqrt{1-h^2(s)}\, U_{n-1}\left[h(s)\right] ds T_m(x)\, dx, \ \ m,n = 1,2,...$$

$$K_{m,n}^{(6)} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} K_{m,n}^{(1)}, \qquad K_{m,n}^{(7)} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{4} K_{m,n}^{(2)},$$

$$K_{m,n}^{(8)} = -\frac{2}{\pi^2 n}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} K_*(x-s)\sqrt{1-h^2(s)}\, U_{n-1}\left[h(s)\right] ds T_m\left[h(x)\right] dx, \ m,n = 1,2,...$$

$$K_{m,n}^{(9)} = -\frac{2}{\pi n}\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{T_m\left[h(x)\right] dx}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\pi n}\int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)\, dt}{\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)^n}, \quad m,n = 1,2,...$$

$$K_{m,n}^{(10)}=-\frac{2}{\pi^2 n}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{-1}^{1}K_*\left(x-s\right)\sqrt{1-s^2}U_{n-1}\left(s\right)dsT_m\left[h\left(x\right)\right]dx,\ m,n=1,2,...$$

$$f_m=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}f\left(x\right)T_m\left(x\right)dx,\ \ f\left(x\right)=f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right),$$

$$f_1\left(x\right)=B^*\left(1+\frac{2}{\pi\alpha}\right)-\frac{\lambda_1}{\alpha}\left[A^*\left(x+1\right)+\frac{B^*}{2}\left(x^2-1\right)\right]+\frac{1}{\pi\alpha}\left(A^*+B^*x\right)\ln\frac{1-x}{1+x}+$$

$$+\frac{A^*}{\pi\alpha}\int_{-1}^{1}K_*\left(x-s\right)ds+\frac{B^*}{\pi\alpha}\int_{-1}^{1}sK_*\left(x-s\right)ds,$$

$$f_2\left(x\right)=\frac{1}{\pi\alpha}\left[2B_1^*+\left(A_1^*-\frac{B_1^*\left(\delta_1+\delta_2\right)}{\delta_2-\delta_1}+\frac{2B_1^*x}{\delta_2-\delta_1}\right)\ln\frac{\delta_2-x}{\delta_1-x}\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi\alpha}\left[A_1^*-\frac{B_1^*\left(\delta_1+\delta_2\right)}{\delta_2-\delta_1}\right]\int_{\delta_1}^{\delta_2}K_*\left(x-s\right)ds+\frac{2B_1^*}{\pi\alpha\left(\delta_2-\delta_1\right)}\int_{\delta_1}^{\delta_2}sK_*\left(x-s\right)ds,$$

$$g_m=\frac{2}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}g\left(x\right)T_m\left[h\left(x\right)\right]dx,\ \ g\left(x\right)=g_1\left(x\right)+g_2\left(x\right),$$

$$g_1\left(x\right)=\frac{2B_1^*}{\delta_2-\delta_1}+\frac{1}{\pi\alpha}\left[2B_1^*+\left(A_1^*-\frac{B_1^*\left(\delta_1+\delta_2\right)}{\delta_2-\delta_1}+\frac{2B_1^*x}{\delta_2-\delta_1}\right)\ln\frac{\delta_2-x}{x-\delta_1}\right]-$$

$$-\frac{\lambda_2}{\alpha}\left[A_1^*\left(x-\delta_1\right)-\frac{B_1^*\left(x-\delta_1\right)\left(\delta_2-x\right)}{\delta_2-\delta_1}\right]+\frac{1}{\pi\alpha}\left[A_1^*-\frac{B_1^*\left(\delta_1+\delta_2\right)}{\delta_2-\delta_1}\right]\int_{\delta_1}^{\delta_2}K_*\left(x-s\right)ds+$$

$$+\frac{2B_1^*}{\pi\alpha\left(\delta_2-\delta_1\right)}\int_{\delta_1}^{\delta_2}sK_*\left(x-s\right)ds,$$

$$g_2\left(x\right)=\frac{1}{\pi\alpha}\left[2B^*+\left(A^*+B^*x\right)\right]\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{A^*}{\pi\alpha}\int_{-1}^{1}K_*\left(x-s\right)ds+\frac{B^*}{\pi\alpha}\int_{-1}^{1}sK_*\left(x-s\right)ds.$$

Далее, как следует из полученных систем разрешающих интегро-дифференциальных уравнений для бесконечной пластины, соответствующую бесконечную систему уравнений можно получить непосредственно из системы (2.5), если в ней отбросим ядра $K_{m,n}^{(3)}, K_{m,n}^{(5)}, K_{m,n}^{(8)}, K_{m,n}^{(10)}$ и все члены с интегралами, входящими в выражения функций $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$, а λ_1, λ_2 и α заменить на $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2$ и $\overline{\alpha}$ соответственно.

Система уравнений (2.5) или (2.6) исследуется аналогично, как в [9-11]. Оказывается, что при произвольных значениях параметров λ_1/α, λ_2/α ($0<\left(\lambda_j/\alpha\right)<\infty$) эта система квазивполне регулярна.

Далее, определяя X_m, Y_m $\left(m=1,2,...\right)$, значения $\psi'(1)$, $\psi'(-1)$ и $\varphi'(\delta_1)$, $\varphi'(\delta_2)$ будут определяться из (1.12) или соответственно из (1.12*), подстановками в них $x=\pm 1$ и $x=\delta_1$ $x=\delta_2$ соответственно. Заметим, что при отсутствии материала прослойки в концевых точках накладки касательные контактные напряжения имеют корневую особенность [9-11].

В заключение отметим, что поставленные задачи в предположении, что приложенная в точке накладки $x=a$ сила P – неизвестная (внутренняя), а в точке накладки $x=b$ приложена идентичная, но противоположная P и определимая из условия $\int_b^c \tau_2\left(s\right)ds = Q-P$, можно трактовать как контактные задачи с кусочно-однородной конечной накладкой (в этом случае в частях соединения различных кусков кусочно-однородной накладки и в точках приложения сил неизвестные касательные контактные напряжения имеют конечные значения [12]), которая по каким-то причинам оторвана от деформируемого основания на участке $x\in\left[a,b\right]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полуплоскости с двумя конечными накладками при наличии сдвиговых прослоек. Современные проблемы механики деформируемого твёрдого тела, дифференциальных и интегральных уравнений. //Тезиси докладов Межд. научн. Конференции (посвящается светлой памяти Г.Я. Попова), 23-26-августа 2013, Одесса, 2013. С.68-69.
2. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С.14-23.
3. Саркисян В.С., Керопян А.В. К решению двух контактных задач для упругих тел с двумя разнородными конечными стрингерами. //Математические методы и физико-механические поля НАН Украины. Львов, 2003. Т.46. №2. С.114-121.
4. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для полуплоскости с упругим креплением. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №1. С.5-14.
5. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet.// Quart J. of Mech. and Applied Math. Vol. XXIII. 1970. P.521.

6. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415с.
7. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832с.
8. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: «Вища школа», 1982. 167с.
9. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. // ПММ. 1972. Т.36. №5. С.825-831.
10. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487с.
11. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 259с.
12. Керопян А.В. Контактная задача для упругой полуплоскости или бесконечной пластины с кусочно-однородным стрингером при наличии сдвига. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VII межд. конф., Институт механики НАН Армении, Ереван: 2011.С.207-214.

Сведения об авторе:

Керопян Агаси Вачаганович – канд.физ-мат.наук, доцент кафедры механики ЕГУ;
Адрес: ул. А.Манукяна, 1.
Тел.: 551 148 (раб.); 461 941(дом).
E-mail: agas50@ysu.am

Поступила в редакцию 14.11.2013